الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي — دورة: **2016**

الشعبة :رياضيات

اختبار في مادة: الرياضيات — المدة: **04** سا و **30** د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأوّل

يحتوي الموضوع الأول على 03 صفحات (من الصفحة 1 من 5 إلى الصفحة 3 من 5).

التمرين الأوّل: (04,5 نقطة)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

نعتبر النقط $A(1;1;0)$ ، $B(2;-1;1)$ ، $C(-1;0;1)$ ، $D\left(\frac{1}{2};2;-\frac{1}{2}\right)$ ، $E(0;1;1)$ ، $H\left(\frac{5}{4};\frac{7}{4};-\frac{1}{2}\right)$

و المستوي (P) المعرّف بالتمثيل الوسيطي: $\begin{cases} x=1+\alpha+\beta \\ y=2-\alpha \\ z=-1+2\alpha-\beta \end{cases}$ ، α و β وسيطان حقيقيان.

1) أ) بيّن أنّ النقط A ، B و C تُعيّن مستويا.

ب) تحقّق أنّ الشعاع $\vec{n}(1;3;5)$ ناظمي للمستوي (ABC) ثم اكتب معادلة ديكارتية له.

2) أ) اكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P) ثم بيّن أن المستويين (ABC) و (P) متقاطعان.

ب) نسمي (Δ) مستقيم تقاطع المستويين (ABC) و (P).

– تحقّق أنّ النقطة D تنتمي إلى المستقيم (Δ) و أنّ $\vec{u}(-3;1;0)$ شعاع توجيه للمستقيم (Δ).

جـ) اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ).

د) بيّن أنّ النقطة H هي المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (Δ) ثم استنتج المسافة بين A و (Δ).

3) G مرجح الجملة المثقلة: $\{(A,2);(B,-3);(C,2)\}$.

نسمي (Γ) مجموعة النقط M من الفضاء التي تُحقّق: $\overrightarrow{EM}\cdot\overrightarrow{GM}=11$.

أ) عيّن إحداثيات النقطة G.

ب) اكتب معادلة ديكارتية للمجموعة (Γ) ثم بيّن أنّها سطح كرة يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها.

جـ) حدّد الوضعية النسبية للمستوي (ABC) و المجموعة (Γ).

التمرين الثاني: (04,5 نقطة)

(u_n) متتالية هندسية متزايدة تماما، حدودها موجبة تماما، حدّها الأوّل u_0 و أساسها q حيث: $\begin{cases} \ln(u_1)+\ln(u_2)=11 \\ u_1+u_2=e^4\left(1+e^3\right) \end{cases}$

1) احسب u_1 و u_2 ثم استنتج قيمة الأساس q .

2) نضع: $u_1=e^4$ و $q=e^3$.

أ) عبّر عن u_n بدلالة n.

ب) نضع : $S_n=\ln(u_0)+\ln(u_1)+\ln(u_2)+...+\ln(u_n)$. احسب S_n بدلالة n.

3) من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $a_n = n+3$.

أ) بيّن أنّ : $PGCD(2S_n, a_n) = PGCD(a_n, 14)$.

ب) عيّن القيم الممكنة لـ: $PGCD(2S_n, a_n)$.

جـ) عيّن قيم الأعداد الطبيعية n التي من أجلها : $PGCD(2S_n, a_n) = 7$.

4) ادرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 7.

5) نضع: $b_n = 3na_n - 2S_n + 1437^{2016} + 1$.

عيّن قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون : $\begin{cases} b_n \equiv 0[7] \\ n \equiv 0[5] \end{cases}$.

6) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، العدد $\left(1437^{9n+1} - 3\times 4^{12n+1} + 52\right)$ يقبل القسمة على 7.

<u>التمرين الثالث:</u> (04,5 نقطة)

1) أ) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 - 4z + 5 = 0$.

ب) استنتج حلول المعادلة ذات المجهول المركب z الآتية: $\left(z + 1 + i\left(1-\sqrt{3}\right)\right)^2 - 4z + 1 - 4i\left(1-\sqrt{3}\right) = 0$.

2) θ عدد حقيقي حيث : $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ و z_0 عدد مركب طويلته 1 و θ عمدة له .

أ) اكتب العدد المركب $1+i\sqrt{3}$ على الشكل الأسي.

ب) عيّن θ علما أنّ: $\frac{z_0\left(1+i\sqrt{3}\right)}{\overline{z_0}} = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$. ($\overline{z_0}$ هو مرافق العدد المركب z_0).

جـ) n عدد طبيعي. من أجل قيمة θ المتحصل عليها، اكتب العدد المركب $\left[\frac{z_0\left(1+i\sqrt{3}\right)}{2}\right]^n$ على الشكل المثلثي.

د) عيّن قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون $\left[\frac{z_0\left(1+i\sqrt{3}\right)}{2}\right]^n$ عددا حقيقيا موجبا تماما.

3) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$. نعتبر النقط A ، B و C التي لاحقاتها على الترتيب: z_A ، z_B و z_C حيث: $z_A = 2-i$ ، $z_B = 2+i$ و $z_C = 1+i\sqrt{3}$.

أ) عيّن z_D لاحقة النقطة D مرجح الجملة المثقلة $\{(A,1);(B,-1);(C,1)\}$.

ب) استنتج أنّ الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع.

جـ) E النقطة من المستوي المركب ذات اللاحقة z_E حيث: $\begin{cases} \arg(z_E - z_A) - \arg(z_E - z_B) = \frac{\pi}{2} \\ \left|\frac{z_E - z_A}{z_E - z_B}\right| = 2 \end{cases}$.

- بيّن أنّ : $z_E = \frac{14}{5} + \frac{3}{5}i$.
- بيّن أنّ النقطة A هي صورة النقطة B بتشابه مباشر يطلب تعيين عناصره المميّزة.

4) M نقطة من المستوي المركب لاحقتها z ، النقطة I منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$.

أ) عيّن z_I لاحقة النقطة I .

ب) α عدد حقيقي، نسمي (Γ) مجموعة النقط M من المستوي المركب التي تُحقّق: $z - z_I = e^{i\alpha}$.

- تحقّق أنّ النقطة E تنتمي إلى المجموعة (Γ).
- عيّن طبيعة المجموعة (Γ) و عناصرها المميّزة عندما يتغيّر α في $\mathbb{R}$.

التمرين الرابع: (06,5 نقطة)

I) g الدالة العددية المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=1+x^2+2\ln x$.

1) ادرس اتجاه تغيّر الدالة g .

2) بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل في المجال $]0,52\,;\,0,53[$ حلاّ وحيدا α .

3) استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

II) f الدالة العددية المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=-x+\dfrac{3+2\ln x}{x}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) احسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{-g(x)}{x^2}$.

ب) شكّل جدول تغيّرات الدالة f .

جـ) تحقّق أنّ : $f(\alpha)=2\left(\dfrac{1}{\alpha}-\alpha\right)$ ثم عيّن حصرا له.

3) أ) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)+x\right]$ ثم فسّر النتيجة هندسيا.

ب) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى مستقيمه المقارب المائل (Δ).

جـ) بيّن أنّ (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي (Δ) يطلب كتابة معادلة ديكارتية له.

4) نقبل أنّ (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتيهما x_0 و x_1 حيث:

$0,22<x_0<0,23$ و $2,11<x_1<2,13$

أنشئ (T) ، (Δ) و (C_f).

5) m وسيط حقيقي . ناقش بيانيا و حسب قيم m، عدد حلول المعادلة : $3+2\ln x-mx=0$.

III) من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $u_n=\int_{e^n}^{e^{n+1}}\left[f(x)+x\right]dx$.

1) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n>0$.

2) أعط تفسيرا هندسيا للعدد u_0 .

3) احسب u_n بدلالة n.

4) نضع: $S_n=u_0+u_1+u_2+\ldots+u_n$. احسب S_n بدلالة n.

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

يحتوي الموضوع الثاني على صفحتين (الصفحة 4 من 5 والصفحة 5 من 5).

التمرين الأوّل: (05 نقاط)

1) الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$، نعتبر النقط A ، B ، C و D حيث:
$A(1;0;3)$ ، $B(1;2;4)$ ، $C(0;0;2)$ و $D(3;4;1)$.

أ) عيّن العددين الحقيقيين α و β حتى يكون الشعاع $\vec{n}(2;\alpha;-\beta)$ ناظميا للمستوي (ABC).

ب) جد معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

2) $z=2-x$ و $y=2z-2x-4$ معادلتان ديكارتيتان للمستويين (P) و (Q) على الترتيب.

أ) بيّن أنّ المستويين (P) و (Q) متعامدان.

ب) أعط تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) تقاطع المستويين (P) و (Q).

جـ) احسب المسافة بين النقطة D و المستقيم (Δ).

3) (S) سطح الكرة التي مركزها D و مماس للمستوي (Q) .

أ) اكتب معادلة ديكارتية لسطح الكرة (S).

ب) جد الطبيعة والعناصر المميّزة لتقاطع (P) و (S).

4) λ عدد حقيقي، G_λ نقطة من الفضاء حيث: $2\overrightarrow{G_\lambda A}-\overrightarrow{G_\lambda B}+e^{\lambda}\overrightarrow{G_\lambda C}=\vec{0}$. (e يرمز إلى أساس اللوغاريتم النبيري).

أ) عيّن (Γ) مجموعة النقط M من الفضاء التي تُحقّق: $(1+e)\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=2\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+e\overrightarrow{MC}\right\|$

ب) H مرجح الجملة $\{(A,2);(\mathrm{B},-1)\}$. اكتب $\overrightarrow{CG_\lambda}$ بدلالة $\overrightarrow{CH}$.

جـ) عيّن مجموعة النقط G_λ لمّا يتغيّر λ في المجموعة $\mathbb{R}$.

د) جد قيمة λ التي تكون من أجلها G_λ منتصف القطعة $[CH]$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

I) 1) حلّ في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^2-2z+2=0$.

2) جد العددين المركبين z_1 و z_2 حيث: $\begin{cases}2z_1-3z_2=5i\sqrt{2}\\ z_1+3z_2=-2i\sqrt{2}\end{cases}$.

II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$. النقط A ، B ، C ، D و H لاحقاتها على الترتيب : $z_A=i\sqrt{2}$ ، $z_B=-i\sqrt{2}$ ، $z_C=1+i$ ، $z_D=1-i$ و $z_H=\dfrac{z_C-z_B}{z_E-z_B}$ حيث E النقطة التي تُحقّق: $\overrightarrow{DE}=2\overrightarrow{DO}$.

1) اكتب z_H على الشكل الأسي و استنتج نوع المثلث BEC .

2) S تحويل نقطي في المستوي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' لاحقتها z' حيث: $z'=z_A z+z_B$.

أ) ما هي طبيعة التحويل S ؟ و ما هي عناصره المميّزة ؟

ب) احسب مساحة الدائرة (γ) التي مركزها C و نصف قطرها CD.

جـ) عيّن (γ') صورة (γ) بالتحويل S و استنتج مساحتها.

3) عيّن (δ) مجموعة النقط M من المستوي (M تختلف عن B و C) ذات اللاحقات z التي يكون من أجلها العدد $\dfrac{z_B-z}{z_C-z}$ حقيقيا سالبا تماما.

التمرين الثالث: (04 نقاط)

1) أ) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n، بواقي القسمة الإقليدية لكل من العددين 3^n و 7^n على 11.

ب) برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، العدد $2\times 2016^{5n+4}+1437^{10n+4}$ مضاعف للعدد 11.

2) نعتبر المعادلة (E) ذات المجهول $(x;y)$: $7x-3y=8$ ، حيث x و y عددان طبيعيان.

أ) حلّ المعادلة (E).

ب) d القاسم المشترك الأكبر للعددين x و y حيث الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (E) .

– ما هي القيم الممكنة للعدد d ؟

– عيّن الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E) من أجل $d=4$.

جـ) جد الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E) التي تحقق: $2016^{7x}+1437^{3y}\equiv 0[11]$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) φ الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $\varphi(x)=\left(x^2-x+1\right)e^{-x+1}-1$.

1) أ) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)$.

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة φ ثم شكّل جدول تغيّراتها .

2) بيّن أنّ المعادلة $\varphi(x)=0$ تقبل في $\mathbb{R}$ ، حلاّ α يختلف عن 1 ثم تحقّق أنّ: $2,79<\alpha<2,80$.

3) استنتج إشارة $\varphi(x)$ على $\mathbb{R}$.

II) f و g الدالتان العدديتان المعرّفتان على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=(2x-1)e^{-x+1}$ و $g(x)=\dfrac{2x-1}{x^2-x+1}$.

(C_f) و (C_g) تمثيلاهما البيانيان في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

ب) ادرس اتجاه تغيّر الدالة f ثم شكّل جدول تغيّراتها .

2) بيّن أنّ للمنحنيين (C_f) و (C_g) مماسا مشتركا (T) في النقطة ذات الفاصلة 1 ثم جد معادلة له.

3) ارسم المماس (T) و المنحنى (C_f).

4) أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f(x)-g(x)=\dfrac{(2x-1)\varphi(x)}{x^2-x+1}$.

ب) ادرس إشارة الفرق $f(x)-g(x)$ على $\mathbb{R}$ ثم استنتج الوضع النسبي للمنحنيين (C_f) و (C_g).

جـ) باستعمال مكاملة بالتجزئة ، احسب بدلالة العدد الحقيقي x : $\int_1^x f(t)\,dt$.

د) احسب مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنيين (C_f) و (C_g) و المستقيمين اللذيْن معادلتيهما:

$x=1$ و $x=2$.

III) 1) احسب $f''(x)$ ، $f^{(3)}(x)$ و $f^{(4)}(x)$. أعط تخمينا لعبارة $f^{(n)}(x)$ حيث n عدد طبيعي غير معدوم.

($f^{(n)}$ الدالة المشتقة من المرتبة n للدالة f).

2) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $f^{(n)}(x)=(-1)^n\left[2x-(2n+1)\right]e^{1-x}$.

3) (u_n) المتتالية العددية المعرّفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، كما يلي: $u_n=f^{(n)}(1)$.

أ) احسب بدلالة العدد الطبيعي غير المعدوم k ، المجموع : u_k+u_{k+1}.

ب) استنتج بدلالة n ، المجموع : $u_1+u_2+...+u_{2n}$.

انتهى الموضوع الثاني

عناصر الإجابة (الموضوع الأوّل)	العلامة مجزأة	العلامة مجموع
التمرين الأوّل: (04,5 نقطة)		04,5
1.أ) $\overrightarrow{AB}(1;-2;1)$ و $\overrightarrow{AC}(-2;-1;1)$ غير مرتبطين خطيا	0,25	
ب) $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ و $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ و $x+3y+5z-4=0$ معادلة للمستوي (ABC).	0,75	
2.أ) $(P): x+3y+z-6=0$ و الشعاعين $\vec{n}$ و $\vec{n}_P$ غير مرتبطين خطيا.	$0,25\times 2$	
ب) $D\in(\Delta)$ و $\vec{u}$ شعاع توجيه له.	$0,50\times 2$	
جـ) $(\lambda\in\mathbb{R})$, $(\Delta)\begin{cases} x=-3\lambda+\frac{1}{2} \\ y=\lambda+2 \\ z=-\frac{1}{2}\end{cases}$.	0,25	
د) $(H\in(\Delta))$ و $\overrightarrow{AH}\cdot\vec{u}=0$ و $d(A;(\Delta))=AH=\frac{\sqrt{14}}{4}$.	0,75	
3. أ) $G(-6;5;-1)$.	0,25	
ب) $(\Gamma): x^2+y^2+z^2+6x-6y-7=0$. $(\Gamma): (x+3)^2+(y-3)^2+z^2=25$. (Γ) سطح كرة مركزها $\Omega(-3;3;0)$ و نصف قطرها 5.	0,25 0,25	
جـ) $d(\Omega;(ABC))=\frac{2}{\sqrt{35}}$ و $\frac{2}{\sqrt{35}}<5$ ، (Γ) يقطع (ABC) وفق دائرة .	0,25	
التمرين الثاني: (04,5 نقطة)		02,75
1.u_1 و u_2 حلا المعادلة $x^2-e^4(1+e^3)x+e^{11}=0$ ، $\Delta=\left[e^4(e^3-1)\right]^2$ $u_1<u_2$ منه $u_1=e^4$ و $u_2=e^7$ و $q=e^3$	0,50	
2.أ) $u_n=e^{3n+1}$.	0,25	
ب) $S_n=\frac{(n+1)(3n+2)}{2}$.	0,50	
3. أ) $2S_n=a_n(3n-4)+14$. تبيان أن: $PGCD(2S_n,a_n)=PGCD(a_n,14)$.	0,50	
ب) القيم الممكنة لـ $PGCD(2S_n,a_n)$ هي 1 ، 2 ، 7 ، 14.	0,25	
جـ) $n=14k+4$ و $k\in\mathbb{N}$.	0,75	

العلامة: مجموع	العلامة: مجزأة	عناصر الإجابة (الموضوع الأوّل)
01,75	**0,50**	.4 $k\in\mathbb{N}$ — n : $3k$ ، $3k+1$ ، $3k+2$ ؛ الباقي : 1 ، 2 ، 4
	0,75	.5 $n=35p$ حيث $p\in\mathbb{N}$
	0,50	.6 $1437^{9n+1}-3\times4^{12n+1}+52\equiv0[7]$.
04,5		**التمرين الثالث: (04,5 نقطة)**
	0,50	1.أ) $z_1=2+i$ و $z_2=2-i$.
	0,50	ب) $z'=1+i\sqrt{3}$ و $z''=1+i\left(\sqrt{3}-2\right)$
	0,25	2.أ) $1+i\sqrt{3}=2e^{i\frac{\pi}{3}}$.
	0,50	ب) $\theta=\frac{\pi}{12}$.
	0,25	جـ) $\left[\frac{z_0\left(1+i\sqrt{3}\right)}{2}\right]^n=\cos\left(\frac{5n\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{5n\pi}{12}\right)$.
	0,50	د) $n=24p$ و $p\in\mathbb{N}$.
	0,25	3.أ) $z_D=1+i\left(\sqrt{3}-2\right)$
	0,25	ب) الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع.
	0,50 **0,25**	جـ) – $z_E=\frac{14}{5}+\frac{3}{5}i$. – التشابه المباشر مركزه E نسبته 2 و $\frac{\pi}{2}$ زاوية له .
	0,25	4.أ) $z_I=2$.
	0,25	ب) $\left\|z_E-z_I\right\|=1$.
	0,25	(Γ) هي الدائرة التي مركزها I و نصف قطرها 1.
01		**التمرين الرابع: (06,50 نقطة)**
	0,50	I) .1 $g'(x)=2x+\frac{2}{x}$ ، g متزايدة تماما على المجال.
	0,50	.2 المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α يُحقّق : $0,52<\alpha<0,53$. $g(0,52)\approx-0,04$ و $g(0,53)\approx0,01$

عناصر الإجابة (الموضوع الأوّل)	العلامة مجزأة	العلامة مجموع
.3 $\begin{array}{c\|ccccc} x & 0 & & \alpha & & +\infty \\ \hline g(x) & & - & 0 & + & \end{array}$	**0,25**	**05,50**
II) .1 $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.	**0,25×2**	
.2 أ) $f'(x) = \dfrac{-g(x)}{x^2}$.	**0,50**	
ب) جدول تغيرات الدالة f .	**0,25**	
جـ) $f(\alpha) = 2\left(\dfrac{1}{\alpha} - \alpha\right)$ و $2{,}71 < f(\alpha) < 2{,}81$.	**0,25×2**	
.3 أ) $\lim\limits_{x \to +\infty}[f(x) + x] = 0$ ، (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا $(\Delta): y = -x$.	**0,25×2**	
ب) وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ).	**0,25**	
جـ) $(T): y = -x + 2\sqrt{e}$.	**0,50**	
.4 إنشاء (T) و (Δ)و (C_f).	**0,50**	
.5 المناقشة بيانيا: – إذا كان $m \leq 0$ فإنّ المعادلة تقبل حلا وحيدا. – إذا كان $0 < m < 2\sqrt{e}$ فإنّ المعادلة تقبل حلّين متمايزين. – إذا كان $m = 2\sqrt{e}$ فإنّ المعادلة تقبل حلا مضاعفا. – إذا كان $m > 2\sqrt{e}$ فإنّ المعادلة لا تقبل حلولا.	**0,50**	
III) .1 الدالة $h: x \mapsto f(x) + x$ موجبة تماما على المجال $[e^n; e^{n+1}]$ من أجل كل عدد طبيعي n.	**0,25**	
.2 u_0 يشير إلى مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) و المستقيمين اللذين معادلتيهما: $x = 1$ و $x = e$.	**0,25**	
.3 $u_n = 2n + 4$.	**0,50**	
.4 $S_n = n^2 + 5n + 4$.	**0,25**	

الإجابة النموذجية لموضوع امتحان البكالوريا دورة: **2016**

اختبار مادة: **الرياضيات** الشعبة: رياضيات المدة : **04** سا و **30** د

عناصر الإجابة (الموضوع الثاني)	العلامة مجزأة	العلامة مجموع
<u>التمرين الأوّل:</u> (05 نقاط)		
1) أ. $\overrightarrow{AB}(0;2;1)$ و $\overrightarrow{AC}(-1;0;-1)$: $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0\end{cases}$ ومنه $\alpha=1$ و $\beta=2$.	**0,50**	
ب . $(ABC):2x+y-2z+4=0$.	**0,50**	
2) أ . $\vec{n}\perp\vec{n}_{(P)}$ ، $\vec{n}\cdot\vec{n}_{(P)}=0$.	**0,25**	
ب . $\begin{cases}x=t\\ y=-4t\ ;\ (t\in\mathbb{R})\\ z=2-t\end{cases}$ تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ).	**0,50**	
جـ . المسافة بين النقطة D و المستقيم (Δ) . لدينا: $d\left(D;(Q)\right)=4$ و $d\left(D;(P)\right)=\sqrt{2}$ ومنه $d\left((\Delta);D\right)=\sqrt{4^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}=3\sqrt{2}$	**0,75**	
3) أ. معادلة ديكارتية لسطح الكرة (S): $(x-3)^2+(y-4)^2+(z-1)^2=4^2$.	**0,25**	
ب . إيجاد الطبيعة والخصائص المميزة لتقاطع المستوي (Q) وسطح الكرة (S) $d\left(D;(P)\right)=\sqrt{2}<4$ إذن (S) و (P) يتقاطعان وفق دائرة مركزها نقطة تقاطع المستقيم العمودي على (P) والمار من D إذن إحداثياتها تحقق $(3+t)+0(4)+(1+t)-2=0$ أي $t=-1$ وبالتالي $\omega(2;4;0)$ نصف قطرها : r يحقق $r=\sqrt{4^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}$ أي $r=\sqrt{14}$.	**0,25** **0,50** **0,25**	**05**
4) أ . المجموعة (Γ): $MG_0=MG_1$ ومنه (Γ) هي المستوي المحوري للقطعة $[G_0G_1]$	**0,25**	
ب. كتابة $\overrightarrow{CG_\lambda}$ بدلالة $\overrightarrow{CH}$: $\overrightarrow{CG_\lambda}=\dfrac{1}{1+e^{\lambda}}\overrightarrow{CH}$.	**0,25**	
جـ . مجموعة النقط G_λ لما $\lambda\in\mathbb{R}$: لدينا $\lambda\in\mathbb{R}$ إذن $\dfrac{1}{1+e^{\lambda}}\in]0;1[$. مجموعة النقط هي قطعة المستقيم $[CH]$ باستثناء طرفيها C و H	**0,25** **0,25**	
د. G_λ منتصف القطعة المستقيمة $[CH]$ معناه $\overrightarrow{CG_\lambda}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{CH}$ أي $e^{\lambda}=1$ فيكون بذلك $\lambda=0$.	**0,25**	
<u>التمرين الثاني</u> : (04 نقاط)		
I) 1) حل المعادلة $z^2-2z+2=0$: $S=\{1-i;1+i\}$	**0,50**	
2) إيجاد z_1 و z_2 : $z_1=i\sqrt{2}$ و $z_2=-i\sqrt{2}$	**0,50**	**01,50**
II) 1) كتابة z_H على الشكل الأسي و استنتاج نوع المثلث BEC . $z_E=-1+i$ ، $z_H=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1-i)=1.e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$ ، المثلث BEC متقايس الساقين $BC=BE$	**0,25** **0,25**	

عناصر الإجابة (الموضوع الثاني)	العلامة مجزأة	العلامة مجموع
2) أ. $z' = z_A z + z_B$ ، $\lvert z_A \rvert = \sqrt{2}$ إذن S تشابه مباشر نسبته $\sqrt{2}$ وقيس زاويته $\frac{\pi}{2}$ ومركزه النقطة الصامدة ذات اللاحقة $\frac{z_B}{1-z_A} = \frac{2}{3} - i\frac{\sqrt{2}}{3}$	0,50 0,50	02,50
ب. $CD = \lvert z_D - z_C \rvert = \lvert -2i \rvert = 2$ إذن مساحة الدائرة $4\pi\, ua$	0,25	
جـ. (γ') هي الدائرة ذات المركز $C'(-\sqrt{2};0)$ صورة C ونصف قطرها $2\sqrt{2}$ مساحتها $(4\pi)(\sqrt{2})^2 = 8\pi\, ua$	0,50 0,25	
3) مجموعة النقط (δ) حيث $\frac{z_B - z}{z_C - z}$ حقيقيا سالبا تماما $\frac{z_B - z}{z_C - z}$ حقيقيا سالبا تماما معناه قيس الزاوية $(\overrightarrow{MC};\overrightarrow{MB}) = \pi + 2k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z}$ إذن (δ) القطعة المستقيمة $[CB]$ باستثناء طرفيها B و C.	0,50	
<u>التمرين الثالث:</u> (04 نقاط)		04
1) أ. دراسة بواقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 11 : $r \in \{1;3;4;5;9\}$	0,50	
دراسة بواقي القسمة الإقليدية للعدد 7^n على 11 : $r' \in \{1;2;3;4;5;6;7;8;9;10\}$	0,75	
ب. برهان أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$ فإنّ: $2 \times 2016^{5n+4} + 1437^{10n+4}$ تقبل القسمة على العدد 11. لدينا $2016 \equiv 3[11]$ إذن $2016^{5n+4} \equiv 3^{5n+4}[11]$ و منه: $2 \times 2016^{5n+4} \equiv 8[11] .....(1)$ لدينا $1437 \equiv 7[11]$ و منه $1437^{10n+4} \equiv 7^{10n+4}[11]$ أي: $1437^{10n+4} \equiv 3[11] .....(2)$ من (1) و (2) نجد : $2 \times 2016^{5n+4} + 1437^{10n+4} \equiv 0[11]$.	0,25 0,25 0,25	
2) أ. مجموعة حلول المعادلة (E): $(x;y) = (3k+2;7k+2)$, $k \in \mathbb{N}$	0,50	
ب. − القيم الممكنة للعدد d: $d \in \{1;2;4;8\}$. − تعيين كل الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E) من أجل $d = 4$. $(x;y) = (24k'+20;56k'+44)$, $k' \in \mathbb{N}$.	0,50 0,50	
جـ. $(x;y) = (30k+17;70k+37)$, $k \in \mathbb{N}$.	0,50	
<u>التمرين الرابع:</u> (07 نقاط)		01
I) أ. $\varphi(x) = e\left(\frac{x^2}{e^x} - \frac{x}{e^x} + \frac{1}{e^x}\right) - 1$ إذن $\lim_{x \to -\infty} \varphi(x) = +\infty$ ، $\lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = \mathbf{-1}$.	$0,25 \times 2$	
ب . اتجاه التغيّر: $\varphi'(x) = -(x-1)(x-2)e^{-x+1}$. الدالة φ متناقصة تماما على كل من المجالين $]-\infty;1]$ و $[2;+\infty[$ الدالة φ متزايدة تماما على المجال $[1;2]$.	0,25 0,25	

عناصر الإجابة (الموضوع الثاني)	العلامة مجزأة	العلامة مجموع
جدول تغيرات الدالة φ .	$0,25$	06
2) بيّن أنّ المعادلة $\varphi(x)=0$ تقبل في $\mathbb{R}$ حلا α يختلف عن 1	$0,50$	
3) إشارة $\varphi(x)$.	$0,25$	
II) 1) أ) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$	$0,25\times 2$	
ب) $f'(x)=(3-2x)e^{-x+1}$. إشارة $f'(x)$: $-\infty \quad + \quad \frac{3}{2}\ (0) \quad - \quad +\infty$ الدالة f متزايدة تماما على $\left]-\infty;\frac{3}{2}\right]$ و متناقصة تماما على $\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$. جدول التغيّرات	$0,25$ $0,25$ $0,25$	
2) المنحنيين (C_f) و (C_g) لهما نفس المماس (T) أي : $\begin{cases} f(1)=g(1)=1 \\ f'(1)=g'(1)=1 \end{cases}$ و منه المنحنيين (C_f) و (C_g) لهما نفس المماس (T) عند النقطة ذات الفاصلة 1 $(T): y=x$	$0,25$ $0,25$	
3) رسم (T) و (C_f)	$0,50$	
4) أ) تبيان أنّ: $f(x)-g(x)=\dfrac{(2x-1)\varphi(x)}{x^2-x+1}$	$0,25$	
ب. دراسة إشارة الفرق $f(x)-g(x)$: $-\infty \quad - \quad \frac{1}{2}\ (0) \quad + \quad 1\ (0) \quad + \quad \alpha\ (0) \quad - \quad +\infty$ – الوضع النسبي لـ (C_f) و (C_g).	$0,25$ $0,25$	
جـ. الدالة: $\int_1^x f(t)\,dt=-(2x+1)e^{-x+1}+3$.	$0,25$	
د. المساحة : $\mathrm{A}=\int_1^2 \left(f(x)-g(x)\right)dx=3-\dfrac{5}{e}-\ln 3$.	$0,25$	
III) 1) $f''(x)=(2x-5)e^{-x+1}$ و $f'''(x)=-(2x-7)e^{-x+1}$ ، $f^{(4)}(x)=(2x-9)e^{-x+1}$	$0,25$	
– التخمين: $f^{n}(x)=(-1)^n\left[2x-(2n+1)\right]e^{1-x}$	$0,25$	
2) البرهان بالتراجع أنّ: من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$، $f^{n}(x)=(-1)^n\left[2x-(2n+1)\right]e^{1-x}$	$0,50$	
3) أ. حساب : $u_{k+1}+u_k=2(-1)^k$	$0,25$	
ب. $u_1+u_2+\cdots+u_{2n}=(u_1+u_2)+(u_3+u_4)+\cdots+(u_{2n-1}+u_{2n})=-2n$	$0,25$	

ملاحظة: تقبل جميع الطرق الممكنة للحل.