الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي

دورة: 2018

الشعبة: تقني رياضي

اختبار في مادة: الرياضيات

المدة: 04 سا و 30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

يحتوي الموضوع الأول على (03) صفحات (من الصفحة 1 من 5 إلى الصفحة 3 من 5)

التمرين الأول: (04 نقاط)

f الدالة العددية المعرّفة والمتزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$ بـ $f(x)=\dfrac{2x}{e.x+1}$ (e أساس اللوغاريتم النيبيري)

و (u_n) المتتالية العددية المعرفة بحدها الأول $u_0=\dfrac{5}{4e}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=f(u_n)$

1) أ) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n>\dfrac{1}{e}$.

ب) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}-u_n=\dfrac{e.u_n(\frac{1}{e}-u_n)}{e.u_n+1}$ ،

ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) و برّر أنّها متقاربة.

2) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي: $v_n=\dfrac{e.u_n}{e.u_n-1}$

أثبت أنّ (v_n) متتالية هندسية أساسها 2 ، يطلب تعيين حدها الأول v_0 و عبارة v_n بدلالة n.

3) أ) تحقق أنّه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $v_n=1+\dfrac{1}{e.u_n-1}$ و استنتج عبارة u_n بدلالة n ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

ب) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n=v_0+v_1+.......+v_n$.

4) أ) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 7 .

ب) عيّن قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها S_n يقبل القسمة على 7 .

التمرين الثاني: (04 نقاط)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(o;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. نعتبر النقطتين $A\left(0;0;2\right)$ ، $B\left(0;3;-1\right)$

والمستوي (p) المعرف بالتمثيل الوسيطي: $\begin{cases} x=t+m \\ y=4t-2m+1 \\ z=t-2m-2 \end{cases}$ حيث m و t عددان حقيقيان.

1) اكتب معادلة ديكارتية للمستوي (Q) الذي يشمل النقطة A و $\vec{n}\left(2;2;-1\right)$ شعاع ناظمي له.

2) اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة A و يعامد المستوي (Q).

3) أ) تحقق أنّ: $2x-y+2z+5=0$ معادلة ديكارتية للمستوي (p).

ب) بيّن أنّ المستوي (p) يشمل النقطة B و يعامد المستوي (Q).

4) لتكن M نقطة احداثياتها $(2t\ ;2t\ ;\ -t+2)$ حيث t عدد حقيقي.

أ) عين قيم t بحيث تكون $d(M;(P))=d(M;(Q))$ (ترمز d الى المسافة بين نقطة و مستوي).

ب) استنتج احداثيات C مركز سطح الكرة (S) التي تمس كل من المستويين (Q) و (p) في النقطتين A و B على الترتيب و احسب نصف قطرها.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $z^2-2\sqrt{2}z+4=0$.

II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{u},\vec{v})$.

لتكن النقطتين A و B لاحقتاهما $z_A=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ و $z_B=\overline{z_A}$ ($\overline{z_A}$ يرمز الى مرافق z_A)

1) اكتب على الشكل الأسّي كل من العددين المركبين z_A و $\frac{1}{z_B}$ ، ثم بيّن أنّ العدد $\left(\frac{2}{z_B}\right)^{2018}$ تخيلي صرف .

2) لتكن النقطة C صورة B بالتحاكي h الذي مركزه ω ذات اللاحقة $z_\omega=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ونسبته (-3).

بيّن أنّ لاحقة النقطة C هي $z_C=-\sqrt{2}+i3\sqrt{2}$

3) احسب z_D لاحقة النقطة D صورة B بالدوران r الذي مركزه O و زاويته $(-\frac{\pi}{2})$.

4) أ) بيّن أنّ $\frac{z_C-z_A}{z_D-z_A}=-i$ ثم استنتج طبيعة المثلث ACD .

ب) اوجد لاحقة النقطة E بحيث يكون الرباعي $ACED$ مربعا.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

f الدالة العددية المعرفة على المجال $]-\infty;1[$ بـ: $f(x)=\frac{x}{x-1}e^{-x}$.

و $\left(C_f\right)$ تمثيلها البياني في المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) احسب $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x)$ ثم فسر النتيجة بيانيا و احسب $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

2) بيّن أنّه من أجل كل x من $]-\infty;1[$: $f'(x)=\dfrac{(-x^2+x-1)e^{-x}}{(x-1)^2}$ و ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها.

3) أ) اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى $\left(C_f\right)$عند النقطة ذات الفاصلة صفر.

ب) h دالة عددية معرفة على المجال $]-\infty;1[$ بـ: $h(x)=e^{-x}+x-1$.

ادرس اتجاه تغير الدالة h ثم استنتج أنه من أجل كل x من $]-\infty;1[$: $h(x)\geq 0$

4) بيّن أنّه من أجل كل x من $]-\infty;1[$: $f(x)+x=\dfrac{x\ h(x)}{x-1}$ ثم استنتج الوضع النسبي للمنحنى $\left(C_f\right)$ والمماس (T). فسر النتيجة بيانيا.

5) أكتب معادلة المستقيم (Δ) الذي يشمل مبدأ المعلم O و النقطة $A\left(-2;\dfrac{2}{3}e^2\right)$ ثم ارسم المستقيمين (T)، (Δ) و المنحنى $\left(C_f\right)$ على المجال $[-2;1[$.

6) أ) بيّن أنّه من أجل كل x من $[-1;0]$: $\dfrac{x}{x-1}\leq f(x)<e^{-x}$.

ب) تحقق أنه من أجل كل x من $[-1;0]$: $\dfrac{x}{x-1}=1+\dfrac{1}{x-1}$ ثم بيّن أنّ : $1-\ln 2\leq \int_{-1}^{0} f(x)dx<e-1$

7) m وسيط حقيقي ، ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة : $f(x)=mx$ ، حيث $x\in[-2;1[$.

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

يحتوي الموضوع الثاني على (02) صفحات (من الصفحة 4 من 5 إلى الصفحة 5 من 5)

التمرين الأوّل: (04 نقاط)

لتكن (u_n) متتالية عددية معرّفة على $\mathbb{N}$ بحدها العام كما يلي $u_n = 2(3)^n$.

و (v_n) متتالية عددية معرّفة بحدها الأول $v_0 = 4$ و من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $v_{n+1} = 5v_n + u_n$.

1) نضع من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $w_n = \frac{v_n}{u_n} + \frac{1}{2}$.

- اثبت أنّ (w_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{5}{3}$ ، يطلب تعيين حدّها الأوّل.

2) اكتب عبارة الحد العام w_n بدلالة n ثم استنتج أنّه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $v_n = 5^{n+1} - 3^n$.

3) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الاقليدية للعددين 3^n و 5^n على 8.

4) عيّن حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية للعدد v_n على 8.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

كيس به 7 كريات متماثلة، لا نفرّق بينها باللمس ، منها 3 بيضاء و 4 خضراء.

نسحب عشوائيا و في آن واحد كريتين من الكيس.

I) 1) احسب احتمال الحادثة A : " سحب كريتين مختلفتين في اللون ".

2) احسب احتمال الحادثة B : " سحب كريتين من نفس اللون ".

II) نقترح اللعبة التالية : للمشاركة يدفع اللاعب $\alpha(DA)$ ، (حيث α عدد طبيعي معطى و DA تعني دينار جزائري) .
فإذا سحب كريتين بيضاوين يتحصل على $100DA$ ، و إذا سحب كريتين مختلفتين في اللون يتحصل على $50DA$ ،
وإذا سحب كريتين خضراوين يخسر ما دفعه. وليكن X المتغيّر العشوائي الذي يمثل ربح أو خسارة اللاعب بدلالة α.

1) برّر أنّ قيم المتغير العشوائي هي $\{100-\alpha, 50-\alpha, -\alpha\}$ ثم عرّف قانون احتماله.

2) بيّن أنّ الأمل الرياضياتي للمتغيّر العشوائي X بدلالة α هو : $E(X) = -\alpha + \frac{300}{7}$.

ثم اوجد أكبر قيمة ممكنة لـ α حتى تكون اللعبة في صالح اللاعب.

التمرين الثالث : (05 نقاط)

I) أ) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية : $4z^2 - 2z + 1 = 0$ ... (E)

ب) اكتب العددان $\frac{1}{z_1}$ و $\frac{1}{z_2}$ على الشكل الأسي حيث z_1 و z_2 حلا المعادلة (E).

II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. نعتبر النقط A ، B و C لاحقاتها
$z_A = 4$ ، $z_B = 1 + i\sqrt{3}$ و $z_C = 1 - i\sqrt{3}$.

1) أ) احسب $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ ثم حدد طبيعة المثلث ABC .

ب) استنتج أن B هي صورة C بدوران مركزه A يطلب تعيين زاويته .

2) اوجد لاحقة النقطة D صورة النقطة A بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{CB}$ و استنتج بدقة طبيعة الرباعي $ACBD$.

3) حدّد طبيعة (γ) مجموعة النقط M من المستوي المركب ذات اللاحقة z التي تُحقق ما يلي:
$\left|iz+\sqrt{3}-i\right|=\left|z-1+i\sqrt{3}\right|$.

4) بيّن أنّ النقطة G مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC تنتمي إلى (γ).

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) نعتبر الدالة العددية g المعرّفة على المجال $]0;1[$ بـ : $g(x)=2-x+\ln x$.

1) أ) ادرس اتجاه تغيّر الدالة g على المجال $]0;1[$.

ب) بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $0{,}15<\alpha<0{,}16$.

2) استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$ على المجال $]0;1[$.

II) لتكن f الدالة العددية المعرّفة على المجال $]1;+\infty[$ بـ : $f(x)=\frac{1-2x+\ln x}{x-1}$.

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) احسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ (يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل $f(x)=\frac{1-2x}{x-1}+\frac{\ln x}{x-1}$) ،
ثم فسّر النتيجتين بيانيا.

2) أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1;+\infty[$: $f'(x)=\frac{g\left(\frac{1}{x}\right)}{(x-1)^2}$.

ب) بيّن أن f متزايدة تماما على $\left]1;\frac{1}{\alpha}\right]$ و متناقصة تماما على $\left[\frac{1}{\alpha};+\infty\right[$، ثم شكّل جدول تغيّراتها .

3) ادرس الوضع النسبي لـ (C_f) و المستقيم (Δ) ذي معادلة $y=-2$.

4) ارسم المستقيمين المقاربين و المنحنى (C_f) (يعطى $f\left(\frac{1}{\alpha}\right)\simeq-1{,}8$).

5) عيّن بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m حتى تقبل المعادلة $|f(x)|=m$ حلّين متمايزين.

انتهى الموضوع الثاني