



على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:
الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = 13$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5}$

(1) أ) برهن بالتراجع أنه: من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n > 1$.
ب) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) واستنتج أنها متقاربة.

(2) (v_n) المتتالية العددية المعرفة على \mathbb{N} بـ: $v_n = \ln(u_n - 1)$.
أثبت أن المتتالية (v_n) حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

(3) اكتب v_n بدلالة n ثم بين أنه: من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = 1 + \frac{12}{5^n}$ واحسب عندئذ $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(4) بين أنه: من أجل كل عدد طبيعي n ، $(u_0 - 1)(u_1 - 1) \times \dots \times (u_n - 1) = \left(\frac{12}{5^2}\right)^{n+1}$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

يحتوي كيس على خمس كريات حمراء منها أربع كريات تحمل الرقم 1 وكرية واحدة تحمل الرقم 2 وسبع كريات خضراء منها أربع كريات تحمل الرقم 1 وثلاث كريات تحمل الرقم 2 (كل الكريات متماثلة لا نفرق بينها عند اللمس). نسحب عشوائيا كريتين من الكيس في آن واحد ونعتبر الحادثتين A و B حيث: A : " سحب كريتين من نفس اللون " ، B : " سحب كريتين تحملان نفس الرقم " .

(1) بين أن احتمال الحادثة A هو $P(A) = \frac{31}{66}$ واحسب احتمال الحادثة B .

(2) علما أن الكريتين المسحوبتين من نفس اللون، ما احتمال أن تحملان نفس الرقم؟

(3) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكريات الحمراء المتبقية في الكيس.

عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X واحسب أمله الرياضي $E(X)$

التمرين الثالث: (05 نقاط)

I. حل في مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} المعادلة ذات المجهول z التالية: $(z-i)(z^2 - 4z + 5) = 0$.

II. نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، النقط A, B

و C التي لاحقاتها $i, 2-i$ و $2+i$ على الترتيب.

(1) اكتب العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_C - z_B}$ على الشكل الأسّي، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

(2) من أجل كل عدد مركب z يختلف عن $2+i$ نضع $f(z) = \frac{iz-1-2i}{2z-4-2i}$

(أ) عين المجموعة (E) للنقط M من المستوي ذات اللاحقة z التي تحقق: $|f(z)| = \frac{1}{2}$

(ب) بيّن أن العدد $[f(i)]^{1440}$ حقيقي موجب.

(3) نعتبر الدوران r الذي مركزه C و زاويته $\frac{\pi}{2}$.

(أ) عين لاحقة D صورة B بالدوران r وبيّن أن النقط A, D و C في استقامية.

(ب) استنتج أن D هي صورة النقطة A بتحويل نقطي بسيط يطلب تحديد طبيعته وعناصره .

التمرين الرابع: (07 نقاط)

f الدالة العددية المعرفة على $]0;2[\cup]2;+\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{1}{x-2} + \ln x$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) (أ) احسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ ثم فسّر النتائج بيانياً.

(ب) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(2) ادرس اتجاه تغير الدالة f على $]0;2[\cup]2;+\infty[$ وشكّل جدول تغيراتها.

(3) نسمي (Γ) المنحنى البياني للدالة اللوغاريتمية التيبيرية "ln" في المعلم السابق.

(أ) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \ln x)$ ثم فسّر النتيجة بيانياً.

(ب) ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المنحنى (Γ) .

(4) ارسم بعناية المنحنى (Γ) ثم المنحنى (C_f) .

(5) H الدالة المعرفة على المجال $]3;+\infty[$ بـ : $H(x) = \int_3^x \ln(t) dt$ حيث t متغير حقيقي موجب تماماً.

(أ) باستعمال الكاملة بالتجزئة، عين عبارة $H(x)$ بدلالة x .

(ب) احسب \mathcal{A} مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) وحامل محور الفواصل

والمستقيمين ذوي المعادلتين: $x=3$ و $x=4$.

(6) g الدالة المعرفة على $]-\infty;-1[\cup]-1;0[$ بـ : $g(x) = f(-2x)$

دون حساب عبارة $g(x)$ حدّد اتجاه تغير الدالة g على مجموعة تعريفها.

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأوّل: (04 نقاط)

- يحتوي صندوق على 10 كريات لا نفرق بينها عند اللمس منها كريتان تحملان الرقم 0 وثلاث تحمل الرقم 1 والكرات الأخرى تحمل الرقم 2. نسحب عشوائياً وفي آنٍ واحدٍ ثلاث كريات من الصندوق. ليكن X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل سحب، جداء الأرقام المسجّلة على الكريات المسحوبة.
- (1) عرّف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ثم احسب أمله الرياضي $E(X)$.
 - (2) بيّن أنّ احتمال الحصول على ثلاث كريات كل منها تحمل رقماً زوجياً هو $\frac{7}{24}$.
 - (3) نسحب الآن من الصندوق كريتين على التوالي دون إرجاع. ما احتمال الحصول على كريتين تحملان رقمين مجموعهما فردي علماً أن جداءهما زوجي؟

التمرين الثاني: (04 نقاط)

- f الدالة المعرفة على المجال $[4; 7[$ ب: $f(x) = \sqrt{x+2} + 4$.
- (1) أ) بيّن أنّ الدالة f متزايدة تماماً على المجال $[4; 7[$.
ب) استنتج أنّه: من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[4; 7[$ فإنّ $f(x) \in [4; 7[$.
 - (2) برهن أنّه: من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[4; 7[$ فإنّ $f(x) - x = \frac{-x^2 + 9x - 14}{x - 4 + \sqrt{x+2}}$
ثم استنتج أنّه: من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[4; 7[$ فإنّ $f(x) - x > 0$
 - (3) (u_n) المتتالية العددية المعرفة ب: $u_0 = 4$ ومن أجل كلّ عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n)$
أ) برهن بالتّراجيع أنّه: من أجل كل عدد طبيعي n $4 \leq u_n < 7$
ب) استنتج اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) ثم بيّن أنّها متقاربة.
 - (4) أ) بيّن أنّه: من أجل كلّ عدد طبيعي n $7 - u_{n+1} < \frac{1}{4}(7 - u_n)$
ب) استنتج أنّه: من أجل كلّ عدد طبيعي n $0 < 7 - u_n < 3\left(\frac{1}{4}\right)^n$ ، ثم احسب نهاية المتتالية (u_n) .

التمرين الثالث: (05 نقاط)

- المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
نعتبر النقط A ، B و C التي لاحتقاتها z_A ، z_B و z_C على الترتيب حيث:
- $z_C = -2z_A$ و $z_B = \overline{z_A}$ ، $z_A = \sqrt{2} + i\sqrt{6}$
- (1) أ) اكتب العدد المركب z_A على الشكل الأسّي.
 - ب) احسب العدد $\left(\frac{z_A}{2\sqrt{2}}\right)^{2019} + \left(\frac{z_B}{2\sqrt{2}}\right)^{2019}$

- (2) أ) الانسحاب الذي يحوّل A إلى C ، عيّن z_D لاحقة النقطة D صورة B بالانسحاب T .
 ب) استنتج طبيعة الرباعي $ABDC$.
 (3) اكتب العدد المركب $z_C - z_A$ على الشكل الأسّي.
 (4) جد قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد المركب $\left(\frac{-6\sqrt{2}}{z_C - z_A}\right)^n$ عددا حقيقيا.
 (5) لتكن M نقطة كيميّة من المستوي لاحقتها z حيث M تختلف عن A وتختلف عن C .
 عيّن (E) مجموعة النقط M التي من أجلها يكون $\frac{z_A - z}{z_C - z}$ عددا حقيقيا موجبا تماما.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. تُؤخذ وحدة الطول 2 cm
 (\mathcal{C}_g) و (\mathcal{C}_f) التمثيلان البيانيان للدالتين f و g المعرفتين على \mathbb{R} كما يلي:

$$f(x) = e^x - \frac{1}{2}ex^2 \quad \text{و} \quad g(x) = e^x - ex$$

- (1) أ) ادرس اتجاه تغير الدالة g .
 ب) استنتج اشارة $g(x)$ حسب قيم x الحقيقية.
 (2) ادرس اتجاه تغير الدالة f .
 (3) احسب كلاً من $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ؛ ثم شكّل جدول تغيّرات الدالة f .
 (4) ادرس الوضع النسبي للمنحنيين (\mathcal{C}_g) و (\mathcal{C}_f) على \mathbb{R} .
 (5) ارسم على المجال $[0; 2]$ المنحنيين (\mathcal{C}_g) و (\mathcal{C}_f) في نفس المعلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (يُعطى $e^2 - 2e \approx 2$)
 (6) احسب بالسنتمتر المربع، مساحة الحيز المستوي المحدّد بالمنحنيين (\mathcal{C}_g) و (\mathcal{C}_f) .
 (7) الدالة المعرّفة على المجال $[-2; 2]$ كما يلي: $h(x) = \frac{1}{2}ex^2 - e^{|x|}$ و ليكن (Γ) تمثيلها البياني في المعلم السابق.
 أ) بيّن أنّ h دالة زوجية.
 ب) من أجل $x \in [0; 2]$ احسب $h(x) + f(x)$ ثم استنتج كيفية رسم (Γ) انطلاقاً من (\mathcal{C}_f) ثم ارسمه.

العلامة		عناصر الإجابة (الموضوع الأول)							
مجم	مجزأة								
04	0.75×2	التمرين الأول: (04 نقاط) (1) أ) تبيان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n > 1$: ب) دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) واستنتاج تقاربها :							
	0.50 (u_n) متناقصة تماما على \mathbb{N}							
	0.50 بما أن (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة							
	0.25	(2) إثبات أن المتتالية (v_n) حسابية وتعيين أساسها وحدها الأول :							
	0.25 من أجل كل عدد طبيعي n : $v_{n+1} - v_n = -\ln 5$							
	0.25 حدها الأول v_0 : $v_0 = \ln(12)$							
	0.25	(3) كتابة v_n بدلالة n : $v_n = \ln\left(\frac{12}{5^n}\right)$							
	0.25 تبيان أن $u_n = 1 + \frac{12}{5^n}$							
0.25 حساب نهاية المتتالية (u_n) : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$								
0.25	(4) تبيان أن : $(u_0 - 1)(u_1 - 1) \times \dots \times (u_n - 1) = \left(\frac{12}{5^2}\right)^{n+1}$								
3.75	01	التمرين الثاني: (04 نقاط) (1) تبيان أن : $P(A) = \frac{31}{66}$							
	01 $P(B) = \frac{17}{33}$							
	0.25	(2) احتمال أن تحملا نفس الرقم: $P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{15}{31}$							
	0.25×3	(3) أ) قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X :							
	0.25×3	<table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td>x_i</td> <td>3</td> <td>4</td> <td>5</td> </tr> <tr> <td>$P(X = x_i)$</td> <td>$\frac{10}{66}$</td> <td>$\frac{35}{66}$</td> <td>$\frac{21}{66}$</td> </tr> </table>	x_i	3	4	5	$P(X = x_i)$	$\frac{10}{66}$	$\frac{35}{66}$
x_i	3	4	5						
$P(X = x_i)$	$\frac{10}{66}$	$\frac{35}{66}$	$\frac{21}{66}$						
0.25	0.25 الأمل الرياضي $E(X) = \frac{275}{66}$							

العلامة		عناصر الإجابة (الموضوع الأول)
مجموع	مجزأة	
05	0.5×3	التمرين الثالث: (05 نقاط) 1. حلول المعادلة هي : $2+i, 2-i, i$
	0.75 $\frac{z_C - z_A}{z_C - z_B} = -i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$ (1.11)
	0.50 المثلث ABC قائم في C ومتساوي الساقين.....
	0.75 (2) - أ) (E) هي محور القطعة $[BC]$
	0.75 ب) $f(i) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$ و $[f(i)]^{1440} \in \mathbb{R}^+$
	0.5 (3) - أ) $z_D = 4+i$ و $\frac{z_C - z_A}{z_C - z_D} = -1$ أي $\overline{CD} = -\overline{CA}$. النقط في استقامية.....
0.25 ب) D هي صورة A بتحاك مركزه C ونسبته -1 أو بدوران مركزه C وزاويته π أو بتناظر مركزي بالنسبة لـ C أو بتشابه مباشر نسبته 1 مركزه C وزاويته π	
2.5	0.5×3	التمرين الرابع: (07 نقاط) 1 (أ) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$ ، $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$ ، $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$
	0.25×2	التفسير الهندسي: $x=0$ و $x=2$ معادلتين للمستقيمين المقاربين للمنحنى (C_f)
	0.5 ب) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
01.75	0.5 2) اتجاه تغير الدالة f : لدينا $f'(x) = \frac{x^2 - 5x + 4}{x(x-2)^2}$
	0.50 إشارة $f'(x)$
	3×0.25 f متزايدة تماما على كل من المجالين: $[4; +\infty[$ و $]0; 1]$ و f متناقصة تماما على كل من المجالين $]1; 2[$ و $]2; 4]$ وتشكيل جدول التغيرات
0.75	0.5 3) أ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \ln x) = 0$
	0.25	التفسير البياني: (Γ) منحنى مقارب للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.
0.5	0.5 ب) وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المنحنى (Γ) : لدينا $f(x) - \ln x = \frac{1}{x-2}$ إذن: على المجال $]0; 2[$: (C_f) يقع تحت (Γ) وعلى المجال $]2; +\infty[$: (C_f) يقع فوق (Γ) .
0.5	0.5 4) الرسم.....

العلامة		عناصر الإجابة (الموضوع الأول)
مجموع	مجزأة	
0.5	0.25	(5 أ) باستعمال المكاملة بالتجزئة نجد : $H(x) = \int_3^x (\ln t) dt = -x + 3 + x \ln x - 3 \ln 3$.
	0.25	(ب) المساحة $\mathcal{A} = (-1 + 9 \ln 2 - 3 \ln 3)$ (u.a).
0.5	0.25	(6) الدالة المعرّفة على المجموعة $]-\infty; -1[\cup]-1; 0[$ ب : $g(x) = f(-2x)$.
	0.25	$g'(x) = -2f'(-2x)$ الدالة g متناقصة على $]-\infty; -2[\cup]\frac{-1}{2}; 0[$ ومتزايدة على $]-2; -1[\cup]-1; \frac{-1}{2}[$

العلامة		عناصر الإجابة (الموضوع الثاني)
مجموع	مجزأة	
التمرين الأول: (04 نقاط)		
02.5	0.5	(1) عدد الامكانيات هو 120 ،
	01.5	قانون الاحتمال: . قيم X هي 1، 0، 2 ، 4 ، 8 مع احتمالاتها
	0.50	الامل الرياضي هو $\frac{231}{120}$
01	01	(2) احتمال الحصول على 3 كريات تحمل كل منها رقما زوجيا $\frac{7}{24}$
0.5	0.25×2	(3) احتمال الحصول على كرتين تحملان رقمين مجموعهما فردي علما أن الجداء زوجي هو $\frac{1}{2}$
التمرين الثاني: (04 نقاط)		
01.25	0.75	(1) أ) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+2}}$ ومنه الدالة f متزايدة تماما على المجال $[4;7[$.
	0.5	ب) من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[4;7[$ يكون: $f(x) \in [4;7[$
0.75	0.75	(2) $f(x) - x = \frac{-x^2 + 9x - 14}{\sqrt{x+2} + x - 4}$ ومن أجل كل x من المجال $[4;7[$: $f(x) - x > 0$.
01.25	0.75	(3) أ) برهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $4 \leq u_n < 7$.
	0.25 0.25	ب) لدينا: $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$ إذن: $u_{n+1} - u_n > 0$ ومنه: (u_n) متزايدة تماما. (u_n) متقاربة.
0.75	0.25	(4) أ) برهان أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $7 - u_{n+1} < \frac{1}{4}(7 - u_n)$.
	0.25 0.25	ب) استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < 7 - u_n < \frac{3}{4^n}$ ، و $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 7$ حسب مبرهنة الحصر.
التمرين الثالث: (05 نقاط)		
01.5	01	(1) أ) الشكل الآسي لـ z_A .
	0.5	ب) حساب $\left(\frac{z_A}{2\sqrt{2}}\right)^{2019} + \left(\frac{z_B}{2\sqrt{2}}\right)^{2019}$
01.5	0.75	(2) أ) حساب z_D صورة B بواسطة T
	0.75	ب) الرباعي $ABDC$ متوازي أضلاع.
0.75	0.75	(3) الشكل الآسي للعدد المركب $z_C - z_A$ هو $6\sqrt{2}e^{i\frac{4\pi}{3}}$.
0.5	0.5	(4) لدينا $\left(\frac{-6\sqrt{2}}{z_C - z_A}\right)^n = e^{-in\frac{\pi}{3}}$
. $k \in \mathbb{Z}_-$ حيث $n = -3k$ عدد حقيقي يعني أن $\left(\frac{-6\sqrt{2}}{z_C - z_A}\right)^n$		

العلامة		عناصر الإجابة (الموضوع الثاني)
مجموع	مجزأة	
0.75	0.75	(5) نقطة كيفية من المستوى لاحقها z تختلف عن A و C . (E) هي المستقيم (AC) باستثناء القطعة المستقيمة $[AC]$ أي أن $(E) = (AC) - [AC]$
التمرين الرابع: (07 نقاط)		
02	0.5×2	(1) أ) دراسة اتجاه تغيّر الدالة g : ليكن $x \in \mathbb{R} : g'(x) = e^x - e$
	0.5×2	ب) الدالة g تقبل قيمة حدية صغرى: لدينا $g(1) = e^1 - e = 0$ اذن من أجل كل $x \in \mathbb{R} : g(x) \geq 0$
01	0,50	(2) دراسة اتجاه تغيّر الدالة f : ليكن $x \in \mathbb{R} : f'(x) = e^x - ex = g(x)$.
	0,50	لدينا $f'(1) = g(1) = 0$ ومن أجل $x \in \mathbb{R} - \{1\} : g(x) > 0$ أي $f'(x) > 0$ إذا الدالة f متزايدة تماماً على \mathbb{R} .
0.75	0.25	(3) حساب كلاً من $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$: $\lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{1}{2}ex^2 = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ لأن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x - \frac{1}{2}ex^2 = -\infty$
	0.25	$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(e^x - \frac{1}{2}ex^2 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(\frac{e^x}{x^2} - \frac{1}{2}e \right) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$
	0.25	جدول التغيرات
0.50	0,50	(4) دراسة الوضعية النسبية للمنحنيين (C_f) و (C_g) . ليكن $x \in \mathbb{R} : f(x) - g(x) = ex \left(-\frac{1}{2}x + 1 \right)$
0.75	0,75	(C_g) تحت (C_f) : $x \in]-\infty; 0[\cup]2; +\infty[$ (C_g) فوق (C_f) : $x \in]0; 2[$ (C_g) و (C_f) متقاطعان : $x \in \{0; 2\}$
0.50	0.25	(5) الرسم : (C_f)
	0.25	(C_g)

العلامة		عناصر الإجابة (الموضوع الثاني)
مجموع	مجزأة	
0.5	0.25	<p>6) حساب بالسنتيمتر المربع، مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنيين (C_f) و (C_g).</p> $A = \int_0^2 [g(x) - f(x)] dx = \int_0^2 \left(-\frac{1}{2}ex^2 + ex \right) dx = \left[-\frac{1}{6}ex^3 + \frac{1}{2}ex^2 \right]_0^2$ $A = -\frac{8e}{6} + \frac{4e}{2} = -\frac{4e}{3} + 2e = \frac{2e}{3} ua$
	0.25	$A = \frac{8e}{3} cm^2$
01	0.25	7) أ) دالة زوجية.....
	0.25	ب) حساب $h(x) + f(x)$
	0.25	استنتاج كيفية رسم (Γ) انطلاقا من (C_f)
	0.25	الرسم.....