

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

### الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .  
 نعتبر النقطتين  $A(-1;1;-2)$  و  $B(1;-3;-4)$  والمستقيم  $(\Delta)$  ذا التمثيل الوسيط  $t \in \mathbb{R}$  ;  $y = -t + 2$  ;  $x = t - 2$  ;  $z = 2t - 4$   
 وليكن  $(\Delta')$  المستقيم الذي يشمل النقطة  $B$  و  $\vec{u}(-1;2;1)$  شعاع توجيه له .

(1) بين أن المستقيمين  $(\Delta)$  و  $(\Delta')$  يتقاطعان في نقطة يطلب تعيين إحداثياتها.

(2) ليكن  $(P)$  المستوي المعين بالمستقيمين  $(\Delta)$  و  $(\Delta')$  .

اكتب تمثيلا وسيطيا للمستوي  $(P)$  ، ثم استنتج معادلة ديكارتية له .

(3) نسمي  $(S)$  مجموعة النقط  $M(x; y; z)$  من الفضاء التي تحقق :  $AM^2 + BM^2 = 20$  .

بين أن  $(S)$  سطح كرة مركزها منتصف القطعة  $[AB]$  ونصف قطرها 2 .

(4) حدّد الوضع النسبي للمستوي  $(P)$  و سطح الكرة  $(S)$  .

التمرين الثاني: (04 نقاط)

(1) نعتبر المعادلة :  $(E) \dots\dots\dots 104x - 20y = 272$  ذات المجهول  $(x; y)$  حيث  $x$  و  $y$  عدنان صحيحان .

(أ) احسب القاسم المشترك الأكبر للعددين 20 و 104 ثم بين أن المعادلة  $(E)$  تقبل حولا.

(ب) بين أنه إذا كانت الثنائية  $(x; y)$  حلا للمعادلة  $(E)$  فإن  $x \equiv 3[5]$  ، ثم استنتج حلول المعادلة  $(E)$  .

(2)  $\lambda$  عدد طبيعي يكتب  $1\alpha\alpha\beta 01$  في نظام التعداد الذي أساسه 4 ، ويكتب  $1\alpha\beta 01$  في نظام التعداد الذي

أساسه 6 حيث  $\alpha$  و  $\beta$  عدنان طبيعيين .

عين  $\alpha$  و  $\beta$  ، ثم اكتب  $\lambda$  في النظام العشري .

(3) تحقق أن كلا من 2017 و 1009 عدد أولي، ثم عين الثنائيات  $(a; b)$  من الأعداد الطبيعية التي تحقق:

$$2m - d = 2017 \quad \text{حيث} \quad d = \text{PGCD}(a; b) , m = \text{PPCM}(a; b)$$

التمرين الثالث: (05 نقاط)

- 1) حل في مجموعة الأعداد المركبة  $\mathbb{C}$  ، المعادلة ذات المجهول  $z$  :  $(z-2+2i)(z^2-2\sqrt{2}z+8)=0$  .  
 2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{u}, \vec{v})$  ، نعتبر النقط  $A$  ،  $B$  و  $C$  التي لاحقاتها  $z_A = \sqrt{2} + i\sqrt{6}$  ،  $z_B = \bar{z}_A$  و  $z_C = 2(1-i)$  .  
 أ) اكتب  $z_A$  ،  $z_B$  و  $z_C$  على الشكل الأسّي ثم استنتج أن النقط  $A$  ،  $B$  و  $C$  تنتمي إلى دائرة  $(\Omega)$  يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

ب) عيّن قيم العدد الطبيعي  $n$  التي من أجلها يكون العدد المركب  $\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n$  تخيليا صرفا .

- ج) نسمّي  $(\Gamma)$  مجموعة النقط  $M$  من المستوي ذات اللاحقة  $z$  حيث :  $z = z_C - k\left(\frac{z_A}{z_B}\right)$  مع  $k$  يمسخ  $\mathbb{R}_+$  تحقق أنّ النقطة  $C$  تنتمي إلى  $(\Gamma)$  ، ثم عيّن وأنشئ  $(\Gamma)$  .  
 3) الدوران الذي مركزه النقطة  $O$  وزاويته  $\frac{2\pi}{3}$  ،  $h$  التحاكي الذي مركزه النقطة  $O$  ونسبته  $-2$  .

عيّن طبيعة التحويل  $h \circ r$  وعناصره المميّزة ، ثم استنتج صورة الدائرة  $(\Omega)$  بالتحويل  $h \circ r$  .

التمرين الرابع: (07 نقاط)

نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  ب :  $f(x) = (-x^3 + 2x^2)e^{-x+1}$  .

$(C_f)$  المنحني الممثل للدالة  $f$  في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  .

1-أ) احسب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  ، استنتج وجود مستقيم مقارب للمنحني  $(C_f)$  يطلب تعيين معادلة له.

ب) بيّن أنّ : من أجل كل عدد حقيقي  $x$  ،  $f'(x) = x(x^2 - 5x + 4)e^{-x+1}$  ،

ثم استنتج اتجاه تغيّر الدالة  $f$  وشكل جدول تغيّراتها.

2) اكتب معادلة  $(T)$  مماس المنحني  $(C_f)$  في النقطة ذات الفاصلة 2 .

3)  $h$  الدالة المعرفة على المجال  $[0; +\infty[$  كما يلي :  $h(x) = x^2e^{-x+2} - 4$  .

ادرس اتجاه تغيّر الدالة  $h$  ثم استنتج إشارة  $h(x)$  حدّد عندئذ وضعية المنحني  $(C_f)$  بالنسبة إلى  $(T)$  على المجال  $[0; +\infty[$  .

4) ارسم المماس  $(T)$  والمنحني  $(C_f)$  على المجال  $[0; +\infty[$  .

5) نعتبر  $m$  وسيط حقيقي والمعادلة ذات المجهول الحقيقي  $x$  الموجب :  $f(x) = m(x-2) \dots (E)$  ناقش بيانيا حسب قيم  $m$  عدد حلول المعادلة  $(E)$  .

6)  $g$  الدالة المعرفة على المجال  $]0; +\infty[$  ب :  $g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$  .

اعتمادا على السؤال رقم (1)، شكل جدول تغيّرات الدالة  $g$  .

انتهى الموضوع الأول

## الموضوع الثاني

### التمرين الأول: (04 نقاط)

نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة على  $\mathbb{N}$  بعدها الأول  $u_0 = 1$

ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_{n+1} = 7u_n + 8$  .

(1) برهن بالتراجع أن: من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $3u_n = 7^{n+1} - 4$  .

(2) نضع من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $S_n = 1 + 7 + 7^2 + \dots + 7^n$  و  $S'_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$  .

(أ) احسب بدلالة  $n$  المجموع  $S_n$  ثم جد علاقة بين  $S_n$  و  $S'_n$  .

(ب) استنتج أن: من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $18 \times S'_n = 7^{n+2} - 24n - 31$  .

(3) (أ) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي  $n$  بواقي قسمة العدد  $7^n$  على 5 .

(ب) عيّن قيم  $n$  الطبيعية حتى يكون  $S'_n$  قابلا للقسمة على 5 .

### التمرين الثاني: (04 نقاط)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  ،  $(P)$  مستو تمثيله الوسيطى:  $\begin{cases} x = -t - 2\lambda + 2 \\ y = 3t + 4\lambda - 3 \\ z = 3t + 4\lambda - 1 \end{cases}$  حيث  $t$  و  $\lambda$  عدنان حقيقيان .

(1) عيّن معادلة ديكرتية للمستوي  $(P)$  .

(2) ليكن  $\alpha$  عددا حقيقيا من المجال  $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$  ، ولتكن  $(E_\alpha)$  مجموعة النقط  $M(x; y; z)$  من الفضاء حيث

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x \cos \alpha - 2y \sin \alpha - z - \frac{3}{4} = 0$$

(أ) بيّن أن: من أجل كل  $\alpha$  من المجال السابق ،  $(E_\alpha)$  هي سطح كرة يطلب تعيين إحداثيات مركزها  $\omega_\alpha$  بدلالة  $\alpha$  ونصف قطرها  $R$  .

(ب) ادرس حسب قيم العدد الحقيقي  $\alpha$  الوضع النسبي للمستوي  $(P)$  و سطح الكرة  $(E_\alpha)$  .

(3) في الحالة التي يكون فيها المستوي  $(P)$  مماسا لسطح الكرة  $(E_\alpha)$

عيّن تمثيلا وسيطيا للمستقيم  $(D)$  الذي يشمل النقطة  $\omega_\alpha$  والعمودي على المستوي  $(P)$

واستنتج إحداثيات  $I$  نقطة تماس  $(E_\alpha)$  مع المستوي  $(P)$  .

### التمرين الثالث: (05 نقاط)

(I) اكتب العدد  $\left(\frac{5}{2} + i\right)^2$  على الشكل الجبري ثم استنتج الجذرين التربيعيين للعدد المركب  $\frac{21}{4} + 5i$

(II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{u}, \vec{v})$  ، نعتبر النقط  $A, B, C$  و  $I$  ذات

$$\text{اللواحق : } z_A = \frac{3}{2} + \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}, \quad z_B = -\frac{3}{2}i, \quad z_C = -\bar{z}_A, \quad z_I = i$$

- (1) اكتب  $z_A$  و  $z_C$  على الشكل الجبري .
- (2) اكتب العدد المركب  $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$  على الشكل الأسّي مستنتجا طبيعة المثلث  $ABC$  .
- (3) ليكن  $S$  التشابه المباشر الذي مركزه  $B$  ويحول  $A$  إلى  $I$  .  
 (أ) اكتب العبارة المركبة للتشابه المباشر  $S$  ثم عيّن نسبته وزاويته.  
 (ب) نعرف من أجل كل عدد طبيعي  $n$  حيث  $n \geq 2$  التحويل النقطي  $T_n$  كما يلي:  $T_n = \underbrace{S \circ S \circ \dots \circ S}_{n \text{ مرة}}$   
 عيّن قيم  $n$  حتى يكون  $T_n$  تحاكيا ، عين عندئذ عناصره المميزة.

**التمرين الرابع: (07 نقاط)**

- (I) نعتبر الدالة العددية  $g$  المعرفة على المجال  $]0; +\infty[$  كما يلي:  $g(x) = \frac{1}{x} - \ln x$  .
- (1) ادرس اتجاه تغير الدالة  $g$  .
- (2) بيّن أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  من المجال  $]1,76; 1,77[$  ثم استنتج إشارة  $g(x)$  على  $]0; +\infty[$  .
- (II) نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة على المجال  $]0; +\infty[$  كما يلي :  

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x+1}{x - \ln x} ; x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$
- ( $C_f$ ) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  .
- (1) أثبت أن الدالة  $f$  مستمرة عند العدد 0 على اليمين ،  
 ثم احسب  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}$  وفسّر النتيجة بيانيا.
- (2) بيّن أن: من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $]0; +\infty[$  ،  $f'(x) = \frac{g(x)}{(x - \ln x)^2}$  ،
- (3) احسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  وفسّر ذلك بيانيا ثم شكل جدول تغيرات الدالة  $f$  .
- (4) لتكن الدالة  $h$  المعرفة على  $]0; +\infty[$  ب:  $h(x) = x - \ln x$   
 (أ) بيّن أن: من أجل كل عدد حقيقي  $x$  موجب تماما ،  $h(x) > 0$  ،  
 واستنتج وضعية  $(C_f)$  بالنسبة إلى المستقيم  $(\Delta)$  ذي المعادلة  $y=1$  .  
 (ب) ارسم  $(C_f)$  . ( نأخذ  $f(\alpha) \approx 2,31$  )
- (5) لتكن الدالة  $F$  المعرفة على المجال  $]0; +\infty[$  كما يلي  $F(x) = \int_1^x f(t) dt$  .
- بيّن أن: من أجل كل عدد حقيقي  $x$  حيث  $x \geq 1$  ،  $\frac{1}{x} + 1 \leq f(x) \leq f(\alpha)$  ،
- اعط تفسيراً هندسياً للعدد  $F(e)$  ثم استنتج حصراً له.

انتهى الموضوع الثاني