الأعداد المركبة 2015

نهائي رياضيات وعلوم

الجيل الرابع

الكفاءة المستهدفة

- ♥ إجراء العمليات الحسابية على الأعداد المركبة.
- ♥ التعبير عن خواص لأشكال هندسية باستعمال الأعداد المركبة.
- ♥ استعمال خواص مرافق عدد مركب.
- ♥ توظيف خواص الطويلة والعمدة لحل مسائل في الأعداد المركبة وفي الهندسة.
- ♥ حساب الطويلة وعمدة لعدد مركب غير معدوم.
- ♥ توظيف دستور موافر لحل مسائل في الأعداد المركبة وفي الهندسة.
- ♥ ا لانتقال من الشكل الجبري إلى الشكل المثلي و العكس.
- ♥ حل معادلات من الدرجة الثانية.و حل معادلات يؤول حلها إلى حلّ معادلة من الدرجة الثانية.
- ♥ تعيين الكتابة المركبة للتحويلات المألوفة (الانسحاب، التحاكي، الدوران).والتعرف عن تحويل انطلاقا من كتابته المركبة.
- ♥ حل مسائل هندسية تتطلب استعمال انسحابات، تحاكيات أو دورانات بواسطة الأعداد المركبة.
- ♥ توظيف الأعداد المركبة لبرهان خواص الانسحاب، الدوران والتحاكي.

المكتسبات القبلية

- ♥ الاشعة ® المرجع® طويلة شعاع® التحويلات النقطية ®المعادلات من الدرجة 2 و 4 ®خواص دالة اسية ®وخوص الجذر النوني

عندما وجد الرياضاياتيون أن المعادلة ($x^2 = -1$) مستحيلة الحل في مجموعة الأعداد الحقيقية كان لا بد من وضع حل لها. وبما أن الرياضيات هي -وكما يقول أحد الرياضاتيين- العلم الذي لا نعرف فيه إن كان ما نقوله صحيحا أم لا. لذلك وجد العدد .("i") وتعريف العدد "i" هو الجذر التربيعي للعدد "-1"، وهنا يكمن التعقيد. فمن المعلوم أنه ليس للعدد "-1" جذر تربيعي، ولكن هذا في الأعداد الحقيقية. فكما أنه لا وجود للعدد "-5" في الأعداد الطبيعية ولكنه موجود في الأعداد الصحيحة (والحال نفسه بالنسبة للعدد "i") فالرياضيات هي علم وضعه البشر ولهم الحق في تطويره وتجديده وفق قواعد واضحة تخضع للمنطق الرياضى ولا تنافى المبادئ الرياضية والموضوعات والبديهيات فى علم الرياضيات.

الاستاذ		الأعداد المركبة	يوسفي عبد الرحمن

تدرس الأعداد المركبة في إطار هندسي.

يتواصل تدريس التحويلات النقطية في هذه السنة من خلال الأعداد المركبة.

تعالج الأوضاع النسبية . التي درست في السنة الأولى . لمستوين، لمستقيمين، لمستقيم ومستو في إطار تحليلي. وهو ما يوفر فرصة للتعامل مع معادلات ديكارتية والتمثيلات الوسيطية في آن واحد وحل جمل خطية

ســــــــــــــير الدرس	التوقيت
نشاط 1: الاعداد المركبة تعريف 2: مرافق عدد مركب العمليات 3: طويلة وعمدة عدد مركب 4: الشكل المثلثي لعدد مركب 5: الشكل الاسي لعدد مركب 6: مجموعة نقط باستعمال عدد مركب	

وثائق التحضير	الوسائل البيداغوجية	نقد ذاتي
• دليل الأستاذ • الكتاب المدرسي • المنهاج • الهباج في الرياضيات •	• السبورة •	

المؤسســـــة:	المستـــــــوى: الثالثة رياضيات
السنة الدراسية:	ميـــدان التعلم: هندسة
التاريــــــخ:	الوحدة التعلمية: الاعداد المركبة
توقيت الحصة :	موضوع الحصة : الكتابات المختلفة لعدد مركب، الترميز $\mathbb{C}$ ، العمليات على الأعداد المركبة، ترميز أولير: $e^{i\alpha}$

المكتسبات المستهدفة: إجراء العمليات الحسابية على الأعداد المركبة.

الأنشطة المقترحة و طبيعتها	الإنجاز(ســـــــير الحصة)	التعليمات و التوجيهات

نشاط مقترح

α عدد حقيقي

لتكن المعادلة $x^2=\alpha$

حل في $\mathbb{R}$ المعادلة المعطاة

بوضع $\alpha=-4$ هل يمكن ايجاد حل في $\mathbb{R}$

بوضع $i^2=-1$ حيث i غير حقيقي

اوجد حلول المعادلة

بسط العلاقات التالية

$(-i-1)(i+1)$

$(-i-1)i$

i^2, i^3, i^4

1 النشاط

نعتبر مجموعة E عناصرها من الشكل $x+iy$ حيث x و y عددان حقيقيان و i عدد حيث $i^2=-1$

ليكن العددان Z , Z' حيث: $Z=5+2i$ و $Z'=3-i$

1. إذا علمت أن عمليتي الجمع و الضرب في E لها نفس خواص عمليتي الجمع والضرب في $\mathbb{R}$ ، احسب كل من: $(2Z+Z')^2$; $(Z-Z')^2$; $Z+Z'$; $8Z$; $2Z-3Z'$; Z^2 ; $Z\times Z'$ (2 بكتابة $1/Z$ على الشكل :

$$\frac{1}{Z}=\frac{5-2i}{(5+2i)(5-2i)}$$

2. عين عددان حقيقيان α β بحيث : $1/Z=\alpha+i\beta$

وبنفس الطريقة عين عددان حقيقيان a و b بحيث: $1/Z'=a+ib$.

3. احسب $(i)^{2008}$ ثم i^n بدلالة n .

4. استنتج طريقة لحساب $(1+i)^{2008}$.

2 الحل

1) الحساب :

$$Z+Z'=(5+2i)+(3-i)=(5+3)+(2-1)i=8+i$$

$$8Z=8(5+2i)=40+16i$$

$$2Z-3Z'=2(5+2i)-3(3-i)=10+4i-9+3i=1+7i$$

$$2Z-3Z'=2(5+2i)-3(3-i)=10+4i-9+3i=1+7i$$

$$Z^2=(5+2i)^2=(5)^2+2\times5\times2i+(2i)^2=21+20i$$

$$Z\,.\,Z'=(5+2i)(3-i)=15-5i+6i-2i^2=17+i$$

$$(2Z+Z')^2=\left[2(5+2i)+3-i\right]^2=(10+4i+3-i)^2$$

$$=(13+3i)^2=(13)^2+2\times13\times3i+(3i)^2=169+78i-9=160+78i$$

$$(Z-Z')^2=(5+2i-3+i)^2=(2+3i)^2$$

$$=(2)^2+2.2.3i+(3i)^2=4+12i-9=-5+12i$$

(2 $\frac{1}{Z}=\frac{5-2i}{(5+2i)(5-2i)}=\frac{5-2i}{(5)^2-(2i)^2}$ و منه : $\frac{1}{Z}=\frac{5-2i}{25+4}=\frac{5}{29}-\frac{2}{29}i$

إذن : $\alpha=5/29$ ، $\beta=-2/29$

$$\frac{1}{Z'}=\frac{1}{3-i}=\frac{3+i}{(3-i)(3+i)}=\frac{3+i}{(3)^2-(i)^2}=\frac{3+i}{9+1}=\frac{3+i}{10}$$

و منه : $\frac{1}{Z'}=\frac{3}{10}+\frac{1}{10}i$ إذن : $a=\frac{3}{10}$ ، $b=\frac{1}{10}$.

3) - حساب $(i)^{2008}$: $(i)^{2008}=(i^2)^{1004}=(-1)^{1004}=1$

- حساب i^n : $(i)^n=\left[(i)^2\right]^{\frac{n}{2}}=(-1)^{\frac{n}{2}}$

4) استنتاج طريقة لحساب $(1+i)^{2008}$: $(1+i)^{2008}=\left[(1+i)^2\right]^{1004}=(1+2i+i^2)^{1004}=(1+2i-1)^{1004}$

$$=(2i)^{1004}=2^{1004}\,.\,(i^2)^{502}=2^{1004}.(-1)^{502}=2^{1004}$$

ندرس الأعداد المركبة في إطار هندسي

1/الاعداد المركبة

1.1 الاعداد المركبة

تعريف

نسمي عددا مركبا كل عدد z يكتب على الشكل $Z = x + iy$ حيث x و y عددان حقيقيان و $i^2 = -1$ (الشكل الجبري)

مثال الأعداد التالية $3-5i$, $2i$, 4 هي أعداد مركبة.

ملاحظات و ترميز:

- العدد الحقيقي x يسمى الجزء الحقيقي للعدد المركب z ، و نرمز $\text{Re } z$.
- العدد الحقيقي y يسمى الجزء التخيلي للعدد المركب z ، و نرمز $\text{Im } z$.
- إذا كان $y = 0$ نقول أن العدد z حقيقي.
- إذا كان $x = 0$ نقول أن العدد z تخيلي صرف (أو تخيلي محض أو تخيلي بحت) .
- يكون العدد المركب z معدوما إذا و فقط إذا كان جزؤه الحقيقي معدوما و جزؤه التخيلي معدوما. أي $z = 0$ يعني $x = 0$ و $y = 0$.
- الكتابة $Z = x + iy$ تسمى الشكل الجبري للعدد المركب z .

الترميز: نرمز إلى مجموعة الاعداد المركبة بالرمز $\mathbb{C}$

تعريف مجموعة الاعداد المركبة: (الشكل الهندسي)

المستوي مزود بمعلم متعامد متجانس $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ - كل نقطة M من المستوي تمثل عدد مركب وعدد مركب وحيد. وكل عدد مركب يمثل بنقطة و بنقطة وحيدة في المستوي.

- النقطة $J(o ; 1)$ تمثل العدد المركب الذي نرمز له بالرمز i .

- من أجل كل عددان حقيقيان x و y ، يرمز للعدد المركب الممثل بالنقطة $M(x ; y)$ بالرمز $x + iy$.- يرمز لمجموعة الأعداد المركبة بالرمز $\mathbb{C}$

ملاحظات

النقطة $M(x ; y)$ تسمى صورة العدد المركب z و العدد Z يسمى لاحقة النقطة $M(x ; y)$

- محور الفواصل يدعى المحور الحقيقي و محور التراتيب يدعى المحور التخيلي .
- إذا كان $Z = 0$ فإن Z حقيقي و تخيلي صرف في آن واحد و يمثل بالنقطة $O(0 ; 0)$.

2.1 تساوي عددين مركبين

تعريف

$z ; z'$ عددان مركبان حيث $z = x + iy$ و $z' = \alpha + i\beta$ يكون : $z = z'$ إذا و فقط إذا كان $x = \alpha$ و $y = \beta$

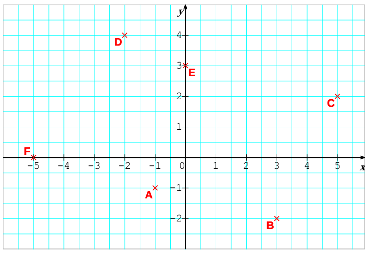
نصع $z = x + iy$ و $z' = x' + iy'$: $z = z'$ معناه ($x = x'$ و $y = y'$)

3.1 التمثيل الهندسي لعدد مركب

1 النشاط

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$.نقبل أن محور الفواصل يمثل مجموعة الأعداد الحقيقية . وعليه العدد الحقيقي x تمثله النقطة P بالإحداثيين $x;0$.
نقبل أن كل نقطة أخرى من المستوي لا تنتمي إلى محور الفواصل تمثل عددا وهذا العدد غير حقيقي و نسميه عددا مركبا . و هكذا النقطة J بالإحداثيين $0;1$ تمثل العدد المركب i ، والنقطة Q بالإحداثيين $0;y$ تمثل العدد المركب iy. وبصفة عامة النقطة M بالإحداثيين $x;y$ تمثل العدد المركب $x+iy$ الذي يرمز له z .

1. في الرسم الموالي عين الأعداد المركبة التي تمثلها النقط A ، B ، C ، D ، E و F .
2. مثل النقطة G حيث : $\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$. ما هو العدد المركب المرفق بالنقطة G؟
3. مثل النقطة H حيث : $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}$. ما هو العدد المركب المرفق بالنقطة H ؟
4. مثل النقطة K حيث : $\overrightarrow{KG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$. ما هو العدد المركب المرفق بالنقطة K ؟
5. مثل النقط R ، S و T صور الأعداد المركبة $z_1=2-i$ ، $z_2=-\dfrac{1}{2}-3i$ و $z_3=-7i$ على الترتيب.



2 الحل

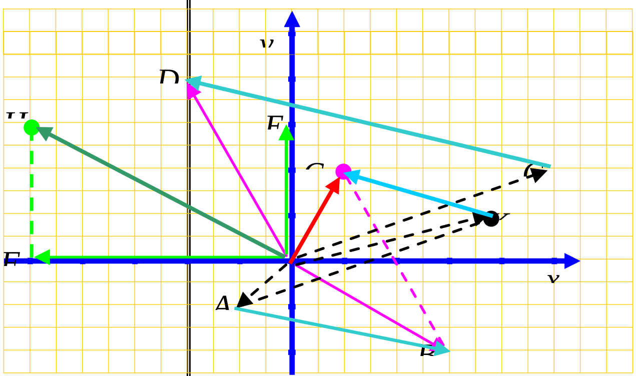
1) الأعداد المركبة التي تمثيلها النقط $A;B;C;D;E;F$
لنا : $-1-i$ تمثله النقطة A أي $A(-1;-1)$ ، $3-2i$ تمثله النقطة B أي $B(3;-2)$
$5+2i$ تمثله النقطة C أي $C(5;2)$ ، $-2+4i$ تمثله النقطة D أي $D(-2;4)$
$3i$ تمثله النقطة E أي $E(0;3)$ و -5 تمثله النقطة F أي $F(-5;0)$

2) تمثيل النقطة G حيث $\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$
العدد المركب المرفق بالنقطة G هو : $\alpha=1+2i$

3) تمثيل النقطة H حيث $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}$
العدد المركب المرفق بالنقطة H هو : $\beta=-5+3i$

4) تمثيل النقطة K حيث $\overrightarrow{KG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$
العدد المركب المرفق بالنقطة K هو : $z=4+i$

5) $R(2;-1)$ ، $S\left(-\dfrac{1}{2};-3\right)$ ، $T(0;-7)$



تعريف مجموعة الاعداد المركبة: (الشكل الهندسي)

المستوي مزود بمعلم متعامد متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ - كل نقطة M من المستوي تمثل عدد مركب وعدد مركب وحيد. وكل عدد مركب يمثل بنقطة و بنقطة وحيدة في المستوي.
- النقطة $J(o;1)$ تمثل العدد المركب الذي نرمز له بالرمز i .
- من أجل كل عددان حقيقيان x و y ، يرمز للعدد المركب الممثل بالنقطة $M(x;y)$ بالرمز $x+iy$.- يرمز لمجموعة الأعداد المركبة بالرمز $\mathbb{C}$

ملاحظات

- النقطة $M(x\ ;y)$ تسمى صورة العدد المركب z و العدد Z يسمى لاحقة النقطة $M(x\ ;y)$
- محور الفواصل يدعى المحور الحقيقي و محور التراتيب يدعى المحور التخيلي .
- إذا كان $Z=0$ فإن Z حقيقي و تخيلي صرف في آن واحد و يمثل بالنقطة $O(0\ ;0)$.
- المستوي يسمى المستوي المركب.

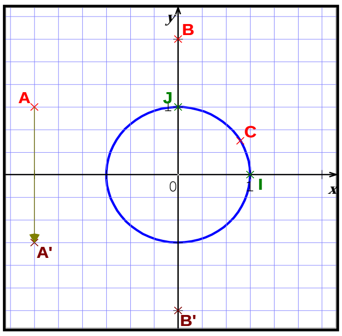
تمرين: المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}$.

لتكن النقط A ، B ، C من المستوي التي لواحقها $-2+i$ ، $2i$ ، $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ على الترتيب .

1) أنشئ النقط A ، B ، C في المعلم $O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}$.

2) عين لاحقة النقطة B' نظيرة B بالنسبة إلى O . أنشئ B' .

3) عين لاحقة النقطة A' نظيرة A بالنسبة إلى محور الفواصل ، ثم عين لاحقة الشعاع $\overrightarrow{AA'}$.
أنشئ A' .



الحل: 1) A صورة العدد $-2+i$ إذن $A\ -2;1$.

B صورة العدد $2i$ إذن $B\ 0;2$.

C صورته العدد $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ إذن $C\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$.

لإنشاء النقطة C يمكن الملاحظة أنها تنتمي إلى الدائرة
التي مركزها O و نصف قطرها 1 و ترتيبها $\frac{1}{2}$.

2) B' نظيرة B بالنسبة إلى O إذن $\overrightarrow{OB'}=-\overrightarrow{OB}$.
و منه $B'\ 0;-2$ و لاحقة B' هي $-2i$.

3) A' نظيرة A بالنسبة إلى محور الفواصل إذن A'
و A لهما نفس الفاصلة و ترتيبان متناظران إذن $A'\ -2;-1$
و لاحقة A' هي $-2-i$. $\overrightarrow{AA'}\ 0;-2$ و منه لاحقة $\overrightarrow{AA'}$ هي $-2i$

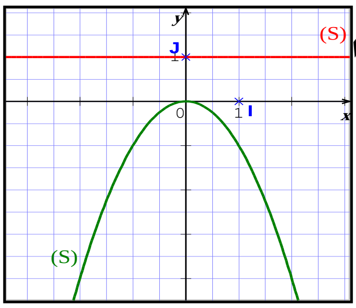
تمرين المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}$. x و y عددان حقيقيان. لتكن المجموعة S مجموعة النقط $M\ x;y$ من المستوي حيث $z=x^2+y\ 1+i\ -i$. عين ثمّ أنشئ المجموعة S في الحالتين الآتيتين .

1) z عدد حقيقي . 2) z عدد تخيلي صرف .

الحل: $z=x^2+y+i\ y-1$.

1) z عدد حقيقي إذا و فقط إذا كان $\mathrm{Im}\ z$ أي $y-1=0$.

إذن المجموعة S في هذه الحالة هي المستقيم ذو المعادلة $y-1=0$. S مرسوم باللون الأحمر في هذه الحالة .



2) z عدد تخيلي صرف إذا و فقط إذا كان $\mathrm{Re}\ z$
أي $x^2+y=0$. إذن المجموعة S في هذه الحالة هي القطع
ذو المعادلة $y=-x^2$.
S مرسوم باللون الأخضر في هذه الحالة .

نتائج :

A , B , C ثلاث نقط من المستوي المركب لاحقتها z_A , z_B , z_C على الترتيب.

لاحقة الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هي : $z_B - z_A$

لاحقة النقطة i منتصف القطعة $[AB]$ هي $z_I = \frac{z_B + z_A}{2}$

مثال

1 – تمثيل النقط A , B , C التي لواحقها على الترتيب: $3+i$, $2i$, -1

2 – حساب لاحقة الشعاع $\overrightarrow{AB}$.

3 – حساب لاحقة النقطة / منتصف القطعة $[AB]$

تمارين تطبيقية:

التمرين الاول

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ نعتبر النقطتان $A(-2, 1)$, $B(0, 5)$ والمستقيم (Δ) الذي معادلته $y = -x + 3$

عيّن لاحقتي النقطتين A , B

عيّن لاحقة النقط M التي تنتمي إلى (Δ).

التمرين الثاني :

في المستوي المركب $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ نعتبر العدد المركب $z = x^2 + y^2 - 4 + i(2x + y + 1)$

1. عيّن (Γ) مجموعة النقط M من المستوي المركب ذات اللاحقة z بحيث يكون z حقيقيا.
2. عيّن (Ω) مجموعة النقط M من المستوي المركب ذات اللاحقة z بحيث يكون z تخيليا صرفا.

التمرن الثالث:

في المستوي المركب $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ نعتبر النقط A , B , C التي لواحقها 1 , $-2-i$, $4i$

عيّن لاحقة النقطة D حتى يكون الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع.

تطبيق

تمرين رقم 6 ص 144

A نقطة من المستوي لاحقتها عدد مركب $a = -1 + 2i$ ، عين العدد المركب z بحيث تكون صورته M نظيرة النقطة A بالنسبة إلى :

* مبدأ المعلم ، * حامل محور الفواصل ، * حامل محور التراتيب ، * المنصف الأول

تمرين 2 ص 123

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OJ})$ ، x و y عددان حقيقيان

لتكن المجموعة (S) مجموعة النقط $M(x, y)$ من المستوي حيث $z = x^2 + y(1+i) - i$

عين ثم أنشئ المجموعة (S) في الحالتين الأتيتين

1) z عدد حقيقي 2) z عدد تخيلي صرف

المؤسســــة:	المستـــــــوى: الثالثة رياضيات
السنة الدراسية:	ميـــدان التعلم: هندسة
التاريــــخ:	الوحدة التعلمية: الاعداد المركبة
توقيت الحصة :	موضوع الحصة : العمليات على الاعداد المركبة خواص مرافق عدد مركب

المكتسبات المستهدفة: استعمال خواص مرافق عدد مركب

الأنشطة المقترحة وطبيعتها	الإنجاز (ســير الحصة)	التعليمات والتوجيهات
نشاط 2:	(المحتوى أدناه)	نقترح أنشطة تتعلق بالبحث عن مجموعات نقط و/أو استعمال المرجع .

1.2 مرافق عدد مركب

تعريف

لكل نقطة M من المستوى ذات اللاحقة $Z = x + iy$ حيث x و y عددان حقيقيان نظيرة بالنسبة لمحور الفواصل هي النقطة M' ذات اللاحقة $x - i y$ (هندسيا)

العدد المركب $x - iy$ يسمى مرافق العدد المركب $x + i y$ ونرمز له بالرمز $\bar{Z}$ أي : $\bar{Z} = x - i y$.

1 ملاحظة

للحصول على مرافق عدد مركب z ، نغير إشارة الجزء التخيلي.

أمثلة : • $\overline{2+8i} = 2-8i$ • $\overline{3-11i} = 3+11i$ ، • $\overline{4i} = -4i$ ، • $\overline{-2} = -2$.

مرافق العدد المركب: $Z_1 = 1 + i$ هو العدد المركب: $\bar{Z}_1 = 1 - i$

مرافق العدد المركب: $Z_2 = i$ هو العدد المركب: $\bar{Z}_2 = -i$

مرافق العدد المركب: $Z_3 = 8 + 3 i$ هو العدد المركب: $\bar{Z}_3 = 8 - 3 i$

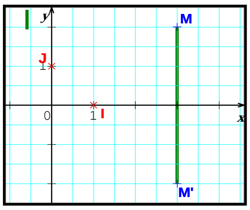
مرافق العدد المركب: $Z_4 = 10$ هو العدد المركب: $\bar{Z}_4 = 10$ أي أن : $\bar{Z}_4 = Z_4$

2 هندسيا

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}$.

z عدد مركب حيث $z = x + i y$.

لتكن M صورة z و M' صورة $\bar{z}$ ، M و M' لهما نفس الفاصلة و ترتيبان متناظران إذن M و M' متناظرتان بالنسبة إلى حامل محور الفواصل.



3 خواص

a) خواص مباشرة x و y عددان حقيقيان . $Z = x + iy$ عدد مركب .

$\bar{Z} = x - iy$ مرافق العدد المركب Z.

1) لدينا : $Z = x + iy$ ومنه : $\bar{\bar{Z}} = x + iy$ وعليه : $\bar{\bar{Z}} = Z$

2) لدينا : $Z + \bar{Z} = 2x$ ومنه : $Z + \bar{Z} = 2\,\mathrm{Re}(Z)$

3) لدينا : $Z - \bar{Z} = 2 i y$ ومنه : $Z - \bar{Z} = 2 i\,\mathrm{Im}(Z)$

4) $Z . \bar{Z} = x^2 + y^2$

5) $Z \in \mathbb{R}$ تكافئ $Z = \bar{Z}$

6) Z تخيلي صرف يكافئ : $Z = -\bar{Z}$

b) المرافق والعمليات x ، x' ، y ، y' أعداد حقيقية . Z_1 ، Z_2 عدادان مركبان حيث :

$Z_1 = x + i y$ ؛ $Z_2 = x' + i y'$

1) $\overline{Z_1 + Z_2} = \overline{(x + x' + i(y + y'))} = x + x' - i(y + y') = x - i y + x' - i y'$

ومنه : $\overline{Z_1 + Z_2} = \bar{Z}_1 + \bar{Z}_2$

2) $\overline{Z_1 . Z_2} = \overline{[(xx' - yy') + i(xy' + x'y)]} = (xx' - yy') - i(xy' + x'y)$

$\bar{Z}_1 . \bar{Z}_2 = (x - iy).(x' - iy') = (xx' - yy') - i(xy' + x'y)$

وعليه : $\overline{Z_1 . Z_2} = \bar{Z}_1 . \bar{Z}_2$

(3 $\overline{\left(\frac{1}{Z_1}\right)} = \overline{\left(\frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}\right)} = \frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{y}{x^2+y^2}$

$\frac{1}{\overline{Z_1}} = \frac{1}{x-iy} = \frac{x+iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{y}{x^2+y^2}$ وعليه : $\overline{\left(\frac{1}{Z_1}\right)} = \frac{1}{\overline{Z_1}}$

(4 $\overline{\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)} = \frac{\overline{Z_1}}{\overline{Z_2}}$

5) من أجل $n \in \mathbb{N}^*$: $\overline{Z_1^n} = \left(\overline{Z_1}\right)^n$ وإذا كان: $Z_1 \neq 0$ و $n \in \mathbb{N}$: $\overline{Z_1^n} = \left(\overline{Z_1}\right)^n$

أمثلة :

.1 $\overline{(1+2i)(3-i)} = \overline{(1+2i)}\ \overline{(3-i)} = (1-2i)(3+i)$

.2 $\overline{\left(\frac{1}{3+i}\right)} = \frac{1}{\overline{3+i}} = \frac{1}{3-i}$

.3 $\overline{\left(\frac{2+3i}{5+i}\right)} = \frac{\overline{(2+3i)}}{\overline{(5+i)}} = \frac{2-3i}{5-i}$

.4 $\overline{\left(\frac{a+b}{1-ab}\right)} = \frac{\overline{a}+\overline{b}}{1-\overline{a}.\overline{b}}$

حيث: a و b عددان مركبان مع $ab \neq 1$.

2.2العمليات في مجموعة الاعداد المركبة

1 مجموع وجداء عددين مركبين

تعريف

z عدد مركب حيث $z = x + iy$ ($x\in\mathbb{R}$ و $y\in\mathbb{R}$) و z' عدد مركب حيث $z' = x' + iy'$ ($x'\in\mathbb{R}$ و $y'\in\mathbb{R}$).

مجموع العددين z و z' هو العدد المركب $z+z' = x+x' + i\ y+y'$.

جداء العددين z و z' هو العدد المركب $z.z' = xx' - yy' + i\ xy' + x'y$.

ملاحظة: قواعد الحساب المعروفة في $\mathbb{R}$ تبقى صحيحة في $\mathbb{C}$.

المجموعة $\mathbb{C}$ مزودة بعمليتين هما الجمع + و الضرب × معرفتان من أجل كل عددان مركبان Z Z'

حيث: $Z = x + iy$ و $Z' = x' + iy'$ كما في التعريف السابق :

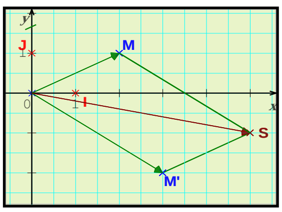
2 قوى عدد مركب

القوى الصحيحة لعدد مركب لها نفس خواص القوى الصحيحة لعدد حقيقي ولدينا :

$i^2 = (0+1.i) \times (0+1.i) = (0-1) + i(0.1+0.1) = -1$ وعليه : $i^2 = -1$

3 التفسير الهندي للعمليات

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}$.



$z = x + iy$ عدد مركب و $z' = x' + iy'$ عدد مركب .

المجموع $z + z'$ هو لاحقة النقطة S حيث :

$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'}$.

$\overrightarrow{OS}$ هي محصلة الشعاعين $\overrightarrow{OM}$ و $\overrightarrow{OM'}$.

1.3ملاحظات: • إذا كان z لاحقة الشعاع $\vec{u}$ وكان z' لاحقة الشعاع $\vec{v}$ ،

فإن $z + z'$ هو لاحقة $\vec{u} + \vec{v}$.

• إذا كان z لاحقة الشعاع $\vec{u}$ و كان λ عددا حقيقيا فإن λz هو لاحقة $\lambda\vec{u}$.

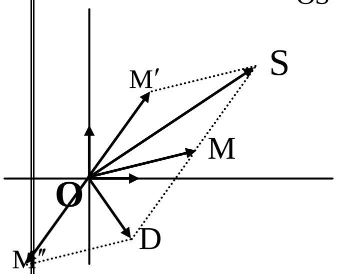
• شعاعان متساويان لهما نفس اللاحقة .

2.3خواص ☹نفس الملاحظات السابقة)

إذا كان Z و Z' لاحقتي النقطتين M و M' (أو الشعاعين $\overrightarrow{OM}$ $\overrightarrow{OM'}$) على الترتيب فإن :

- $Z + Z'$ هو لاحقة النقطة S (أو الشعاع $\overrightarrow{OS}$) حيث: $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'}$
- $Z - Z'$ هو لاحقة النقطة D (أو الشعاع $\overrightarrow{OD}$) حيث:

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM''}$$



وعليه إذا كانت A و B نقطتان لاحقتاهما Z_A و Z_B على الترتيب:

فإن لاحقة الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هو العدد المركب $Z_{\overrightarrow{AB}}$

حيث : $Z_{\overrightarrow{AB}} = Z_B - Z_A$

ولاحقة النقطة I منتصف $[AB]$ هو Z_I حيث $Z_I = \dfrac{Z_A + Z_B}{2}$

أمثلة :

نعتبر العددان المركبان: $Z_1 = 3 + 2i$; $Z_2 = -4 + 5i$.

1) احسب كل من $Z_1 + Z_2$, $Z_1 \times Z_2$.

2) احسب Z_1^2 ; Z_2^3 .

الحل :

1) • $Z_1 + Z_2 = (3 - 4) + i\,(2 + 5)$ ومنه : $Z_1 + Z_2 = -1 + 7i$

• $Z_1 \times Z_2 = (3 + 2i)\,(-4 + 5i) = -12 + 15i - 8i + 10i^2 = -12 + 7i - 10$

و منه : $Z_1 \times Z_2 = -22 + 7i$

2) $Z_1^2 = (3 + 2i)^2 = (3)^2 + 2(3) \times 2i + (2i)^2$

و منه : $Z_1^2 = 9 + 12i - 4$ أي: $Z_1^2 = 5 + 12i$

$$Z_2^3 = (-4 + 5i)^3 = (-4)^3 + 3(-4)^2 \times 5i + 3(-4)\,(5i)^2 + (5i)^3$$

$$= -64 + 240i + 300 - 125i = 236 + 115i$$

4 الشكل الجبري لمقلوب عدد مركب

Z عدد مركب غير معدوم . حيث $Z = x + iy$.

لدينا : $\dfrac{1}{Z} = \dfrac{1}{x + iy} = \dfrac{(x - iy)}{(x + iy)\,(x - iy)} = \dfrac{x - iy}{x^2 + y^2}$

و منه : $\dfrac{1}{Z} = \dfrac{x}{x^2 + y^2} - i\,\dfrac{y}{x^2 + y^2}$ (جعل المقام حقيقي)

وهو الشكل الجبري لمقلوب العدد المركب Z غير المعدوم. أي x و y غير معدومين معا.

5 حاصل قسمة عددين مركبين

Z و Z' عددان مركبان حيث: $Z' \neq 0$ مع $Z = x + iy$ و $Z' = x' + iy'$

$$\frac{Z}{Z'} = Z \times \frac{1}{Z'} = (x + iy) \times \left(\frac{x'}{x'^2 + y'^2} - i\,\frac{y'}{x'^2 + y'^2}\right)$$

$$= \frac{xx'}{x'^2 + y'^2} - i\,\frac{xy'}{x'^2 + y'^2} + i\,\frac{x'y}{x'^2 + y'^2} + \frac{yy'}{x'^2 + y'^2} = \frac{xx' + yy'}{x'^2 + y'^2} + i\,\frac{x'y - xy'}{x'^2 + y'^2}$$

وهو الشكل الجبري للعدد المركب Z/Z' أي حاصل قسمة العدد المركب Z على العدد المركب غير المعدوم Z' .

تطبيق :

M نقطة من المستوى لاحقتها $Z = x + iy$ ، M' نقطة من المستوى لاحقتها $Z' = \dfrac{Z + 1}{Z - 1}$

1) اكتب Z' على الشكل الجبري.

2) عين مجموعة النقط M بحيث يكون Z' حقيقي .

3) عين مجموعة النقط M بحيث يكون Z' تخيلي صرف .

الحل :

1) كتابة Z' على الشكل الجبري :

$$Z' = \frac{x+iy+1}{x+iy-1} = \frac{x+1+iy}{x-1+iy} = \frac{(x+iy+1)(x-1-iy)}{(x+iy-1)(x-1-iy)}$$

$$Z' = \frac{x^2+y^2-1}{(x-1)^2+y^2} + i\,\frac{-2y}{(x-1)^2+y^2}$$

2) تعيين مجموعة النقط M بحيث يكون Z' حقيقي :

Z' حقيقي يكافئ : $\frac{-2y}{(x-1)^2+y^2} = 0$ ويكافئ : $\begin{cases} y=0 \\ (x\,;y) \neq (1\,,0) \end{cases}$.

ومنه مجموعة النقط M هي محور الفواصل باستثناء النقطة

$A(1;0)$.

3) تعيين مجموعة النقط M بحيث يكون Z' تخيلي صرف :

Z' تخيلي صرف يكافئ : $\frac{x^2+y^2-1}{(x-1)^2+y^2} = 0$ ويكافئ : $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ (x\,;y) \neq (1\,,0) \end{cases}$

ومنه مجموعة النقط M هي دائرة مركزها O ونصف قطرها 1 باستثناء النقطة $A(1;0)$.

تمرين

1 – أحسب i^3 ، i^4 ، i^5 ، ... ، i^n (حسب قيم n الطبيعية)

2- احسب $S = 1+i+i^2+...+i^7$

3 – أحسب $S'_n = 1+i+i^2+...+i^n$ وذلك حسب قيم n

التمرين رقم 15 صفحة 145 من الكتاب المدرسي

حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلات ذات المجهول z التالية (تعطى الحلول على الشكل الجبري)

أ. $(1-i)z = 3+i$.

ب. $3z-2+i = (1+i)z-1-2i$.

جـ. $(3-4i)z^2 = iz$.

د. $\frac{z+1}{z-1} = 2i$.

التمرين رقم 16 صفحة 145 من الكتاب المدرسي حل في $\mathbb{C}$ المعادلات ذات المجهول z التالية :

أ. $2\bar{z} = -1+i$.

ب. $(2z+1-i)(i\bar{z}+i-2) = 0$. جـ. $\frac{\bar{z}-1}{\bar{z}+1} = i$.

التمرين رقم 17 صفحة 145 من الكتاب المدرسي أكتب بدلالة $\bar{z}$ ، مرافق الأعداد المركبة Z التالية :

أ. $Z = 2+3iz$. ب. $Z = (2+iz)(1+3z)$.

جـ. $Z = \frac{2+iz}{z+2}$. د. $Z = z^3 - iz^2 + 3z - 3i$.

تمرين 1: أكتب على الشكل الجبري الأعداد المركبة الآتية :

(1 $z_1 = (1-i)^4$ ، (2 $z_2 = (-2+i\sqrt{3})(3-5i) + \left(1-\frac{1}{2}i\right)\left(\frac{3}{2}+4i\right)$ ، (3 $z_3 = (-7-2i)(6-4i)^2$

الحل:(1 $z_1 = (1-i)^4$ و منه $z_1 = \left((1-i)^2\right)\left((1-i)^2\right) = (-2i)(-2i)$ إذن $z_1 = 4i^2 = -4$.

(2 $z_2 = (-2+i\sqrt{3})(3-5i) + \left(1-\frac{1}{2}i\right)\left(\frac{3}{2}+4i\right)$.

و منه $z_2=-6+3i\sqrt{3}+10i-5i^2\sqrt{3}+\frac{3}{2}-\frac{3}{4}i+4i-2i^2$ إذن

$z_2=-\frac{5}{2}+5\sqrt{3}+\left(\frac{53}{4}+3\sqrt{3}\right)i$.

3) $z_3=(-7-2i)(6-4i)^2$ و منه $z_3=(-7-2i)(36-48i+16i^2)=(-7-2i)(20-48i)$

إذن $z_3=-140+336i-40i+96i^2=-236+296i$.

تمرين 2: أكتب على الشكل الجبري الأعداد المركبة الآتية :

1) $z_1=\frac{5}{1-2i}$ ، 2) $z_2=\frac{-7+4i}{4-7i}$ ، 3) $z_3=\frac{3+2i}{(1+i)(-6-5i)}$.

الحل: 1) $z_1=\frac{5}{1-2i}$ بضرب البسط و المقام في مرافق المقام نحصل على:

$z_1=\frac{5(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}$ أي $z_1=\frac{5(1+2i)}{5}=1+2i$.

2) $z_2=\frac{-7+4i}{4-7i}$ بضرب البسط و المقام في مرافق المقام نحصل على:

$z_2=\frac{(-7+4i)(4+7i)}{(4-7i)(4+7i)}=\frac{-28+16i-49i+28i^2}{16+49}$ أي

$z_2=\frac{-56-33i}{65}=-\frac{56}{65}-\frac{33}{65}i$.

3) $z_3=\frac{3+2i}{(1+i)(-6-5i)}$ نقوم أولا بكتابة المقام على الشكل الجبري :

$z_3=\frac{3+2i}{-6-6i-5i-5i^2}=\frac{3+2i}{-1-11i}$ بضرب البسط و المقام في مرافق المقام نحصل على:

$z_3=\frac{(3+2i)(-1+11i)}{(-1-11i)(-1+11i)}=\frac{-3+33i-2i+22i^2}{1+121}$ أي

$z_3=\frac{-25+31i}{122}=-\frac{25}{122}+\frac{31}{122}i$

تمرين 3: n عدد طبيعي غير معدوم .

1) أكتب على الشكل الجبري كل من : i^3 ، i^4 ، i^5 ، i^6 ، i^7 ، i^8 .

2) ناقش تبعا لقيم n كتابة i^n على الشكل الجبري .

الحل: 1)

$i^3=i^2\times i=-i$ ، $i^4=i^2\times i^2=1$ ، $i^5=i^4\times i=i$ ، $i^6=-1$ ، $i^7=-i$ ، $i^8=1$

2) نلاحظ أن $i^4=1$ و منه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم k : $i^{4k}=1$.

كذلك : $i^{4k+1}=i^{4k}\times i=i$ ، $i^{4k+2}=i^{4k}\times i^2=-1$. $i^{4k+3}=i^{4k}\times i^3=-i$.

كل عدد طبيعي n يكتب على أحد الأشكال التالية : $4k$ ، $4k+1$ ، $4k+2$ و $4k+3$.

تمرين 4: حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z في الحالتين الآتيتين :

1) $(2-3i)z-26=0$. 2) $z-21i=-14+i\frac{\sqrt{3}}{2}z$.

الحل: 1) $(2-3i)z-26=0$ أي $(2-3i)z=26$ و بالتالي $z=\frac{26}{2-3i}$.

بضرب البسط و المقام في مرافق المقام نحصل على $z=\frac{26(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)}=4+6i$

لتكن S مجموعة الحلول $S=\{4+6i\}$.

2) $z-21i=-14+i\frac{\sqrt{3}}{2}z$. نضرب الطرفين في 2 نحصل على $2z-42i=-28+i\sqrt{3}z$

أي $2z-i\sqrt{3}z=-28+42i$ أي $z\left(2-i\sqrt{3}\right)=-28+42i$ وبالتالي $z=\frac{-28+42i}{2-i\sqrt{3}}$

بضرب البسط و المقام في مرافق المقام نحصل على $z=\frac{\left(-28+42i\right)\left(2+i\sqrt{3}\right)}{\left(2-i\sqrt{3}\right)\left(2+i\sqrt{3}\right)}$

$$z=\left(-4+6i\right)\left(2+i\sqrt{3}\right)=-8-6\sqrt{3}+\left(12-4\sqrt{3}\right)i$$

لتكن S' مجموعة الحلول $S'=\left\{-8-6\sqrt{3}+\left(12-4\sqrt{3}\right)i\right\}$.

تمرين 5: ليكن كثير الحدود P للمتغير المركب z المعرف كما يلي : $P(z)=z^3+z^2-2$

1) أثبت أنه من أجل كل عدد مركب z : $\overline{P(z)}=P(\overline{z})$.

2) أحسب $P(1)$ و $P(-1-i)$.

3) استنتج جذرا آخر لـ $P(z)$.

الحل: 1) $\overline{P(z)}=\overline{z^3+z^2-2}$.

$\overline{P(z)}=\overline{z^3}+\overline{z^2}-\overline{2}$ بتطبيق خاصية المجموع.

$\overline{P(z)}=\left(\overline{z}\right)^3+\left(\overline{z}\right)^2-2$ بتطبيق خاصية الأس . إذن $\overline{P(z)}=P(\overline{z})$.

2) $P(1)=0$.

$$P(-1-i)=(-1-i)^3+(-1-i)^2-2$$

$P(-1-i)=2i(-1-i)+2i-2=0$.

3) $P(-1-i)=0$ و منه $\overline{P(-1-i)}=0$ وبالتالي $P\left(\overline{-1-i}\right)=0$

أي $P(-1+i)=0$ إذن $-1+i$ جذر لـ $P(z)$.

تمارين تطبيقية:

التمرين الاول

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{OI},\vec{OJ}\right)$ نعتبر النقطتان

$A(-2,1)$ ، $B(0,5)$ والمستقيم (Δ) الذي معادلته $y=-x+3$

- عيّن لاحقتي النقطتين A ، B
- عيّن لاحقة النقط M التي تنتمي إلى (Δ).

التمرين الثاني :

في المستوي المركب $\left(O,\vec{OI},\vec{OJ}\right)$ نعتبر العدد المركب $z=x^2+y^2-4+i\left(2x+y+1\right)$

عيّن (Γ) مجموعة النقط M من المستوي المركب ذات اللاحقة z بحيث يكون z حقيقيا.

عيّن (Ω) مجموعة النقط M من المستوي المركب ذات اللاحقة z بحيث يكون z تخيليا صرفا.

التمرن الثالث:

في المستوي المركب $\left(O,\vec{OI},\vec{OJ}\right)$ نعتبر النقط A ، B ، C التي لواحقها 1 ، $-2-i$ ، $4i$

عيّن لاحقة النقطة D حتى يكون الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع.

المؤسســـــــة:	المستــــــــوى: الثالثة رياضيات
السنة الدراسية:	ميـــدان التعلم: هندسة
التاريــــــــخ:	الوحدة التعلمية: الاعداد المركبة
توقيت الحصة :	موضوع الحصة : طويلة وعمدة عدد مركب

المكتسبات المستهدفة: حساب طويلة وعمدة عدد مركب

الأنشطة المقترحة وطبيعتها	الإنجاز (سـير الحصة)	التعليمات والتوجيهات

الأنشطة المقترحة وطبيعتها

نشاط

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\overline{OI},\overline{OJ})$.

ونعتبر الأعداد $z_A=3+4i$، $z_B=2-2i$، $z_C=3i$، $z_D=-1+\sqrt{3}i$، $z_E=-1-i$ لواحق A، B، C، D، E على التوالي.

- مثل هذه النقط في المستوي ثم استنتج الأطوال OA، OB، OC، OD، OE.
- استنتج أقياسا بالراديان للزوايا الموجهة: $(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OA})$، $(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OB})$، $(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OC})$، $(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OD})$، $(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OE})$. هل توجد أقياس أخرى؟

الإنجاز (سـير الحصة)

نشاط 1

$O;\vec{i},\vec{j}$ معلم متعامد متجانس مباشر من المستوي. A و B النقطتان من المستوي التي إحداثياتها القطبية $\left(2,\frac{\pi}{4}\right)$ و $\left(\frac{1}{2},\frac{2\pi}{3}\right)$ على الترتيب في المعلم $O;\vec{i}$.

1) أنشئ النقطتين A و B . عين قيسا للزاوية $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$.

2) عين الإحداثيات الديكارتية للنقطتين A و B .

3) A' نظيرة A بالنسبة إلى O مبدأ المعلم . عين الإحداثيات الديكارتية والقطبية للنقطة A'

4) B' نظيرة B بالنسبة إلى محور الفواصل . عين الإحداثيات الديكارتية والقطبية للنقطة B' .

5) $B"$ نظيرة B بالنسبة إلى حامل التراتيب . عين الإحداثيات الديكارتية والقطبية للنقطة $B"$.

الحالة العامة $O;\vec{i},\vec{j}$ معلم متعامد متجانس مباشر من المستوي.

M نقطة من المستوي تختلف عن O إحداثياها القطبية r,θ في المعلم $O;\vec{i}$.

1) عين شرطا على r كي تكون النقطة M تنتمي إلى الدائرة التي نصف قطرها 3 .

2) عين شرطا على θ كي تكون النقطة M تنتمي إلى حامل محور التراتيب .

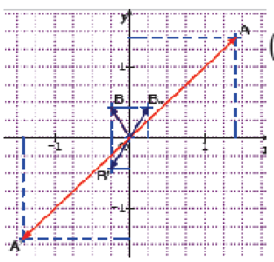
3) عين شرطا على θ كي تكون النقطة M تنتمي إلى حامل محور الفواصل .

4) عين شرطا على θ كي تكون النقطة M تنتمي إلى المستقيم ذي المعادلة $y=x$.

الحل 1

1) إنشاء النقطتين A و B .

الإحداثيتين القطبيتين لـ A هما $\left(2;\frac{\pi}{4}\right)$ إذن $OA=2$ و $(\vec{i};\overrightarrow{OA})=\frac{\pi}{4}$.



وكذلك الإحداثيتين القطبيتين لـ B هما $\left(\frac{1}{2};\frac{2\pi}{3}\right)$ إذن $OB=\frac{1}{2}$ و $(\vec{i};\overrightarrow{OB})=\frac{2\pi}{3}$

2) $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})=(\vec{i};\overrightarrow{OB})-(\vec{i};\overrightarrow{OA})=\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{12}$

3) الإحداثيات الديكارتية للنقطتين A و B :

$x_A=OA\cos\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}$ و $y_A=OA\sin\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}$ ، إذن $A(\sqrt{2};\sqrt{2})$.

$x_B=OB\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{4}$ و $y_A=OA\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{4}$ ، إذن $B\left(-\frac{1}{4};\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$.

3) A' نظيرة A بالنسبة إلى O مبدأ المعلم. لدينا $A(\sqrt{2};\sqrt{2})$ ومنه $A'(-\sqrt{2};-\sqrt{2})$ و $A'\left(2;\frac{\pi}{4}+\pi\right)$.

4) B' نظيرة B بالنسبة إلى حامل محور الفواصل. لدينا $B\left(-\frac{1}{4};\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ ومنه $B'\left(-\frac{1}{4};-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ و $B'\left(\frac{1}{2};-\frac{2\pi}{3}\right)$.

5) $B"$ نظيرة B بالنسبة إلى حامل محور التراتيب. الإحداثيات الديكارتية $B"\left(\frac{1}{4};\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ والقطبية $B"\left(\frac{1}{2};\frac{\pi}{3}\right)$.

الحالة العامة

1) لدينا $OM=r$ ولكي تكون M تنتمي إلى الدائرة التي نصف قطرها 3 يجب إذن $r=3$.

2) تكون النقطة M تنتمي إلى حامل محور التراتيب معناه $\theta=\frac{\pi}{2}+k\pi$ مع $k\in\mathbb{Z}$.

3) تكون النقطة M تنتمي إلى حامل محور الفواصل معناه $\theta=k\pi$ مع $k\in\mathbb{Z}$.

4) تكون النقطة M تنتمي إلى المستقيم ذي المعادلة $y=x$ معناه $\theta=\frac{\pi}{4}+k\pi$ مع $k\in\mathbb{Z}$.

التعليمات والتوجيهات

ندرس الأعداد المركبة في إطار هندسي

3/ طويلة وعمدة عدد مركب

1.3 الطويلة

تعريف

z عدد مركب حيث: $z=x+iy$ (x و y عددان حقيقيان) نسمي طويلة
z العدد الحقيقي الموجب الذي نرمزله $|z|$ حيث $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ (الشكل الجبري)

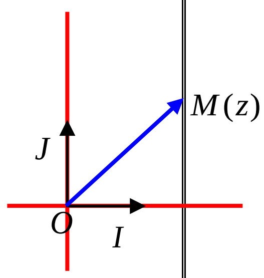
أمثلة : $|2+8i|=\sqrt{4+64}=\sqrt{68}$ ، $|-4-3i|=\sqrt{16+9}=5$. $|-7i|=\sqrt{49}=7$

ملاحظات: • إذا كان z عددا حقيقيا فإن طويلة z هي القيمة المطلقة للعدد z .

• $z=0$ يعني $|z|=0$. • $|z|^2=x^2+y^2$.

1 التفسير الهندسي

المستوى المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}$. M نقطة من المستوى لاحقتها z



1) أحسب طول الشعاع $\overrightarrow{OM}$

2) استنتج طويلة العدد المركب z

z عدد مركب حيث $z=x+iy$ إذا كانت M صورة z فإن $OM=|z|$

2 الخواص

من أجل كل عددين مركبين z و z'

* $|\bar{z}|=|z|$ * $|-z|=|z|$ * $|z.z'|=|z|.|z'|$ * $\left|\frac{z}{z'}\right|=\frac{|z|}{|z'|}$ مع $z'\neq 0$

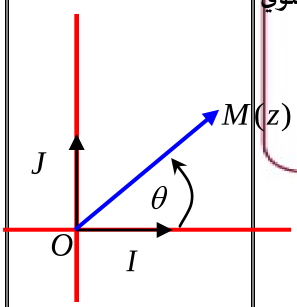
* $|z^n|=|z|^n$ * $|z+z'|\leq|z|+|z'|$ متباينة مثلثية

ملاحظة: A و B نقطتان لاحقتاهما z_A و z_B على الترتيب : $AB=|z_B-z_A|$.

2.3 العمدة

تعريف

z عدد مركب غير معدوم حيث $z=x+iy$ (x و y عددان حقيقيان)
في المستوى مركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ}\right)$ لتكن M نقطة من المستوى
لاحقتها z نسمي عمدة العدد المركب z و نرمزله $Arg(z)$ كل قيس بالراديان للزاوية الموجهة
$\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM}\right)$



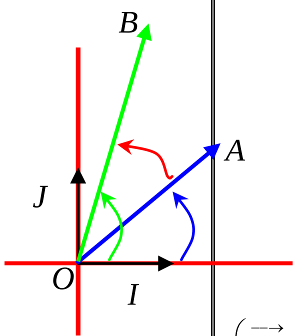
ملاحظات: • كل عدد مركب غير معدوم z له عدد غير منته من العمد .

إذا كان θ عمدة لِ z فإن $k\in\mathbb{Z}$ $\theta+2k\pi$ عمدة لِ z .

و نكتب $\arg z\equiv\theta\ 2\pi$.

• A و B نقطتان لاحقتاهما z_A و z_B على الترتيب.

$\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)=\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OB}\right)-\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OA}\right)$ أي $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)=\arg z_B-\arg z_A$



• $\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{AB}\right)=\arg\left(z_B-z_A\right)$.

• الصفر ليس له عمدة

* $Arg(z_B-z_A)=\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{AB}\right)$

$$\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right)=\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{OI}\right)+\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{CD}\right)=-Arg(z_B-z_A)+Arg(z_D-z_C)=Arg\left(\frac{z_D-z_C}{z_B-z_A}\right)$$

مثال1) عين طويلة وعمدة لكل من أعداد المركبة التالية :

$\beta=-\sqrt{3}+i$ ، $\eta=2-2i$ ، $\alpha=-1-i$ ، $z=1+i$

2) نفس السؤال بالنسبة للاعداد المركبة التالية $a=\left(-\sqrt{3}-i\right)\left(2+2\sqrt{3}i\right)$ ، $z=\dfrac{1+i}{\sqrt{3}-i}$

خواص من أجل كل عددين مركبين z و z'

* $Arg\left(\dfrac{z}{z'}\right)=Arg(z)-Arg(z')$ مع $z'\neq 0$

* $Arg(z.z')=Arg(z)+Arg(z')$

* $Arg\left(\dfrac{1}{z}\right)=Arg\left(\overline{z}\right)=-Arg(z)$ مع $z\neq 0$

* $Arg(z^n)=n\,Arg(z)$ مع $n\in\mathbb{N}^*$

تمرين 1:عين طويلة العدد المركب z في كل حالة من الحالات الآتية.

1) $z=(2+i)(-5+3i)$ (2 $z=\dfrac{3-4i}{\sqrt{3}-i}$ (3 $z=(-3+4i)^4$ (4 $z=\left(\dfrac{(1-i)^6}{(-8-6i)^2}\right)^3$

الحل: 1) $z=(2+i)(-5+3i)$

$|z|=|(2+i)(-5+3i)|=|2+i||-5+3i|$ أي $|z|=\sqrt{5}\times\sqrt{34}=\sqrt{170}$.

2) $z=\dfrac{3-4i}{\sqrt{3}-i}$ $|z|=\left|\dfrac{3-4i}{\sqrt{3}-i}\right|=\dfrac{|3-4i|}{|\sqrt{3}-i|}$ أي $|z|=\dfrac{\sqrt{9+16}}{\sqrt{3+1}}=\dfrac{5}{2}$.

3) $z=(-3+4i)^4$

$|z|=\left|(-3+4i)^4\right|=|-3+4i|^4$ أي $|z|=\left(\sqrt{9+16}\right)^4=5^4=625$.

4) $z=\left(\dfrac{(1-i)^6}{(-8-6i)^2}\right)^3$ $|z|=\left|\left(\dfrac{(1-i)^6}{(-8-6i)^2}\right)^3\right|=\left(\dfrac{\left|(1-i)^6\right|}{\left|(-8-6i)^2\right|}\right)^3=\left(\dfrac{|1-i|^6}{|-8-6i|^2}\right)^3$

أي $|z|=\left(\dfrac{8}{100}\right)^3=\dfrac{8}{15625}$.

تمرين 2: z عدد مركب حيث $z=x+iy$ و M صورته في المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$. نضع $a=|(1-i)z-2i|$

عين المجموعة S مجموعة النقط M من المستوي حتى يكون $a=2$.

الحل: $a=2$ يعني $|(1-i)z-2i|=2$ نعوض z بِ $x+iy$ نحصل على :

$|(1-i)(x+iy)-2i|=2$ معناه $|x+iy-ix-i^2y-2i|=2$

أي $|x+y+i(-x+y-2)|=2$.لنحسب $|x+y+i(-x+y-2)|$.

أي $|x+y+i(-x+y-2)|=\sqrt{(x+y)^2+(-x+y-2)^2}$

$|x+y+i(-x+y-2)|=\sqrt{x^2+2xy+y^2+x^2+y^2-2xy+4x-4y+4}$

أي $|x+y+i(-x+y-2)|=\sqrt{2x^2+2y^2+4x-4y+4}$

و بالتالي $\sqrt{2x^2+2y^2+4x-4y+4}=2$ نربع الطرفين

$2x^2+2y^2+4x-4y+4=4$ أي $(x+1)^2+(y-1)^2=2$

إذن المجموعة S هي الدائرة التي مركزها $\omega(-1,1)$ و نصف قطرها $r=\sqrt{2}$

المؤسســــــة:	المستـــــــــوى: الثالثة رياضيات
السنة الدراسية:	ميــدان التعلم: هندسة
التاريــــــــخ:	الوحدة التعلمية: الاعداد المركبة
توقيت الحصة :	موضوع الحصة : الكتابات المختلفة لعدد مركب ترميز أولير : $e^{i\alpha}$

المكتسبات المستهدفة: الانتقال من الشكل الجبري إلى الشكل المثلي و العكس.

الأنشطة المقترحة وطبيعتها	الإنجاز(ســير الحصة)	التعليمات والتوجيهات

- يرمز $e^{i\alpha}$ للعدد المركب $\cos\alpha + i\sin\alpha$

1/4 الشكل المثلثي لعدد مركب

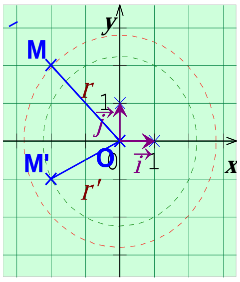
تذكير بالإحداثيات القطبية.

1.التعليم القطبي

ليكن $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ معلم مباشر متعامد و متجانس. لتكن (C) الدائرة المثلثية التي مركزها O .

تعريف: من أجل كل نقطة M غير منطبقة على O ، الثنائية (r,θ) ، حيث $OM = r$ و $\theta = \left(\vec{i},\overrightarrow{OM}\right)$ ، تسمى ثنائية إحداثات قطبية في المستوي للنقطة M و نرمز $M(r,\theta)$ (r عدد حقيقي موجب تماما و θ عدد حقيقي)

النقطة O تسمى القطب. $\left(O;\vec{i}\right)$ يسمى المحور القطبي،نقول أن r هو نصف القطر القطبي و θ إحدى الزوايا القطبية .



في الشكل $OM = 2\sqrt{2}$ و $\left(\vec{i},\overrightarrow{OM}\right) = \frac{3\pi}{4}$ إذا الاحداثيات القطبية للنطة M هي: $\left(2\sqrt{2};\frac{3\pi}{4}\right)$.

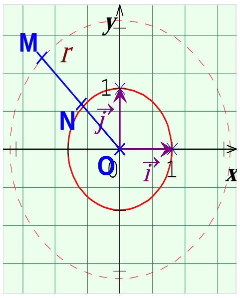
في الشكل $OM' = \sqrt{5}$ و $\left(\vec{i},\overrightarrow{OM}\right) = \frac{5\pi}{6}$ إذا الاحداثيات القطبية للنطة M هي: $\left(\sqrt{5};\frac{5\pi}{6}\right)$.

ملاحظة: الثنائية $M(r,\theta)$ تعرف نقطة وحيدة M .

2.العلاقة بين الاحداثيات القطبية و الاحداثيات الديكارتية:

مبرهنة: في معلم مباشر متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ لتكن (C) الدائرة المثلثة .إذا كانت النقطة M غير منطبقة على O و كانتإحداثياها الديكارتية $(x;y)$ و إحداثياها القطبية (r,θ) فإن:

$r = \sqrt{x^2+y^2}$ ؛ $x = r\cos\theta$ ؛ $y = r\sin\theta$



برهان: نصف المستقيم (OM) يقطع الدائرة (C) في N حيث $\overrightarrow{OM}$ و $\overrightarrow{ON}$ لهما نفس الإتجاه . بما أن $OM = r$ و $ON = 1$ فإن $\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{ON}$ بما أن N تنتمي إلى الدائرة المثلثة و $\left(\vec{i},\overrightarrow{ON}\right) = \left(\vec{i},\overrightarrow{OM}\right)$ فإن $N(\cos\theta;\sin\theta)$.إذا إحداثيات $M(r\cos\theta;r\sin\theta)$. ونعلم أن $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ و منه $r^2 = x^2+y^2$ إذا $r = \sqrt{x^2+y^2}$. و منه صحة المبرهنة .

1.1.4 تعاريف

تعريف

M نقطة من المستوي لاحقتها $z = x+iy$ و (r,θ) إحداثياها القطبية

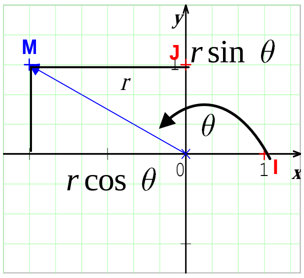
لنا : $z = x+iy$ و نعلم أن $x = r\cos\theta$ و $y = r\sin\theta$

إذن نجد بعد التعويض : $z = r\cos\theta + i\,r\sin\theta = r\,(\cos\theta + i\sin\theta)$

الشكل المثلثي لعدد مركب z

ملاحظة

- $[r,\theta]$ يسمى أيضا الشكل المثلثي للعدد المركب z
- $r=|z|$ و $\theta \equiv Arg(z)[2\pi]$
- $\cos\theta=\dfrac{\mathrm{Re}(z)}{|z|}=\dfrac{x}{|z|}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ و $\sin\theta=\dfrac{\mathrm{Im}(z)}{|z|}=\dfrac{y}{|z|}=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$



$r=|z|$ و $\theta=\arg z$. هذا الشكل يسمى الشكل المثلثي لِ z .

ملاحظة: إذا كان $z=x+iy$ ، $\cos\theta=\dfrac{x}{r}$ و $\sin\theta=\dfrac{y}{r}$.

خاصية: يكون عددان مركبان مكتوبان على الشكل المثلثي متساويين إذا وفقط إذا كانت لهما نفس الطويلة وعمدتان متوافقتان بترديد 2π .

خاصية: إذا كان $z=\lambda\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)$ و كان $\lambda>0$ فإن $\lambda=|z|$ و $\theta=\arg z$. الخاصيتان تستنتج مباشرة من التعريف .

2.1.4 خواص العمدة

خواص: z و z' عددان مركبان غير معدومين. $n\in\mathbb{N}^*$

$\arg\left(z.z'\right)=\arg z+\arg z'$. $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right)=\arg z-\arg z'$. $\arg\left(z^n\right)=n\arg z$

البرهان: نضع $z=r\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)$ و $z'=r'\left(\cos\theta'+i\sin\theta'\right)$.

- $z.z'=rr'\left[\left(\cos\theta\cos\theta'-\sin\theta\sin\theta'\right)+i\left(\sin\theta\cos\theta'+\sin\theta'\cos\theta\right)\right]$

بتطبيق دساتير الجمع : نحصل على $z.z'=rr'\left(\cos\left(\theta+\theta'\right)+i\sin\left(\theta+\theta'\right)\right)$

إذن $\arg\left(z.z'\right)=\arg z+\arg z'$.

- $\dfrac{z}{z'}=\dfrac{r}{r'}\left[\dfrac{\left[\left(\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\right)+i\left(\sin\theta\cos\theta'-\sin\theta'\cos\theta\right)\right]}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}\right]$

بتطبيق دساتير الجمع : نحصل على $\dfrac{z}{z'}=\dfrac{r}{r'}\left(\cos\left(\theta-\theta'\right)+i\sin\left(\theta-\theta'\right)\right)$

إذن $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right)=\arg z-\arg z'$.

- للبرهان على الخاصية $\arg\left(z^n\right)=n\arg z$ نستعمل الخاصية $\arg\left(z.z'\right)=\arg z+\arg z'$ و الاستدلال بالتراجع.

تمرين: عين الطويلة وعمدة للعدد z ثم أكتبه على الشكل المثلثي في الحالتين الآتيتين :

1) $z=1+i$ 2) $z=\sqrt{2}-i\sqrt{6}$

الحل: 1) $z=1+i$. $|z|=|1+i|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$. ليكن θ عمدة لِ z .

$\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ و $\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ و منه $\dfrac{\pi}{4}$ عمدة لِ z أي $z=\sqrt{2}\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)+\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$

2) $z=\sqrt{2}-i\sqrt{6}$. $|z|=\left|\sqrt{2}-i\sqrt{6}\right|=\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2+\left(-\sqrt{6}\right)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

ليكن θ عمدة لِ z . $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}$ و $\sin\theta=\dfrac{-\sqrt{6}}{2\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

ومنه $\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$ عمدة لِ z أي $z=3\sqrt{2}\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)+\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right)$.

شرح اخر

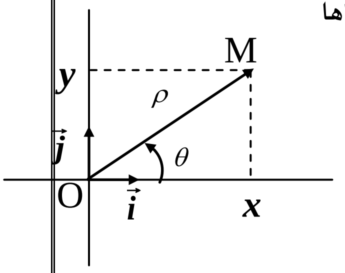
المستوى منسوب في ما يلي إلى معلم متعامد و متجانس و مباشر $\left(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\right)$. M نقطة من المستوى إحداثياها القطبيان $[\rho\,;\,\theta]$ حيث ρ عدد حقيقي موجب و θ عدد حقيقي و عليه Z لاحقة النقطة M يكتب على الشكل : $\rho\,(\cos\theta + i\,\sin\theta)$

1). $\rho\,(\cos\theta + i\,\sin\theta)$ يسمى الشكل المثلثي للعدد Z

2). نصف القطر القطبي OM يحقق $OM = \rho$ ويسمى طويلة Z ونرمز له بالرمز $|Z|$.

3). الزاوية القطبية $\left(\vec{i}\,;\overrightarrow{OM}\right)$ تحقق $\left(\vec{i}\,;\overrightarrow{OM}\right) = \theta + 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$ و تسمى عمدة العدد المركب Z . و نرمز لها بالرمز (Z) arg ونكتب : $\arg(Z) = \theta\ [2\pi]$ و تقرأ θ بترديد 2π

البرهان :



لتكن M نقطة من المستوى إحداثياها القطبيان $[\rho\,;\,\theta]$ فيكون إحداثياها $(x;y)$ معرفان كما يلي : $x = \rho\cos\theta ; y = \rho\sin\theta$

وعليه إذا كان Z لاحقة M فإن : $Z = x + iy = \rho\cos\theta + i\rho\sin\theta$

ومنه : $Z = \rho\,(\cos\theta + i\sin\theta)$

ملاحظات :

لدينا : $\left\|\overrightarrow{OM}\right\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ وعليه : $|Z| = \left\|\overrightarrow{OM}\right\| = \rho$ وعليه :

$$\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} ; \sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

وإذا كان **Z = 0** فإن : $\rho = 0$ لكن Z ليس له عمدة.

مثال :

عين طويلة و عمدة الأعداد المركبة الآتية :

$$Z_3 = \sqrt{3} - i \ ; \ Z_2 = i \ ; \ Z_1 = 1 + i$$

الحل :

4). $Z_1 = 1 + i$; $|Z_1| = \sqrt{(1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$ نفرض θ_1 عمدة Z_1 فيكون : $\cos\theta_1 = \frac{x}{|Z_1|}$ و $\sin\theta_1 = \frac{y}{|Z_1|}$

ومنه : $\cos\theta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ و $\sin\theta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ إذن : $\theta_1 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \ ; \ k \in \mathbb{Z}$

5). $Z_2 = i$; $|Z_2| = \sqrt{0^2 + (1)^2} = 1$ نفرض θ_2 عمدة Z_2 فيكون : $\cos\theta_2 = \frac{x}{|Z_2|}$ و $\sin\theta_2 = \frac{y}{|Z_2|}$

$\cos\theta_2 = \frac{0}{1} = 0$ ، $\sin\theta_2 = \frac{1}{1}$ إذن : $\theta_2 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \ ; \ k \in \mathbb{Z}$

6). $Z_3 = \sqrt{3} - i$; $|Z_3| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = 2$ نفرض θ_3 عمدة Z_3 فيكون :

$\cos\theta_3 = \frac{x}{|Z_3|}$ ، $\sin\theta_3 = \frac{y}{|Z_3|}$ إذن : $\cos\theta_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ و $\sin\theta_3 = \frac{-1}{2}$

وعليه : $\theta_3 = \frac{-\pi}{6} + 2k\pi \ ; \ k \in \mathbb{Z}$

خواص : Z عدد مركب غير معدوم.

1) Z حقيقي موجب يكافئ : $\arg(Z) = 0 + 2k\pi \ ; \ k \in \mathbb{Z}$

2) Z حقيقي سالب يكافئ : $\arg(Z) = \pi + 2k\pi \ ; \ k \in \mathbb{Z}$

3) $Im(Z) > 0$ و $Re(Z) = 0$ يكافئ : $\arg(Z) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \ ; \ k \in \mathbb{Z}$

4) $Im(Z) < 0$ و $Re(Z) = 0$ يكافئ : $\arg(Z) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \ ; \ k \in \mathbb{Z}$

أمثلة :

عين عمدة كلا من الأعداد المركبة الآتية دون حساب $Z_1 = 3$; $Z_2 = -4$; $Z_3 = 5i$; $Z_4 = -2i$

الحل :

7). $Z_1 = 3$ ومنه : $\arg(Z_1) = 0 + 2k\pi \;;\; k \in \mathbb{Z}$

8). $Z_2 = -4$ ومنه: $\arg(Z_2) = \pi + 2k\pi \;;\; k \in \mathbb{Z}$

9). $Z_3 = 5i$ ومنه: $\arg(Z_3) = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \;;\; k \in \mathbb{Z}$

10). $Z_4 = -2i$ ومنه: $\arg(Z_4) = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \;;\; k \in \mathbb{Z}$

تمرين: ليكن العددان المركبان $Z_1 = \; 1+i \quad -1-i\sqrt{3}$ و $Z_2 = \dfrac{1+i}{-1-i\sqrt{3}}$:

1) أكتب Z_1 و Z_2 على الشكل الجبري.   2) أكتب Z_1 و Z_2 على الشكل المثلثي.

الحل: 1) $Z_1 = \; 1+i \quad -1-i\sqrt{3} \; = -1+\sqrt{3}+i \quad -1-\sqrt{3}$.

$$Z_2 = \frac{1+i}{-1-i\sqrt{3}} = \frac{1+i \quad -1+i\sqrt{3}}{-1-i\sqrt{3} \quad -1+i\sqrt{3}} = \frac{-1-\sqrt{3}+i \quad -1+\sqrt{3}}{4} \; .$$

$$Z_2 = \frac{-1-\sqrt{3}}{4} + i\frac{-1+\sqrt{3}}{4} \; .$$

2) $1+i = \sqrt{2}\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$. $-1-i\sqrt{3} = 2\left(\cos\left(\dfrac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\dfrac{4\pi}{3}\right)\right)$.

$$Z_1 = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{4\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{4\pi}{3}\right)\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{19\pi}{12}\right) + \sin\left(\frac{19\pi}{12}\right)\right) .$$

$$Z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{4\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{4\pi}{3}\right)\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(-\frac{13\pi}{12}\right) + \sin\left(-\frac{13\pi}{12}\right)\right) .$$

تمرين: في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}$ ، لتكن النقط A ، B و C التي لواحقها $z_A = -i\sqrt{3}$ ، $z_B = 3+2i\sqrt{3}$ ، $z_C = -3+2i\sqrt{3}$.

1) أعط تفسيرا هندسيا لطويلة و عمدة العدد المركب $\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$.

2) ما هي طبيعة المثلث ABC .

الحل: 1) $\left|\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right| = \dfrac{|z_B - z_A|}{|z_C - z_A|} = \dfrac{AB}{AC}$.

$$\arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) = \arg \; z_B - z_A \; - \arg \; z_C - z_A$$

$$\arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) = \; \overrightarrow{OI},\overrightarrow{AB} \; - \; \overrightarrow{OI},\overrightarrow{AC} \; = \; \overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB} \; .$$

2) $\dfrac{AB}{AC} = 1 = \left|\dfrac{3+3i\sqrt{3}}{-3+3i\sqrt{3}}\right| = \left|\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right|$ و منه $AB = AC$.

$\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB} \; = \arg\left(\dfrac{3+3i\sqrt{3}}{-3+3i\sqrt{3}}\right)$ و منه $\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB} \; = -\dfrac{\pi}{3}$ إذن المثلث ABC متقايس الأضلاع .

2/4 الشكل الاسي لعدد مركب

1.2.4 الشكل الاسي لعدد مركب طويلته 1

المستوى المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$. z_0 عدد مركب طويلته 1 و M_0 صورته. لتكن θ عمدة لِ z_0. $z_0=\cos(\theta)+i\sin(\theta)$ ، لتكن f الدالة التي بكل عدد حقيقي θ ترفق العدد المركب الذي طويلته 1 و θ عمدة له. أي $f(\theta)=\cos(\theta)+i\sin(\theta)$.

θ و θ' عددان حقيقيان لنحسب $f(\theta+\theta')$ و $f(\theta)\cdot f(\theta')$.

$$f(\theta+\theta')=\cos(\theta+\theta')+\sin(\theta+\theta')$$

اي $f(\theta+\theta')=(\cos\theta\cos\theta'-\sin\theta\sin\theta')+i(\sin\theta\cos\theta'+\sin\theta'\cos\theta)$

$$f(\theta)\cdot f(\theta')=(\cos(\theta)+i\sin(\theta))(\cos(\theta')+i\sin(\theta'))$$

اي $f(\theta)\cdot f(\theta')=(\cos\theta\cos\theta'-\sin\theta\sin\theta')+i(\sin\theta\cos\theta'+\sin\theta'\cos\theta)$

بما أن الدالة الأسية تحول مجموع عددين إلى جداء صورتيهما تم التفكير في الترميز الأسي للعدد z_0.

نضع $z_0=e^{i\theta}$.

تعريف

العدد المركب الذي طويلته 1 و q عمدته يكتب e^{iq} حيث :

$e^{iq}=\cos q+i\sin q$ هذا الترميز يسمى بترميز أولر

تمرين: 1) أكتب الأعداد المركبة الآتية على الشكل الجبري :

• $z_0=2e^{i\frac{\pi}{3}}$ • $z_1=8e^{-i\frac{\pi}{4}}$ • $z_2=5e^{i\frac{\pi}{2}}$ • $z_3=6e^{i\frac{2\pi}{3}}$

2) أكتب الأعداد المركبة الآتية على الشكل الأسي :

• $z_0=-7i$ • $z_1=-3-3i$ • $z_2=(1-i)^8$ $z_3=(\sqrt{3}+i)^6$

الحل: 1) $z_0=2e^{i\frac{\pi}{3}}=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$. أي $z_0=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=1+i\sqrt{3}$.

$z_1=8e^{-i\frac{\pi}{4}}=8\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$. أي $z_1=8\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=4\sqrt{2}-4i\sqrt{2}$.

$z_2=5e^{i\frac{\pi}{2}}=5\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$.أي $z_2=5(0+i(1))=5i$.

$z_3=6e^{i\frac{2\pi}{3}}=6\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$.أي $z_3=6\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-3+3i\sqrt{3}$

2) $z_0=-7i=7e^{-i\frac{\pi}{2}}$ $z_1=-3-3i=3\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)$.أي $z_1=3\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$.

$$z_2=(1-i)^8=\left(\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)\right)^8 .$$

أي $z_2=\left(\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)\right)^8=\left(\sqrt{2}\left(e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)\right)^8=16e^{-2i\pi}$.

$$z_3=(\sqrt{3}+i)^6=\left(2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)\right)^6 .$$

أي $z_3=2^6\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)^6=64\left(\cos\left(\frac{6\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{6\pi}{6}\right)\right)=64(\cos(\pi)+i\sin(\pi))$.

إذن $z_3=64e^{i\pi}$.

2.2.4 الشكل الاسي لعدد غير معدوم

تعريف

z عدد مركب طويلته r و عمدته q يكتب : $z = re^{iq}$ هذه الكتابة تسمى الشكل الأسي للعدد المركب z

مثال: اكتب العدد المركب $Z = -2\sqrt{2} + 2\sqrt{6}\,i$ على الشكل الأسي :

الحل: $\arg(Z) = \frac{2\pi}{3}$, $|Z| = 4\sqrt{2}$ وعليه : $Z = 4\sqrt{2}\,.\,e^{\frac{2\pi}{3}i}$

3.2.4 قواعد الحساب على الشكل الاسي

خواص

q و q' عددان حقيقيان

$e^{i(q+q')} = e^{iq}e^{iq'}$, $\overline{e^{iq}} = e^{-iq}$, $\frac{e^{iq}}{e^{iq'}} = e^{i(q-q')}$

أمثلة : $z_1 = 1+i$ يكتب $z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ ، $z_1 = -1-i\sqrt{3}$ يكتب $z_1 = 2e^{i\frac{4\pi}{3}}$

$z_1 = 1-i$ يكتب $z_1 = \sqrt{2}\,e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}$ ، $z_1 = -\sqrt{3}+i$ يكتب $z_1 = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$

4.2.4 دستور موافر

خواص

z عدد مركب طويلته r و عمدته q من أجل كل عدد صحيح و غير معدوم n

لدينا $\left(e^{iq}\right)^n = e^{inq}$

أمثلة : $z_1 = 1+i$ يكتب $z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ ، $z_1 = -1-i\sqrt{3}$ يكتب $z_1 = 2e^{i\frac{4\pi}{3}}$

$z_1 = 1-i$ يكتب $z_1 = \sqrt{2}\,e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}$ ، $z_1 = -\sqrt{3}+i$ يكتب $z_1 = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$

نتائج :

لدينا : $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$ ومنه : $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$.

دستور أولير: $\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ ، $\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$

ملاحظات

لدينا $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$

ومنه $\cos(\theta+\theta') = \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta'$

و $\sin(\theta+\theta') = \sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta'$

لدينا : $\left(e^{i\theta}\right)^2 = e^{2i\theta}$ ومنه $\cos 2\theta = \cos\theta - \sin\theta$ و $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

تطبيق01 :

اكتب الأعداد المركبة على الشكل المثلثي ثم على الشكل الاسي

$z_1 = 3 + \sqrt{3}i$ ، $z_2 = \frac{\sqrt{2}}{1-i}$ ، $z_1 = -2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$

المؤسســـــــة:	المستـــــــوى: الثالثة رياضيات
السنة الدراسية:	ميــدان التعلم: هندسة
التاريــــــــخ:	الوحدة التعلمية: الاعداد المركبة
توقيت الحصة :	موضوع الحصة : دراسة مجموعة نقط باستعمال الاعداد المركبة

المكتسبات المستهدفة: التعبير عن خواص لأشكال هندسية باستعمال الأعداد المركبة.

الأنشطة المقترحة وطبيعتها	الإنجاز(سـير الحصة)	التعليمات والتوجيهات
	تمرين 18 ص 146 M نقطة من المستوى المركب لاحقتها العدد المركب z . عين مجموعة النقط M بحيث يكون العدد $z+\frac{1}{z}$ حقيقيا . الحل :ليكن $Z=x+iy$ و $z+1/z$ حقيقي يكافئ ان: $\frac{z^2+1}{z}\in\mathbb{R};z\neq 0$ ومنه $\frac{(x+iy)^2+1}{x+iy}\in\mathbb{R};(x,y)\neq 0$ اي ان $\frac{(x+iy)^2+1}{x+iy}\in\mathbb{R};(x,y)\neq 0$ تمرين: ليكن $z_0=2+2i$ و $z=ke^{iq}$ و $L=z_0+z$ لواحقها على الترتيب: $M;A;A_0$ و العدد $k\in\mathbb{R}$ لتكن S مجموعة النقط M في المستوى عندما يتغير k في $\mathbb{R}^+$ و, q في $\mathbb{R}$ بفرض ان q ثابت : ادرس المجموعة S. انشئها من اجل $q=25/4\,\pi$ بفرض ان k ثابت : ادرس المجموعة S. انشئها من اجل $k=2$ تمرين: في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}$ ، لتكن النقط A ، B و C التي لواحقها $z_A=-1-i\sqrt{3}$ ، $z_B=-1+i\sqrt{3}$ ، $z_C=-5+i\sqrt{3}$. 1) عين z_D لاحقة D مرجح الجملة $\{(A,2);(B,-1);(C,1)\}$ 2) عين المجموعة (Γ) النقط M من المستوى A. $\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right\|$ مستقيم محوري B. $\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=6$ دائرة C. $2\overrightarrow{MA}^2-\overrightarrow{MB}^2+\overrightarrow{MC}^2=20$ دائرة D. $Z=-1+i\sqrt{3}+2e^{i\theta}$ θ يمسح R عندما يتعلق الأمر بالدائرة $Z=-1-i\sqrt{3}+ke^{i\frac{\pi}{2}}$ k يمسح R^+ عندما يتعلق الأمر بنصف المستقيم. E. $Z=-2e^{i\theta}$ F. $\arg\left(z+1+i\sqrt{3}\right)=\pi/2$	نميز دائرة مركزها النقطة Ω ذات اللاحقة z_0 أو نصف مستقيم مبدؤه Ω بعلاقة من الشكل $z=z_0+k\,e^{i\theta}$، k ثابت موجب و θ يمسح R عندما يتعلق الأمر بالدائرة أو θ ثابت و k يمسح R^+ عندما يتعلق الأمر بنصف المستقيم.

المؤسســــــــة:	المستــــــــوى: الثالثة رياضيات
السنة الدراسية:	ميــدان التعلم: هندسة
التاريـــــــــخ:	الوحدة التعلمية: الاعداد المركبة
توقيت الحصة :	موضوع الحصة : مسائل الطولة والعمدة في الأعداد المركبة وفي الهندسة.

المكتسبات المستهدفة: توظيف خواص الطويلة والعمدة لحل مسائل في الأعداد المركبة وفي الهندسة.

الأنشطة المقترحة وطبيعتها	الإنجاز (سـير الحصة)	التعليمات والتوجيهات
	(انظر أدناه)	يدرج تفسير طويلة وعمدة العددين $z_A - z_B$ و $\dfrac{z_A - z_B}{z_C - z_D}$ واستعمالهما في حل مسائل هندسية.

تمرين: في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}$ ، لتكن النقط A ، B و C التي لواحقها $z_A = -i\sqrt{3}$ ، $z_B = 3+2i\sqrt{3}$ ، $z_C = -3+2i\sqrt{3}$.

1) أعط تفسيرا هندسيا لطويلة و عمدة العدد المركب $\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$.

2) ما هي طبيعة المثلث ABC .

الحل: (1 $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{|z_B - z_A|}{|z_C - z_A|} = \left|\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right|$.

$$\arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) = \arg\ z_B - z_A\ - \arg\ z_C - z_A$$

$$\arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) = \overrightarrow{OI},\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{OI},\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\ .$$

(2 $\dfrac{AB}{AC} = 1 = \left|\dfrac{3+3i\sqrt{3}}{-3+3i\sqrt{3}}\right| = \left|\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right|$ و منه $AB = AC$.

$\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB} = \arg\left(\dfrac{3+3i\sqrt{3}}{-3+3i\sqrt{3}}\right)$ و منه $\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB} = -\dfrac{\pi}{3}$ إذن المثلث ABC متقايس الأضلاع .

تمرين

ABC مثلث حيث لواحق النقط A , B , C هي على الترتيب :

$2+i\ ,\ 4+i\ ,\ 2+3i$.

برهن أن المثلث ABC قائم في A و متساوي الساقين .

الحل:

$$\left|\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}\right| = \left|\frac{2+3i-2-i}{4+i-2-i}\right| = |i| = 1$$

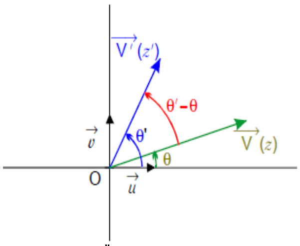
ومنه : $\dfrac{AC}{AB} = 1$ وعليه : AC = AB

$$\arg\left(\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}\right) = \arg(i) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$$

إذن المثلث ABC قائم في A و متقايس الساقين :

خواص هندسية :

خاصية 01:



المستوي المركب المزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$

الشعاعين $\overrightarrow{OM}$ و $\overrightarrow{OM'}$ ذات اللاحقتين z ، z' على الترتيب

$z = r(cos\theta + isin\theta)$ ، $z' = r'(cos\theta' + isin\theta')$

لدينا $(\vec{u},\overrightarrow{OM}) = Arg(z) = \theta$ و $(\vec{u},\overrightarrow{OM'}) = Arg(z') = \theta'$

$$(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'}) = (\overrightarrow{OM},\vec{u}) + (\vec{u},\overrightarrow{OM'}) = (\vec{u},\overrightarrow{OM'}) - (\vec{u},\overrightarrow{OM}) = \theta' - \theta$$

$$(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'}) = Arg(z') - Arg(z)$$

خاصية 02:

نعتبر النقط A ، B ، C و D ذات اللواحق $z_A; z_B; z_C; z_D$ في المستوي المركب المزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$

1) الشعاع $\overrightarrow{AB}$ ذا اللاحقة $z_B - z_A$ ومنه : $AB = |z_B - z_A|$ و $(\vec{u},\overrightarrow{AB}) = Arg(z_B - z_A)$

2) $\frac{CD}{AB} = \left|\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right|$ ، $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}) = \arg(z_D - z_C) - arg(z_B - z_A) = arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$

نتائج :

1. تكون النقط A ، B ، C في استقامية اذاكان العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ حقيقي
2. يكون المستقيمان (AB) و (AC) متعامدان اذاكان العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ تخيلي صرف

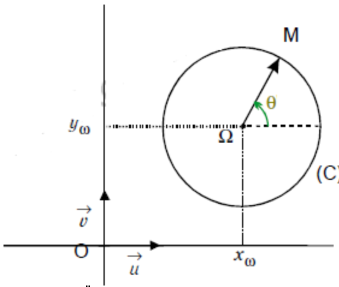
تطبيق :

المستوي المركب المزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$

نعتبر النقط A ، B ، C ذات اللواحق $z_A = 1$ ، $z_B = 1 + 2i$ ، $z_C = 1 + \sqrt{3} + i$

- أكتب العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ على الشكل الأسي
- استنتج طبيعة المثلث ABC

المعادلة الوسيطية لدائرة



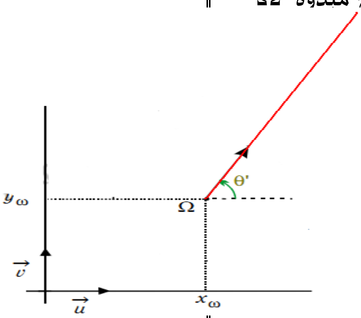
خاصية

المستوي المركب المزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$

Ω نقطة ثابتة لاحقتها z_Ω ، θ عدد حقيقي

لتكن النقطة M لاحقتها العدد المركب z بحيث : $z = z_\Omega + re^{i\theta}$

1. في حالة r ثابت و θ عدد حقيقي مجموعة النقط M هي دائرة مركزها Ω ونصف قطرها r
2. في حالة r عدد حقيقي و θ ثابت مجموعة النقط M هي نصف مستقيم مفتوح مبدؤه Ω وموجه بالشعاع $\vec{w}$ حيث $(\vec{u},\vec{w})$



المؤسســة:	المستــــوى: الثالثة رياضيات
السنة الدراسية:	ميــدان التعلم: هندسة
التاريـــخ:	الوحدة التعلمية: الاعداد المركبة
توقيت الحصة :	موضوع الحصة : المعادلات من الدرجة الثانية في $\mathbb{C}$

المكتسبات المستهدفة: حل المعادلات من الدرجة الثانية في $\mathbb{C}$

الأنشطة المقترحة وطبيعتها	الإنجاز (سـير الحصة)	التعليمات والتوجيهات
	انظر أدناه	- نتطرق إلى الجذرين التربيعيين لعدد مركب.

5/ حل معادلة من الدرجة الثانية

1.5 العلاقة $Z.Z'=0$

* إذا كان Z', Z عددان مركبان فإن :

$Z.Z'=0$ تكافئ : $Z=0$ أو $Z'=0$

البرهان :

نفرض $Z=x+iy$ و $Z'=x'+iy'$ لدينا : $Z.Z'=(xx'+yy')+i(xy-x'y)$

ومنه : $Z.Z'=0$ تكافئ : $\begin{cases} xx'-yy'=0 \\ \text{و} \\ xy'+x'y=0 \end{cases}$ نفرض $Z'\neq 0$ حل الجملة ذات المجهول $(x;y)$ هو :

$$x=\frac{\begin{vmatrix} -y' & 0 \\ x & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x' & -y' \\ y' & x' \end{vmatrix}}=\frac{0}{x'^2+y'^2}=0 \quad y=\frac{\begin{vmatrix} 0 & x' \\ 0 & y' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x' & -y' \\ y' & x' \end{vmatrix}}=\frac{0}{x'^2+y'^2}=0$$

فنجد $Z=0$. وإذا فرضنا $Z\neq 0$ نجد : $Z'=0$ ومنه : $Z.Z'=0$ تكافئ : $Z=0$ أو $Z'=0$

2.5 تساوي عددين

تعريف

(تقبل) يكون عددان مركبان z و z' متساويين إذا و فقط إذا كان لهما نفس الطويلة، نفس الجزء الحقيقي و نفس الجزء التخيلي. $|z|=|z'|$

$\mathrm{Re}(z)=\mathrm{Re}(z')$ و $\mathrm{Im}(z)=\mathrm{Im}(z')$

3.5 الجذران التربيعيان لعدد مركب

ليكن Z عدد مركب يكتب على شكله الجبري $Z=x+iy$

نريد تعيين العدد المركب w على شكله الجبري $w=\alpha+i\beta$ حيث $w^2=Z$ لذلك نتبع الخطوات التالية

1) لدينا $w^2=(\alpha+i\beta)^2=\alpha^2-\beta^2+2i\alpha\beta$

2) لدينا $|w^2|=|w|^2=\alpha^2+\beta^2$

3) بما ان $w^2=Z$ فان $\begin{cases} |w^2|=|z'| \\ \mathrm{Re}(w^2)=\mathrm{Re}(z') \\ \mathrm{Im}(w^2)=\mathrm{Im}(z') \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} \alpha^2+\beta^2=\sqrt{x^2+y^2} \\ \alpha^2-\beta^2=x \\ 2\alpha\beta=y \end{cases}$

بجمع المعادلة 1 و 2 نجد $\alpha=\sqrt{\dfrac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{2}}$ نعوض في 3 نجد $\beta=\dfrac{y}{2\alpha}$

تعريف

العدد المركب w يسمى حلا للمعادلة $w^2=Z$ في المجموعة $\mathbb{C}$ الجذرين التربيعيين

للعدد المركب w واحدهما هو $w=\sqrt{\dfrac{x+|z|}{2}}+iy\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{x+|z|}{2}}}$ والثاني هو $(-w)$

ملاحظة: كل عدد مركب له جذران تربيعيان متناظران .

تطبيق عين الجذر التربيعي للعدد المركب $z=3-4i$

الحل: $(\alpha+i\beta)^2=3-4i$ ومنه $|z|=\sqrt{3^2+4^2}=5$

$\alpha=\sqrt{\dfrac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{2}}=\sqrt{\dfrac{3+5}{2}}=2$ وكذلك $\beta=\dfrac{y}{2\alpha}=\dfrac{-4}{4}=-1$

اذن $w=2-i$ او $w=-2+i$

تطبيق عين الجذر التربيعي للعدد المركب $z=-9$

الحل: $(\alpha+i\beta)^2=-9$ ومنه $|z|=9$

$\alpha=\sqrt{\dfrac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{2}}=\sqrt{\dfrac{-9+9}{2}}=0$ ومنه $|w^2|=|z|$ أي ان $w=(\beta i)$ ومنه

$\beta=\sqrt{|z|}=\sqrt{9}=3$ وبالتالي $w=3i$ او $w=-3i$

4.5 حلول معادلة من الدرجة الثانية

المعادلات من الشكل : $aZ^2+bZ+C=0\ldots(1)$ حيث b,c,a أعداد مركبة و $a\neq 0$ هي معادلة من الدرجة الثانية ذات المجهول z

هذا النوع من المعادلات دائما يقبل حلولا في المجموعة المركبة $\mathbb{C}$ كما يلي

1). نكتب aZ^2+bZ+C على الشكل النموذجي فنجد :

$$aZ^2+bZ+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

مع $\Delta=b^2-4ac$ كما سبق .

2). إذا كان $\Delta\succ 0$ عدد حقيقي موجب : للمعادلة (1) حلين $Z_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $Z_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

3). إذا كان $\Delta\prec 0$ عدد حقيقي سالب : للمعادلة (1) حلين $Z_1=\dfrac{-b-i\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $Z_2=\dfrac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

4). إذا كان $\Delta=0$ عدد مركب غير حقيقي :

ملاحظة لما $\Delta\neq 0$ للمعادلة حلين هما $Z_1=\dfrac{-b-w}{2a}$ و $Z_2=\dfrac{-b+w}{2a}$

نبحث عن جذريه التربيعيين و ليكن w أحدهما ومنه (1) تكافئ :

$a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{w^2}{4a^2}\right]=0$ وعليه للمعادلة حلين: Z_1 و Z_2 حيث : $Z_1=\dfrac{-b-w}{2a}$, $Z_2=\dfrac{-b+w}{2a}$

مثال:

حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $Z^2-(3-2i)Z+5-i=0$

$\Delta=b^2-4aC$ ومنه : $\Delta=(3-2i)^2-4(5-i)$

إذن : $\Delta=9-12i-4-20+4i$ ومنه : $\Delta=-15-8i$ سالب

نبحث عن الجذرين التربيعيين للعدد Δ .

ليكن w جذر تربيعي للعدد Δ .

نفرض : $w=\alpha+i\beta$ فيكون : $\begin{cases}w^2=\Delta\\ |w^2|=\Delta\end{cases}$ وعليه : $\begin{cases}(\alpha+i\beta)^2=-15-8i\\ \alpha^2+\beta^2=\sqrt{(-15)^2+(-8)^2}=17\end{cases}$

وعليه : $\alpha=\sqrt{\dfrac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{2}}=\sqrt{\dfrac{-15+17}{2}}=1$ و $\beta=\dfrac{y}{2\alpha}=\dfrac{-8}{2}=-4$

ومنه الجذرين هما $w=4i-1$ $w=1-4i$

وبالتالي للمعادلة حلين هما :

$Z_1=\dfrac{3-2i-1+4i}{2}=1+i$, $Z_2=\dfrac{3-2i+1-4i}{2}=2-3i$

المؤسســـــــة:	المستـــــــوى: الثالثة رياضيات
السنة الدراسية:	ميـــدان التعلم: هندسة
التاريـــــــخ:	الوحدة التعلمية: الاعداد المركبة
توقيت الحصة :	موضوع الحصة : المعادلات من الدرجة الثانية في $\mathbb{C}$

المكتسبات المستهدفة: حل المعادلات التي يؤول حلها الى حل معادلة من الدرجة الثانية في $\mathbb{C}$

الأنشطة المقترحة وطريقتها	الإنجاز (ســير الحصة)	التعليمات والتوجيهات
	(see below)	نتطرق إلى الجذرين التربيعين لعدد مركب. تقدم المساعدة المناسبة للتلميذ لحل هذا النوع من المعادلات.

6/ 1 حل معادلة مضاعفة التربيع

1.6 الطريقة

المعادلات من الشكل : $az^4 + bz^2 + c = 0 \ldots (1)$ حيث a, c, b أعداد مركبة و $a \neq 0$ هي معادلة من الدرجة الرابعة ذات المجهول z

هذا النوع من المعادلات دائما يقبل حلولا في المجموعة المركبة $\mathbb{C}$ كما يلي نضع $z^2 = t$ نجد $at^2 + bt + c = 0 \ldots (2)$ المعادلة 2 ذات مجهول مركب t وله جذران هما t_1 و t_2 هما حلول للمعادلة 2

تطبيق:1

حل في المجموعة المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة $z^4 + 3z^2 + 2 = 0$

نضع $z^2 = t$ نجد

$t^2 + 3t + 2 = 0$ المعادلة ذات مجهول مركب t مميزها

$\Delta = b^2 - 4aC$ ومنه : $\Delta = 9-8=1$

نبحث عن الجذرين التربيعين للعدد Δ .

ليكن w جذر تربيعي للعدد Δ .

نفرض : $w=\alpha+i\beta$ فيكون : $\begin{cases} w^2 = \Delta \\ |w^2| = \Delta \end{cases}$ وعليه : $\begin{cases} (\alpha + i\beta)^2 = 9 \\ \alpha^2 + \beta^2 = 9 \end{cases}$

وعليه : $\alpha = \sqrt{\dfrac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{2}} = \sqrt{\dfrac{18}{2}} = 3$ و $\beta = \dfrac{y}{2\alpha} = 0$

ومنه الجذرين هما $w = 3$ $w = -3$

وبالتالي للمعادلة حلين هما :

$t_1 = \dfrac{-3+1}{2} = -1$, $t_2 = \dfrac{-3-1}{2} = -2$

ومنه $z^2 = -1$, $z^2 = -2$

لما $z^2 = -1$ نفرض : $w=\alpha+i\beta$ فيكون : $\begin{cases} w^2 = -1 \\ |w^2| = |-1| \end{cases}$ وعليه : $\begin{cases} (\alpha + i\beta)^2 = -1 \\ \alpha^2 + \beta^2 = 1 \end{cases}$

وعليه : $\alpha = \sqrt{\dfrac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{2}} = \sqrt{\dfrac{-1+1}{2}} = 0$ و $\beta = 1$

اي $z = -i$ $z = i$

لما $z^2 = -2$ نفرض : $w=\alpha+i\beta$ فيكون : $\begin{cases} w^2 = -2 \\ |w^2| = |-2| \end{cases}$ وعليه : $\begin{cases} (\alpha + i\beta)^2 = -2 \\ \alpha^2 + \beta^2 = 2 \end{cases}$

وعليه : $\alpha = \sqrt{\dfrac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{2}} = \sqrt{\dfrac{-2+2}{2}} = 0$ و $\beta = \sqrt{2}$

اي $z = -i\sqrt{2}$ $z = i\sqrt{2}$

ومنه الحلول هي $z = -i\sqrt{2}$ $z = i\sqrt{2}$ $z = -i$ $z = i$

تطبيق 2

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o.\vec{i}.\vec{j})$

ليكن كثير الحدود $f(z)$ للمتغير المركب z حيث : $f(z)=z^4+4iz^2+12(1+i)-45$

1) أحسب $f(-3)$.

2) أحسب $f(3i)$.

3) أوجد كثير الحدود $g(z)=az^2+bz+c$ للمتغير المركب z (a ، b و c أعداد مركبة) حيث $f(z)=g(z)\left[z^2+(3-3i)z-9i\right]$.

4) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $f(z)=0$.

الحل:

حساب $f(-3)$ لدينا: $f(-3)=(-3)^4+4i(-3)^2+12(1+i)(-3)-45=0$

حساب $f(i3)$ لدينا: $f(i3)=(i3)^4+4i(i3)^2+12(1+i)(-3)-45=0$

ايجاد كثير الحدود $g(z)=az^2+bz+c$ للمتغير المركب z (a ، b و c أعداد مركبة) حيث $f(z)=g(z)\left[z^2+(3-3i)z-9i\right]$.

$$f(z)=g(z)(z+3)(z-3i)$$

$$f(z)=(az^2+bz+c)(z^2-3iz+3z-9i)$$

$$f(z)=az^4-a3iz^3+a3z^3-a9iz^2+bz^3-3biz^2+3bz^2-9biz+cz^2-c3iz+c3z-c9i$$

$$f(z)=az^4+z^3(-a3i+a3+b)+z^2(-a9i-3bi+3b+c)+z(-9bi-c3i+c3)-c9i$$

بالمطابقة نجد $a=1$ و $(-a3i+a3+b)=0$ أي $b=3i-3$ و $-c9i=45$ أي $c=-5i$

ومنه $g(z)=z^2+(3i-3)z-5i$

حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $f(z)=0$.

هو $z=-3, z=3i$ و $z^2+(3i-3)z-5i=0$

نحل المعادلة $z^2+(3i-3)z-5i=0$ لدينا

$\Delta=b^2-4aC$ ومنه : $\Delta=(3i-3)^2-4(-5i)=2i$

نبحث عن الجذرين التربيعيين للعدد Δ .

ليكن w جذر تربيعي للعدد Δ .

نفرض : $w=\alpha+i\beta$ فيكون : $\begin{cases} w^2=2i \\ |w^2|=2i \end{cases}$ وعليه : $\begin{cases} (\alpha+i\beta)^2=2i \\ \alpha^2+\beta^2=2 \end{cases}$

وعليه : $\sqrt{\dfrac{0+2}{2}}=1$ $\alpha=\sqrt{\dfrac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{2}}=$ و $\beta=\dfrac{y}{2\alpha}=0$

ومنه الجذرين هما $w=1$ $w=-1$

وبالتالي للمعادلة حلين هما :

$$Z_1=\frac{3-3i-1}{2}=1+\frac{3}{2}i \ , \ Z_2=\frac{3-3i+1}{2}=2-\frac{3}{2}i$$

المستوى: الثالثة رياضيات	المؤسسة:
ميدان التعلم: هندسة	السنة الدراسية:
الوحدة التعلمية: الاعداد المركبة	التاريخ:
موضوع الحصة : التحويلات النقطية في الاعداد المركبة	توقيت الحصة :

المكتسبات المستهدفة: تعيين الكتابة المركبة للتحويلات المألوفة (الانسحاب، التحاكي، الدوران).

التعليمات والتوجيهات	الإنجاز (سير الحصة)	الأنشطة المقترحة وطبيعتها
الأعداد المركبة والتحويلات النقطية من الشكل: $M\ z \mapsto M'\ z'$ مع $z' = az + b$ و $a \in \mathbb{R}^*$ أو $a \in \mathbb{C}$ و $\|a\|=1$ نبرز الكتابة المختصرة $z'-z_0 = k\ z-z_0$ لكل من التحاكي و الدوران.	(see below)	

7/ التحويلات النقطية

1.7 الشكل المركب لتحويل نقطي مالوف

المستوي منسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$

$N(x;y)$ و $N'(x';y')$ نقطتان من المستوي لاحقتاهما على الترتيب $Z;Z'$

الصيغة المركبة للتحول النقطي المركب تعطى كما يلي $Z'=aZ+b$

تعريف التحويل النقطي:

التحويل النقطي L هو تطبيق يحول النقطة M الى النقطة M' : $L: P \to P'$

M' صورة M بالتحويل L $M \to M' = L(M)$

تعريف النقطة الصامدة:

نقول أن M نقطة الصامدة بالتحويل النقطي اذاكانت $M = L(M)$

0.1.7 التحويل المطابق

تعريف : التحويل المطابق هو التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M النقطة M' من المستوي حيث $M = M'$

خاصية : كل نقطة من المستوي صامدة بالتحويل المطابق

العبارة المركبة :

التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' لاحقتها z' حيث : $z' = z$ هو التحويل المطابق

1.1.7 الإنسحاب

ليكن $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$ شعاع غير معدوم من المستوي:

التعريف الهندسي:

T التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة N لاحقتها Z النقطة N' ذات اللاحقة Z' وشعاعه $\vec{u}$.

هذا يعني ان $\overrightarrow{NN'}=\vec{u}$

وبالتالي $\begin{cases} Z'-Z=\alpha+i\beta \\ Z'=Z+\alpha+i\beta \end{cases}$ هي عبارة مركبة للانسحاب الذي شعاعه $\vec{u}$ ونضع $(b=\alpha+i\beta)$

العبارة المركبة :

بعبارة اخرى إذا كان : $Z'=Z+b$ حيث : $\beta \in \mathbb{C}$

فإن : T انسحاب شعاعه $\vec{u}$ ذو اللاحقة β. $(b=\alpha+i\beta)$

التعريف التحليلي:

بعبارة اخرى إذا كان : $Z'=Z+b$ حيث : فان $x'+iy' = x+iy+\alpha+i\beta$

ومنه $x'+iy' = (x+\alpha)+i(y+\beta)$ اي ان $\begin{cases} x'=x+\alpha \\ y'=y+\beta \end{cases}$ تسمى عبارة تحليلية للانسحاب

ملاحظة هامة 1: مركب انسحابين هو انسحاب شعاعه مجموع الشعاعين

تطبيق:

عين طبيعة التحويل وعناصره المميزة في كل حالة

$z' = z - 1 + 5i ....T_1$

$z' = z + 1 - 2i ....T_2$

عين $T = T_1 \circ T_2$ واستنتج طبيعة هذا التحويل

عين A' صورة $A(1,-2)$ بواسطة T_2

الحل:

طبيعة التحويل وعناصره المميزة في كل حالة

$z' = z - 1 + 5i ....T_1$ انسحاب شعاعه $\vec{w} = (-1,5)$ لاحقته $z_w = -1 + 5i$

$z' = z + 1 - 2i ....T_2$ انسحاب شعاعه $\vec{w} = (1,-2)$ لاحقته $z_w = 1 - 2i$

$T = T_1 \circ T_2$ واستنتج طبيعة هذا التحويل

$T = T_1 \circ T_2 = T_1(T_2) = z'' = (z + 1 - 2i) - 1 + 5i_1$

$z'' = z + 3i_1$ انسحاب لاحقته $z_w = 3i$

ملاحظة هامة2:

في هذه الحالة $Z' = aZ + b$ يكون التحويل انسحاب اذا كان $a=1$ و منه لاحقة شعاعه هي b

حالة خاصة اذا كان $a=-1$ التحويل هو تناظر

خواص:

1). الانسحاب الذي شعاعه $\vec{u}$ هو تحويل نقطي تقابلي و تحويله العكسي هو الانسحاب الذي شعاعه $-\vec{u}$. اذن عبارته هي $Z' = Z - \alpha - i\beta$ أي $a=1$

2). الانسحاب الذي شعاعه غير معدوم لا يقبل أية نقطة صامدة و الانسحاب الذي شعاعه $\vec{0}$ هو التحويل الثابت.

الخاصة المميزة: صورة ثنائية A, B هي ثنائية A', B' تحقق $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$.

3). الانسحاب تقايس.

أمثلة :

ادرس طبيعة التحويل T الذي يرفق بالنقطة M ذات اللاحقة Z النقطة M' ذات اللاحقة Z' في كل حالة مما يلي : $Z' = Z - 1$ $Z' = Z + i + 1$

الحل :

1) لدينا : $Z' = Z - 1$ و

T انسحاب شعاعه $\vec{W}$ ذو اللاحقة 1-.

2) لدينا : $Z' = Z + i + 1$

T انسحاب شعاعه $\vec{W}$ ذو اللاحقة 1+i .

2.1.7 التحاكي

ليكن Ω نقطة ثابتة و k عدد حقيقي غير معدوم

التعريف الهندسي:

T التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة N لاحقتها Z النقطة N' ذات اللاحقة Z'. ومركزه Ω
ونسبته k هو تحاكي هذا يعني ان $\overrightarrow{\Omega N'}=k\overrightarrow{\Omega N}$ و $k\in\mathbb{R}-\{1\}$ بالتالي $Z'=kZ$ بعبارة اخرى إذا
كان : $Z'=\alpha Z+\beta$ حيث : $\alpha\in\mathbb{R}-\{1\}$
فإن : T تحاك مركزه Ω ذو اللاحقة β. $(\beta=x+iy)$ ونسبته $k=|a|$

خواص: للتحاكي نقطة صامدة وهي المركز $\boldsymbol{\Omega}$
صورة ثنائية نقطية (A,B) بالتحاكي الذي مركزه $\boldsymbol{\Omega}$ ونسبته K هي الثنائية النقطية (A',B') حيث
$\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{A'B'}$
التحاكي يحافظ على الاستقامية واقياس الزوايا والمرجح والتوازي

نشاط: المستوى المركب المزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$
نعتبر التحاكي h الذي مركزه Ω ذات اللاحقة $z_\Omega=2+4i$ ونسبته k حيث $k=\frac{-3}{2}$
لتكن M ذات اللاحقة Z و M' ذات اللاحقة z' صورة M بالتحاكي h
– اكتب $\overrightarrow{AM'}$ بدلالة $\overrightarrow{AM}$ ثم استنتج z' بدلالة Z

التعريف المركب للتحاكي :

تعريف01

المستوى المركب المزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$
k عدد حقيقي غير معدوم ويختلف عن 1 .Ω نقطة ثابتة من المستوي لاحقتها العدد المركب z_Ω
Z و z' عددان مركبان صورتهما النقطتين M و M' على الترتيب
العبارة المركبة للتحاكي الذي مركزه $\boldsymbol{\Omega}$ ونسبته K والذي يحول النقطة M الى النقطة M' هي
$$z'-z_\Omega=k(z-z_\Omega)$$

مثال تطبيقي: أعط العبارة المركبة للتحاكي h الذي مركزه $\boldsymbol{\Omega}$ ذات اللا حقة $z_\Omega=-1+i$
ونسبته -3

ملاحظة:

$$z'-z_\Omega=a(z-z_\Omega) \text{ معناه } z'=az+(1-a)z_\Omega \text{ معناه } z'=az+b$$

تعريف02

التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث
$z'=az+b$ مع a عدد حقيقي غير معدوم و يختلف عن 1 و b عدد مركب ، هو التحاكي الذي
مركزه النقطة Ω ذات اللاحقة $\frac{b}{1-a}$ ونسبته a .

التعريف التحليلي:

بعبارة اخرى : إذا كان $Z'=aZ+b$ حيث : فان $x'+iy'=ax+iay+\alpha+i\beta$
ومنه $x'+iy'=(ax+\alpha)+i(ay+\beta)$ اي ان $\begin{cases}x'=ax+\alpha\\ y'=ay+\beta\end{cases}$ تسمى عبارة تحليلية للتحاك
اذا كان $z-z_0=k(z-z_0)$ هو التعريف المركب فان عبارته التحليلية هي $\begin{cases}x'=kx+(1-k)x_0\\ y'=ky+(1-k)y_0\end{cases}$

مثال تطبيقي :ماهي طبيعة التحويل النقطي المعرف بـ: $z' = -\frac{3}{2}z - 2 + 3i$

تطبيق رقم 82 صفحة 150

A ، B و C ثلاث نقط من المستوي لواحقها على الترتيب $a=3+i$ ، $b=-2+3i$ و $8-i$

أ. عيّن نسبة التحاكي h ذي المركز C والذي يحوّل A إلى B .

تطبيق رقم 85 صفحة 150

t هو التحويل في المستوي الذي يرفق بكل نقطة M ذات الإحداثيتين (x, y) ، النقطة

M' ذات الإحداثيتين (x', y') حيث : $x' = 2x - \frac{3}{2}$ و $y' = 2y + \frac{1}{2}$.

أ. ما هي طبيعة التحويل t ؟

ب. أكتب العبارة المركّبة للتحويل

خواص:

● إذا اختلفت M عن Ω فإن M' تختلف عن Ω و النقاط Ω ، M و M' على استقامة واحدة .

● $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$ يعني $\overrightarrow{\Omega M} = \frac{1}{k}\overrightarrow{\Omega M'}$ و نستنتج أن : التحاكي الذي مركزه Ω و نسبته k هو تحويل نقطي تقابلي و تحويله العكسي هو التحاكي الذي مركزه Ω و نسبته $\frac{1}{k}$.

● الخاصة المميزة: صورة ثنائية A, B بالتحاكي الذي مركزه ω و نسبته k هي الثنائية A', B' التي تحقق: $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$

● نلاحظ أنه إذا كان $|k| \neq 1$ فإن $A'B' \neq AB$ و بالتالي فإن التحاكي ليس تقايسا.

3.1.7 الدوران

التعريف الهندسي: ω نقطة من المستوي الموجه و θ عدد حقيقي

الدوران الذي مركزه Ω و زاويته θ هو التحويل النقطي الذي يرفق النقطة Ω بنفسها و يرفق بكل نقطة M تختلف عن Ω النقطة M' حيث: $\Omega M' = \Omega M$ و $\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) = \theta$

خواص:

1) الدوران الذي مركزه Ω و زاويته غير معدومة له نقطة صامدة وحيدة هي المركز Ω .

2) الدوران الذي مركزه ω و زاويته θ تحويل تقابلي و تحويله العكسي هو الدوران الذي مركزه ω و زاويته $-\theta$.

3) الخاصة المميزة: صورة كل ثنائية A, B بالدوران الذي مركزه ω و زاويته θ هي ثنائية A', B' تحقق ما يلي: $A'B' = AB$ و $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}\right) = \theta$ تبين هذه النتيجة أن

4) الدوران تقايس.

5) الدوران يحافظ على الاستقامية واقياس الزوايا والمرجح

نشاط : المستوي المركب المزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{u}, \vec{v})$

نعتبر الدوران r الذي مركزه Ω ذات اللاحقة $z_\Omega = 1 - 2i$ وزاويته $\theta = \frac{\pi}{3}$

لتكن M' ذات اللاحقة z' صورة M ذات اللاحقة Z بالتحاكي h

– أحسب $\frac{\Omega M'}{\Omega M}$ و $\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right)$ ثم استنتج طويلة وعمدة العدد المركب $\frac{z'-z_\Omega}{z-z_\Omega}$

– أكتب z' بدلالة z

التعريف المركب

تعريف01 :

المستوي المركب المزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$

θ عدد حقيقي ،Ω نقطة ثابتة من المستوي لاحقتها العدد المركب z_Ω

Z و Z' عددان مركبان صورتهما النقطتين M و M' على الترتيب

العبارة المركبة للدوران الذي مركزه Ω وزاويته θ والذي يحول النقطة M الى النقطة M'هي

$$z'-z_\Omega=e^{i\theta}(z-z_\Omega)$$

مثال تطبيقي : أكتب العبارة المركبة للدورا الذي مركزه Ω ذات الاحقة $z_\Omega=2-4i$ وزاويته $\frac{\pi}{6}$

ملاحظة : $z'-z_\Omega=e^{i\theta}(z-z_\Omega)$ ومنه $z'=e^{i\theta}z+z_\Omega\left(1-e^{i\theta}\right)$

نضع $a=e^{i\theta}$ ومنه a عدد مركب طويلته 1 ، نضع $b=z_\Omega\left(1-e^{i\theta}\right)$ ومنه $z_\Omega=\frac{b}{1-a}$

ومنه نستنج أن : $z'=az+b$

تعريف 2 :

التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث $z'=az+b$ مع a عدد مركب غير حقيقي طويلته 1 و b عدد مركب ، هو الدوران الذي مركزه النقطة Ω ذات اللاحقة $\frac{b}{1-a}$ ، وزاويته $\arg a$.

التعريف التحليلي :

بعبارة اخرى : إذا كان $Z'=aZ+b$ حيث : فان $x'+iy'=ax+iay+\alpha+i\beta$

ومنه $x'+iy'=(ax+\alpha)+i(ay+\beta)$ اي ان $\begin{cases}x'=ax+\alpha\\ y'=ay+\beta\end{cases}$ تسمى عبارة تحليلية للتحاكي

اذا كان $z-z_0=e^{i\theta}(z-z_0)$ هو التعريف المركب فان عبارته التحليلية هي

$$\begin{cases}x'=(x-x_0)\cos\theta-(y-y_0)\sin\theta+x_0\\ y'=(x-x_0)\sin\theta+(y-y_0)\cos\theta+y_0\end{cases}$$

مثال تطبيقي : ماهي طبيعة التحويل L المعرف بـ : $z'=\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)z+2+\sqrt{2}-i\sqrt{2}$

تطبيق : A و B نقطتان من المستوي لاحقتاهما $a=\frac{1}{2}(1+i)$ و $b=\frac{\sqrt{2}}{2}i$

عين زاوية الدوران الذي مركزه مركزه o ويحول النقطة A الى B

تمرين 161 صفحة 159

نعتبر العددين المركبين $a=3+i\sqrt{3}$ ، $b=2+\sqrt{3}+3i$.

A ، B و C نقط من المستوي لواحقها a ، $\bar{a}$ و b على الترتيب .

1) بيّن أن المثلث ABO متساوي الساقين ، ثمّ عيّن z_G لاحقة مركز ثقل G .

2) ليكن α و β عددين مركبين وليكن T التحويل النقطي في المستوي الذي يحوّل $M(z)$ إلى $M'(z')$ حيث $z'=\alpha z+\beta$.

أ. عيّن α و β حيث يكون $T(O)=G$ و $T(A)=C$.

ب. بيّن أنّ التحويل T هو دوران يطلب تعيّين مركزه وزاويته .

ج. استنتج صورة المستقيم (OA) بالدوران T

تمرين :

1/ حل في C المعادلة التالية : $4z^2 - 12z + 153 = 0$

2/ المستوي منسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{u}, \vec{v})$

نعتبر A و B ، C ، P . لوحقها $z_A = \frac{3}{2} + 6i$ ، $z_B = \frac{3}{2} - 6i$ ، $z_C = -3 - \frac{1}{4}i$ ،

$z_P = 3 + 2i$ و الشعاع $\vec{w}$ ذا اللاحقة $z_{\vec{w}} = -1 + \frac{5}{2}i$

- عين اللاحقة z_Q للنقطة Q صورة النقطة B بالانسحاب t الذي شعاعه $\vec{W}$
- عين اللاحقة z_R للنقطة R صورة النقطة P بالتحاكي h الذي مركزه C ونسبته $\frac{-1}{3}$
- عين اللاحقة z_S للنقطة S صورة النقطة P بالدوران r الذي مركزه A وزاويته $\frac{-\pi}{2}$
- أنشئ النقط : P ، Q ، R ،S.

3/ - أثبت أن الرباعي $PQRS$ متوازي الأضلاع

- أحسب $\frac{z_R - z_Q}{z_P - z_Q}$ ، ماذا تستنتج

تمرين(1): المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O ;\vec{i} ;\vec{j})$.

ليكن التحويل النقطي f الذي إلى كل نقطة $M(x,y)$ يرفق النقطة $M'(x',y')$ حيث

$\begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y - 3 \end{cases}$. أثبت أن التحويل f انسحاب

تمرين(2): المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O ;\vec{i} ;\vec{j})$.

ليكن التحويل النقطي g الذي إلى كل نقطة $M(x,y)$ يرفق النقطة $M'(x',y')$ حيث

$\begin{cases} x' = -3x + \frac{1}{2} \\ y' = -3y - 5 \end{cases}$. أثبت أن التحويل g تحاك يطلب عناصره المميّزة .

4.1.7 التشابه

التعريف الهندسي

نشاط : المستوى المركب المزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$

نعتبر S التحويل النقطي في المستوي الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة $z=x+iy$ النقطة M'

ذات اللاحقة $z'=x'+iy$ حيث : $\begin{cases} x'=x-y+4 \\ y'=x+y \end{cases}$

-1 بين أن التحويل S يقبل نقطة صامدة وحيدة Ω يطلب تحديدها

-2 أكتب z' بدلالة z

-3 نفرض أن $M \neq \Omega$

أ- أثبت أن : $z'-z_\Omega=(1+i)(z-z_\Omega)$

ب- أثبت أن النسبة $\dfrac{\Omega M'}{\Omega M}$ ثابتة يطلب تحديدها

ت- أثبت أن الزاوية $\left(\overrightarrow{\Omega M};\overrightarrow{\Omega M'}\right)$ ثابتة يطلب تحديدها

-4 لتكن النقط $A(3,0)$ ، $B(0,-2)$ ، $C(3,-2)$

نسمي A' ، B' ، C' صور A ، B ، C على الترتيب بالتحويل S

- ما طبيعة المثلث ABC و $A'B'C'$
- أثبت أن المثلث ABC و $A'B'C'$ متشابهان
- أحسب مساحة المثلث ABC و، ثم مساحة المثلث $A'B'C'$

تعريف :

نسمي تشابها مباشرا للمستوي كل تحويل نقطي في المستوي يحافظ على نسب المسافات والزوايا الموجهة

نتيجة :

لتكن A و B ، C ، D نقط متمايزة مثنى مثنى من المستوي و A' و B' ، C' ، D' صورها على الترتيب بالتحويل S يكون التحويل النقطي S تشابها مباشرا للمستوي اذا وفقط اذا وجد عدد حقيقي موجب تماما k يحقق $\dfrac{C'D'}{CD}=\dfrac{A'B'}{AB}=k$ و $\left(\overrightarrow{CD};\overrightarrow{C'D'}\right)=\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{A'B'}\right)$

العدد الحقيقي الموجب تماما k يسمى نسبة التشابه المباشر ، الزاوية $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{A'B'}\right)$ هي ثابتة وتسمى زاوية التشابه المباشر

تعيين تشابه مباشر

خاصية :

إذا كان S تشابها مباشرا مركزه Ω نسبته $k \in \mathbb{R}_+^* - 1$ k و زاويته θ فإن :

- $S(\Omega)=\Omega$.

التعريف المركب للتشابه المباشر :

خاصية

التحويل النقطي S هوتشابه مباشر اذا وفقط اذاكانت كتابته المركبة من الشكل $z'=az+b$ مع a و b عددين مركبين و a عدد مركب غير معدوم ، نسبته $|a|$ و $\arg(a)$ زاويته

الكتابة المختصرة لتشابه المباشر

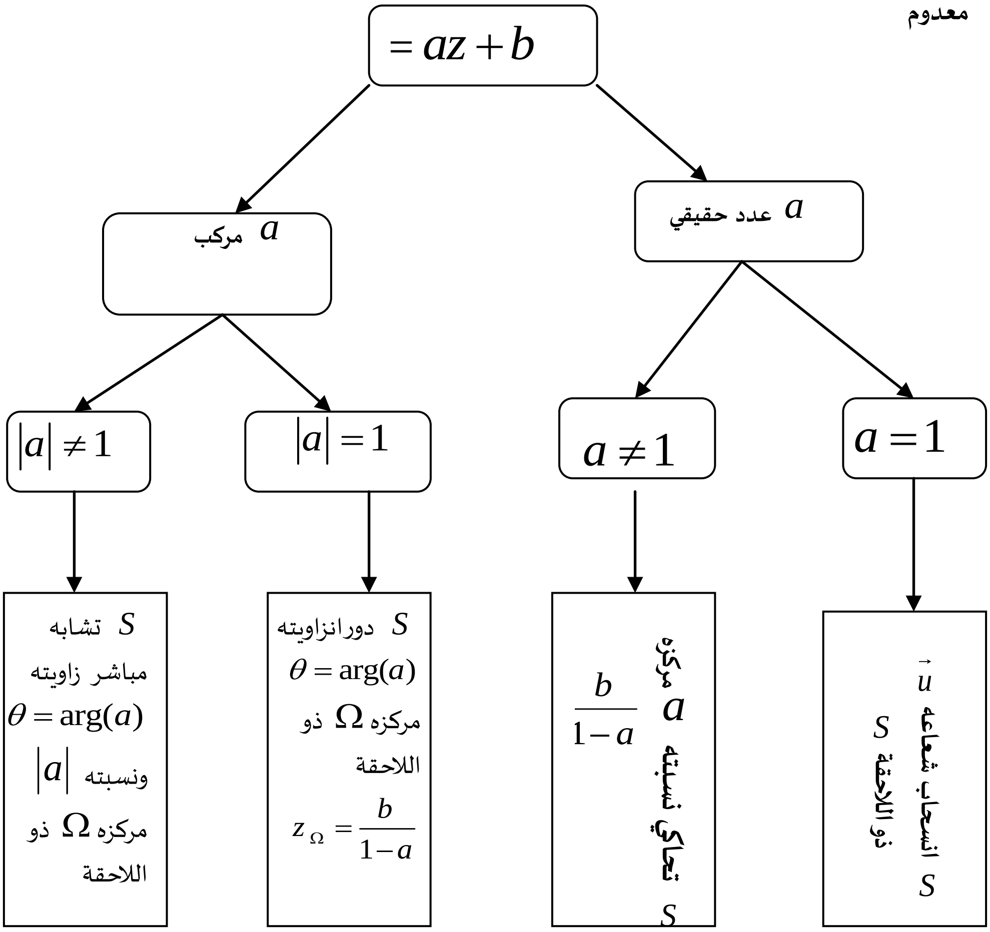
خاصية

المستوي المركب المزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$

العبارة المركبة للتشابه S الذي مركزه Ω ونسبته العدد الحقيقي الموجب k وزاويته θ والذي يحول النقطة M ذات الاحقة z الى النقطة M' ذات الاحقة z' هي : $z'-z_\Omega=ke^{i\theta}(z-z_\Omega)$

مخطط تصنيف التشابهات المباشرة

S تشابه مباشر كتابته المركبة $z' = az + b$ ، مع a و b عددين مركبين و a عدد مركب غير معدوم



7: الاعداد المركبة والتحويلات النقطية

مبرهنة :

ليكن f التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها Z النقطة M' ذات اللاحقة Z' .

1). إذا كان : $Z' = Z + \beta$ حيث : $\beta \in \mathbb{C}$

فإن : f انسحاب شعاعه $\vec{v}$ ذو اللاحقة β.

2). إذا كان : $Z' - Z_0 = k(Z - Z_0)$ حيث $Z_0 \in \mathbb{C}$ و $k \in \mathbb{R}^*$

فإن f تحاكي نسبته k و مركزه النقطة M_0 ذات اللاحقة Z_0 .

3). إذا كان : $Z' - Z_0 = e^{i\theta}(Z - Z_0)$ حيث $Z_0 \in \mathbb{C}$ و $\theta \in \mathbb{R}$

فإن f دوران مركزه النقطة M_0 ذات اللاحقة Z_0 وزاويته θ .

البرهان :

1) إذا كان $Z' = Z + \beta$ فإن $Z' - Z = Z_{\overrightarrow{MM'}} = \beta$

ومنه من أجل كل نقطة M من المستوي فإن الشعاع $\overrightarrow{MM'}$ ثابت. وعليه فهو يعرف انسحاب .

2) إذا كان $Z' - Z_0 = k(Z - Z_0)$ فإن صورة النقطة M_0 ذات اللاحقة Z_0 بواسطة f هي نفسها. ومن أجل $Z \neq Z_0$ فإن : $k \in \mathbb{R}^*$ ، $\frac{Z' - Z_0}{Z - Z_0} = k$

ومنه : $|k| = \frac{M_0M'}{M_0M}$

فإذا كان $k > 0$ فإن : $(\overrightarrow{M_0M} ; \overrightarrow{M_0M'}) = 0\ [2\pi]$

و إذا كان $\mathbf{k < 0}$ فإن : $\left(\overrightarrow{M_0M} ; \overrightarrow{M_0M'}\right) = \pi \left[2\pi\right]$

وفي الحالتين النقط $\mathbf{M_0 , M , M'}$ على استقامة واحدة.

و بالنسبة $|k| = \dfrac{M_0M'}{M_0M}$ تميز تحاكي مركزه $\mathbf{M_0}$ و نسبته k .

4). إذا كان $\mathbf{Z' - Z_0 = e^{i\theta} (Z - Z_0)}$ فإن صورة النقطة $\mathbf{M_0}$ ذات اللاحقة $\mathbf{Z_0}$
بواسطة f هي نفسها. ومن أجل : $\mathbf{Z \neq Z_0}$

فإن : $\dfrac{Z' - Z_0}{Z - Z_0} = e^{i\theta}$ ومنه : $\dfrac{M_0M'}{M_0M} = 1$ و $\left(\overrightarrow{M_0M} ; \overrightarrow{M_0M'}\right) = \theta \left[2\pi\right]$

هاتين العلاقتين تميزان دوران مركزه $\mathbf{M_0}$ و زاويته $\mathbf{\theta}$.

أمثلة :

ادرس طبيعة التحويل f الذي يرفق بالنقطة M ذات اللاحقة Z النقطة M' ذات اللاحقة Z' في كل حالة مما يلي :

1) $Z' = 3Z$ 2) $Z' = Z + i + 1$ 3) $Z' = Z - 1$

4) $Z' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(i + 1) Z + i$ 5) $Z' = iZ$ 6) $Z' = -2Z + i + 2$

الحل:

1) لدينا : $\mathbf{Z' = Z - 1}$ f انسحاب شعاعه $\vec{w}$ ذو اللاحقة 1-.

2) لدينا : $\mathbf{Z' = Z + i + 1}$ f انسحاب شعاعه $\vec{w}$ ذو اللاحقة 1+i .

3) لدينا : $\mathbf{Z' = 3Z}$ f تحاك نسبته 3 و مركزه O .

4) لدينا : $Z' = -2Z + i + 2$ f تحاك نسبته 2- و مركزه I حيث لاحقته $Z_0 = \dfrac{i}{1 - i - 1}$.

إذن $Z_0 = -1$.

5) لدينا : $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$, $Z' = iZ$ f دوران مركزه O وزاويته عمدة i أي $\dfrac{\pi}{2}$.

6) لدينا : $Z' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(i + 1) Z + i$ ولدينا : $\dfrac{\sqrt{2}}{2}(i + 1) = e^{i\frac{\pi}{4}}$

وعليه f دوران زاويته $\dfrac{\pi}{4}$ و مركزه النقطة ذات اللاحقة $\mathbf{Z_0}$

حيث : $Z_0 = \dfrac{i}{1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)}$ ومنه : $Z_0 = \dfrac{2i}{2 - \sqrt{2} - \sqrt{2}i}$ أي :

$Z_0 = \dfrac{2i\left(2 - \sqrt{2} + \sqrt{2}i\right)}{\left[2 - \sqrt{2} - \sqrt{2}i\right]\left[2 - \sqrt{2} + \sqrt{2}i\right]}$ وعليه : $Z_0 = \dfrac{-2\sqrt{2} + 2\left(2 - \sqrt{2}\right)i}{\left(2 - \sqrt{2}\right)^2 + 2}$

الاعداد المركبة والتحويلات النقطية

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}$ f تحويل نقطي من المستوي المركب الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث $z'=az+b$ مع $a\in C^*$ و$|a|=1$. ونكتب $f(M)=M'$ يعني $z'=az+b$.

1.الحالة الأولى $a=1$.

خاصية:التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث $z'=z+b$ و b عدد مركب هو انسحاب شعاعه $\vec{U}$ صورة b .

2.الحالة الثانية $a\in\mathbb{R}^*-\{1\}$.

خاصية:التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث $z'=az+b$ مع a عدد حقيقي غير معدوم و يختلف عن 1 و b عدد مركب ، هو التحاكي الذي مركزه Ω النقطة الصامدة ذات اللاحقة $\frac{b}{1-a}$ ونسبته a .

3.الحالة الثالثة $a\in\mathbb{C}$ و $|a|=1$.

خاصية:التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث $z'=az+b$ مع a عدد مركب غير حقيقي طويلته 1 و b عدد مركب ، هو الدوران الذي مركزه النقطة Ω النقطة الصامدة ذات اللاحقة $\frac{b}{1-a}$ ، وزاويته $\arg a$.

تمرين(1): المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}$. $t_{\vec{u}}$ هو الانسحاب الذي شعاعه $\vec{u}(3;-2)$

1)عين العبارة المركبة للانسحاب $t_{\vec{u}}$ و استنتج العبارة التحليلية له.

2) A النقطة التي لاحقتها $2-i$ ، عين لاحقة النقطة A' صورة A بالانسحاب $t_{\vec{u}}$.

تمرين(2): المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}$. h التحاكي الذي مركزه A ذات اللاحقة $-2+i$ و نسبته 3 .

عين العبارة المركبة للتحاكي h .

B النقطة التي لاحقتها $-4-5i$ ، عين لاحقة النقطة B' صورة B بالتحاكي h .

المؤسســـــــــة:	المستــــــــوى: الثالثة رياضيات
السنة الدراسية:	ميـــدان التعلم: هندسة
التاريـــــــــخ:	الوحدة التعلمية: الاعداد المركبة
توقيت الحصة :	موضوع الحصة : المجموعات النقطية في الاعداد المركبة

المكتسبات المستهدفة: مجموعات النقطة المقترحة في البكالوريا

الأنشطة المقترحة وطبيعتها	الإنجاز(ســير الحصة)	المنهاج
	(محتوى الإنجاز أدناه)	نقترح أنشطة تتعلق بالبحث عن مجموعات نقط و/أو استعمال المرجح . نميز دائرة مركزها النقطة Ω ذات اللاحقة z_0 أو نصف مستقيم مبدؤه Ω بعلاقة من الشكل $z=z_0+k\,e^{i\theta}$، k ثابت موجب و θ يمسح R عندما يتعلق الأمر بالدائرة أو θ ثابت و k يمسح R^+ عندما يتعلق الأمر بنصف المستقيم.

8/ مجموعات النقط

1.8 عن طريق طبيعة العدد

يمكن تحديد مجموعة النقط حيث $z=x+iy$ او تعيينها فقط عن طريق حالتين

الطريقة الاولى الجزء التخيلي معدوم $\mathrm{Im}(z)=0$

الطريقة الثانية الجزء الحقيقي معدوم $\mathrm{Re}(z)=0$

تمرين تطبيقي:

تمرين المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$. x و y عددان حقيقيان. لتكن المجموعة S مجموعة النقط $M(x;y)$ من المستوى حيث $z=x^2+y(1+i)-i$. عين ثمّ أنشئ المجموعة S في الحالتين الآتيتين .

1) z عدد حقيقي . (2 z عدد تخيلي صرف .

الحل: $z=x^2+y+i(y-1)$.

1 Z عدد حقيقي

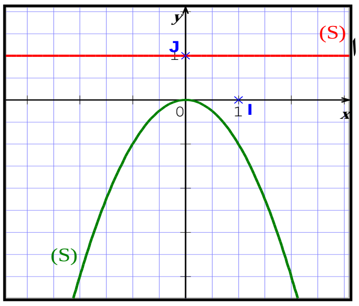
1) z عدد حقيقي إذا و فقط إذا كان $\mathrm{Im}(z)$ أي $y-1=0$.

إذن المجموعة S في هذه الحالة هي المستقيم ذو المعادلة $y-1=0$. S مرسوم باللون الأحمر في هذه الحالة .

2 Z عدد تخيلي صرف

2) z عدد تخيلي صرف إذا و فقط إذا كان $\mathrm{Re}(z)$ أي $x^2+y=0$. إذن المجموعة S في هذه الحالة هي القطع المكافئ ذو المعادلة $y=-x^2$.

S مرسوم باللون الأخضر في هذه الحالة .



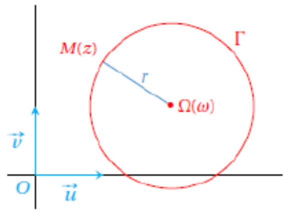
تطبيق 6 تعيين مجموعة نقط بطريقتين

عيّن، في المستوي المركب، مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث يكون $Z=z^2+\bar{z}$ حقيقي

2.8 عن طريق العلاقة $|z-z_A|$

يمكن تحديد مجموعة النقط او تعيينها عن طريق الحالات

1: حالة دائرة $|z-z_A|=r$



r عدد حقيقي موجب تماما مجموعة النقط Γ للنقط M ذات اللاحقة Z حيث $|z-z_A|=r$ هي الدائرة التي مركزها A ذات اللاحقة z_A ونصف قطرها r

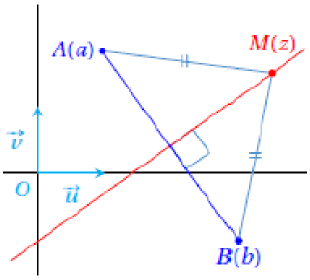
تمرين تطبيقي:

عين مجموعة النقط Γ للنقط M ذات اللاحقة حيث $Z = -2\sqrt{2} + 2\sqrt{6}\,i+2$

الحل : لدينا $\left|Z-\left(-2\sqrt{2} + 2\sqrt{6}\,i\right)\right| = 2$ من الشكل $|z-z_A|=r$

مجموعة النقط Γ للنقط M هي الدائرة التي مركزها A ذات اللاحقة $z_A = -2\sqrt{2} + 2\sqrt{6}\,i$ ونصف قطرها $r=2$

2: حالة مستقيم $|z-z_A|=|z-z_B|$



A,B نقطتان لاحقتيهما على الترتيب Z_A و Z_B

مجموعة النقط Δ للنقط M ذات اللاحقة Z حيث $|z-z_A|=|z-z_B|$ هي محور القطعة المستقيمة $[AB]$

تمرين تطبيقي:

عين مجموعة النقط Δ للنقط M حيث

$|-Z-2+5i|=|Z+2-3i|$

الحل : لدينا $|Z-(2+5i)|=|Z+2-3i|$ ومنه $|Z-(2+5i)|=|Z-(-2+3i)|$ من الشكل

$|z-z_A|=|z-z_B|$ اذن مجموعة النقط Δ للنقط M هي محور القطعة المستقيمة $[AB]$

المار من I منتصف $[AB]$ حيث $z_I = \frac{2+5i+2-3i}{2} = i$

تطبيق تعيين مجموعة نقط

A و B نقطتان لاحقتاهما $z_A = 1+i$ و $z_B = 2i$

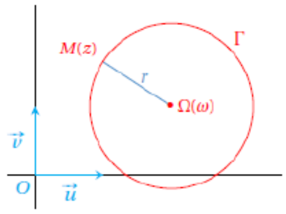
نرفق بكل عدد مركب z، $z \neq z_A$، العدد المركب $z' = \frac{z-2i}{z-1-i}$

1. عيّن المجموعة $\mathcal{E}$ للنقط $M(z)$ حيث $|z'| = 1$
2. عيّن المجموعة $\mathcal{F}$ للنقط $M(z)$ حيث z حقيقي
3. (جـ) عيّن المجموعة $\mathcal{G}$ للنقط $M(z)$ حيث z تخيّلي صرف

حل مختصر

1). مجموعة النقط ε للنقط M حيث $|Z'|=1$ اي $|z-z_A|=|z-z_B|$ هي محور القطعة $[AB]$

3: حالة دائرة $z - z_A = k\, e^{i\theta}$



k ثابت موجب و θ يمسح R عندما يتعلق الأمر بالدائرة

مجموعة النقط Γ للنقط M ذات اللاحقات Z حيث

$z - z_A = k\, e^{i\theta}$ هي الدائرة التي مركزها A ذات اللاحقة

z_A ونصف قطرها $r = k$

تمرين تطبيقي:

عين مجموعة النقط Γ للنقط M ذات اللاحقة حيث $Z = -2 + 5\,i + 2e^{i\theta}$

الحل : لدينا $Z - (-2 + 5\,i) = 2e^{i\theta}$ من الشكل $z - z_A = k\, e^{i\theta}$

مجموعة النقط Γ للنقط M هي الدائرة التي مركزها A ذات اللاحقة $z_A = -2 + 5\,i$ ونصف قطرها $r = 2$

تمرين تطبيقي:

عين مجموعة النقط Γ للنقط M ذات اللاحقة حيث $Z = -2 + 5\,i - 2e^{i\theta}$

الحل : لدينا $Z - (-2 + 5\,i) = -2e^{i\theta}$ لدينا الشكل الاسي ل -2 حقيقي سالب هو

$-2 = 2\, e^{i\pi}$

ومنه $Z - (-2 + 5\,i) = 2\, e^{i\pi} e^{i\theta} = 2e^{i(\pi+\theta)}$

مجموعة النقط Γ للنقط M هي الدائرة التي مركزها A ذات اللاحقة $z_A = -2 + 5\,i$ ونصف قطرها $r = 2$

4: حالة نصف مستقيم $z - z_A = k\, e^{i\theta}$

θ ثابت و k يمسح R^+ عندما يتعلق الأمر بنصف المستقيم.

مجموعة النقط Δ للنقط M ذات اللاحقات Z حيث

$z - z_A = k\, e^{i\theta}$ هي نصف المستقيم $[A0$ ذو المبدا A لاحقته z_A

تمرين تطبيقي:

عين مجموعة النقط Δ للنقط M حيث

$Z = -1 + i\sqrt{3} + ke^{i\frac{\pi}{3}}$ وارسمها

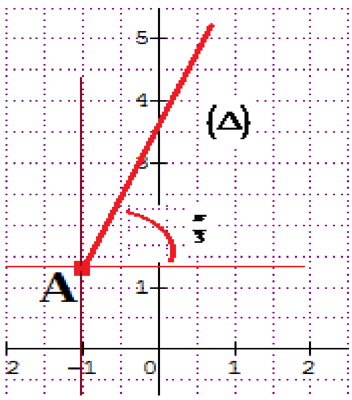
الحل : لدينا $Z - \left(-1 + i\sqrt{3}\right) = ke^{i\frac{\pi}{3}}$ لدينا

الطويلة تتغير لان k يمسح R^+

مجموعة النقط Δ للنقط M هي نصف مستقيم مبدأه

A ذات اللاحقة $z_A = -1 + i\sqrt{3}$ يميل بزاوية $\frac{\pi}{3}$

الرسم : في مستوى مركب



تمرين135ص 155

في المستوى المركب ، نرفق بكل نقطة m ذات اللاحقة العدد المركب غير المعدوم z , النقطة M ذات اللاحقة $Z = \frac{1}{z^2}$.

1) نضع $z = re^{i\theta}$

أ . أكتب Z على الشكل الأسّي .

ب . Z_0 عدد مركب غير معدوم معطى . هل يمكن إيجاد عدد مركب z_0 يحقق $Z_0 = \frac{1}{z_0^2}$ ؟

2) نفرض أن $|z|=1$.

أ. تعطى النقطة m أنشئ النقطة M .

ب. عين النقط m التي يكون من أجلها $Z=z$.

3) d مجموعة نقط نصف مستقيم مبدأه O ، باستثناء O.

أ. عين مجموعة النقط M عندما m تمسح المجموعة d.

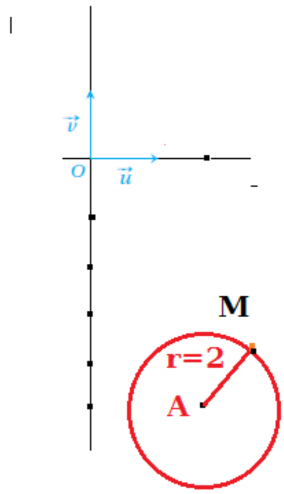
ب. عين مجموعة النقط m عندما تمسح M المجموعة d.

ملاحظة

مجموعة النقط S للنقط M ذات اللاحقة Z حيث $z=e^{i\theta}$ هي دائرة مركزه 0 ونصف قطرها 1

النقط m عندما تمسح M المجموعة d.

3: حالة دائرة $z\cdot\bar{z}=|z|^2$



مجموعة النقط Γ للنقط M ذات اللاحقة Z حيث

$z\cdot\bar{z}=|z|^2$ هي الدائرة التي مركزها A ذات اللاحقة z_A

ونصف قطرها $r=|z|^2$

تمرين تطبيقي:

عين مجموعة النقط Γ للنقط M ذات اللاحقة z حيث

$$(z-2+5i)(\bar{z}-2-5i)=4$$

الحل : لدينا $(z-2+5i)(\bar{z}-2-5i)=4$ يكافئ

$$(z-2+5i)(\overline{z-2+5i})=4$$

تصبح من الشكل $z\cdot\bar{z}=|z|^2$ اي $|z-2+5i|^2=4$

يكافئ $|z-(2-5i)|^2=4$

يكافئ $|z-(2-5i)|=\sqrt{4}=2$ وهي على الشكل $|z-z_A|=r$

مجموعة النقط Γ للنقط M هي الدائرة التي مركزها A ذات اللاحقة $z_A=2-5i$ ونصف قطرها $r=2$

تطبيق تعيين مجموعة نقط

في كل حالة من الحالات التالية، عيّن هندسيا مجموعة النقط M، من المستوي المركب، ذات اللاحقة z التي تحقق العلاقة المقترحة:

بدلالة الطويلة

(أ) $|z-3|=|z+2i|$ (ب) $\left|\bar{z}+\frac{i}{2}\right|=4$ (جـ) $\sqrt{2}|z+1|=|(1+i)z-4|$

(د) $|z+1-2i|<\sqrt{5}$ (هـ) $\left|\frac{z+2i}{z+1-2i}\right|>1$

بدلالة العمدة

(أ) $\arg(z)=\frac{\pi}{6}$ (ب) $\arg(\bar{z})=\frac{\pi}{3}$ (جـ) $\arg(iz)=-\frac{\pi}{4}$ (د) $\arg\left(\frac{z+1}{z-2i}\right)=\frac{\pi}{2}$

3.8 عن طريق العمدة $\arg(z-z_A)$

1: حالة نصف مستقيم $\arg(z-z_A)=\theta+2\pi k$

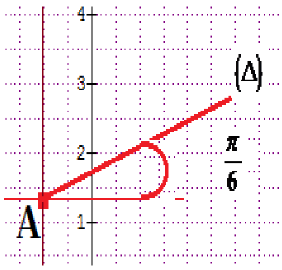
θ ثابت مجموعة النقط Δ للنقط M ذات اللاحقات Z حيث

$\arg(z-z_A)=\theta+2\pi k$ هي نفسها المجموعة $z-z_A=k\,e^{i\theta}$

مجموعة النقط Δ للنقط M ذات اللاحقات Z حيث

$z-z_A=k\,e^{i\theta}$ هي نصف المستقيم $[A0$ ذو المبدا A

لاحقته z_A



تمرين تطبيقي:

عين مجموعة النقط Δ للنقط M حيث

$\arg\left(z+1+i\sqrt{3}\right)=\frac{\pi}{6}+2\pi k$ وارسمها

الحل : لدينا $z_A=\left(-1-i\sqrt{3}\right)$ ومنه $\arg(z-z_A)=\frac{\pi}{6}+2\pi k$

نعلم ان $\boxed{z-z_A=\left(\vec{u};\overrightarrow{AM}\right)}$ ومنه $\left(\vec{u};\overrightarrow{AM}\right)=\frac{\pi}{6}+2\pi k$

مجموعة النقط Δ للنقط M ذات اللاحقات Z هي نصف المستقيم $[A0$ ذو المبدا A لاحقته

$z_A=-1-i\sqrt{3}$

2: حالة نصف مستقيم $\arg(iz)=\theta+2\pi k$

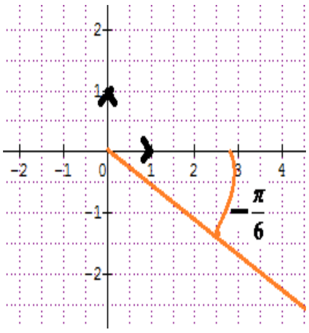
θ ثابت مجموعة النقط Δ للنقط M ذات اللاحقات Z حيث

$\arg(iz)=\theta+2\pi k$ هي نصف المستقيم يشمل 0 ويميل بزاوية $\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)$

تمرين تطبيقي:

عين مجموعة النقط Δ للنقط M حيث

$\arg(iz)=\frac{\pi}{3}+2\pi k$ وارسمها



الحل : لدينا $\arg(iz)=\frac{\pi}{3}+2\pi k$ يكافئ

$\arg(i)+\arg(z)=\frac{\pi}{3}+2\pi k$

نعلم ان $\boxed{\arg(i)=\frac{\pi}{2}}$ ومنه

$\arg(z)=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}+2\pi k$ اي $\arg(z)=-\frac{\pi}{6}+2\pi k$

مجموعة النقط Δ للنقط M ذات اللاحقات Z هي نصف المستقيم $[Om$ ويميل بزاوية

$-\frac{\pi}{6}$

3: حالة دائرة باستثناء نقطتين $\arg\left((z-z_A)/(z-z_B)\right)=\theta+\pi k$

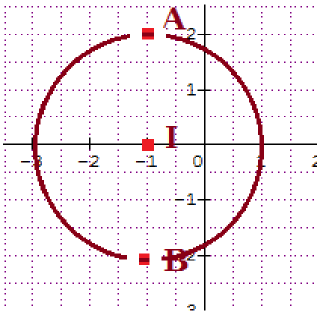
$\theta=\frac{\pi}{2}$ ثابت مجموعة النقط Γ للنقط M ذات اللاحقة Z حيث

$\arg\left(\frac{z-z_A}{z-z_B}\right)=\frac{\pi}{2}+\pi k$ هي الدائرة التي قطرها $[AB]$ ماعدا A و B

تمرين تطبيقي:

عين مجموعة النقط Γ للنقط M حيث $\arg\left(\frac{z+1+i\,2}{z+1-i\,2}\right)=\frac{\pi}{2}+\pi k$ وارسمها

الحل : لدينا $z_A=(-1-i\,2)$ و $z_B=(-1+i\,2)$ ومنه $\arg\left(\frac{z-z_A}{z-z_B}\right)=\frac{\pi}{2}+\pi k$



نعلم ان $\boxed{z-z_A=\overrightarrow{AM}}$ و $\boxed{z-z_B=\overrightarrow{BM}}$ منه

$(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{BM})=\frac{\pi}{6}+\pi k$

مجموعة النقط Γ للنقط M ذات اللاحقة Z هي الدائرة التي قطرها $[AB]$

باستثناء النقطتين A و B ذات اللاحقتين $z_A=(-1-i\,2)$

و $z_B=(-1+i\,2)$ مركزها

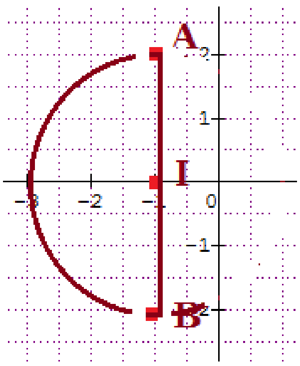
$z_I=\frac{-1+2i-1-2i}{2}=-1$

4: حالة نصف دائرة عدا نقطتين $\arg\left((z-z_A)/(z-z_B)\right)=\theta+2\pi k$

$\boxed{\theta=\frac{\pi}{2}}$ ثابت مجموعة النقط Γ للنقط M ذات اللاحقة Z حيث

$\arg\left(\frac{z-z_A}{z-z_B}\right)=\frac{\pi}{2}+2\pi k$ هي نصف دائرة التي قطرها $[AB]$ ماعدا A و B

تمرين تطبيقي:



عين مجموعة النقط Γ للنقط M حيث

$\arg\left(\frac{z+1+i\,2}{z+1-i\,2}\right)=\frac{\pi}{2}+2\pi k$ وارسمها

الحل : لدينا $z_A=(-1-i\,2)$ و $z_B=(-1+i\,2)$ ومنه

$\arg\left(\frac{z-z_A}{z-z_B}\right)=\frac{\pi}{2}+2\pi k$

نعلم ان $\boxed{z-z_A=\overrightarrow{AM}}$ و $\boxed{z-z_B=\overrightarrow{BM}}$ منه

$(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{BM})=\frac{\pi}{2}+2\pi k$

مجموعة النقط Γ للنقط M ذات اللاحقة Z هي نصف الدائرة التي قطرها $[AB]$ باستثناء

النقطتين A و B ذات اللاحقتين $z_A=(-1-i\,2)$ و $z_B=(-1+i\,2)$ مركزها

$z_I=\frac{-1+2i-1-2i}{2}=-1$

5: حالة نصف دائرة عدا نقطتين $\arg\left((z-z_A)/(z-z_B)\right)=\theta+2\pi k$

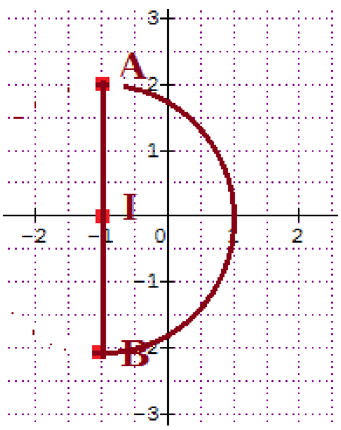
$\boxed{\theta=-\frac{\pi}{2}}$ ثابت مجموعة النقط Γ للنقط M ذات اللاحقة Z حيث

$\arg\left(\frac{z-z_A}{z-z_B}\right)=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$ هي نصف دائرة التي قطرها $[AB]$ ماعدا A و B

تمرين تطبيقي:

عين مجموعة النقط Γ للنقط M حيث

$\arg\left(\frac{z+1+i2}{z+1-i2}\right)=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$ وارسمها



الحل : لدينا $z_A=(-1-i2)$ و $z_B=(-1+i2)$

ومنه $\arg\left(\frac{z-z_A}{z-z_B}\right)=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$

نعلم ان $\boxed{z-z_A=\overrightarrow{AM}}$ و $\boxed{z-z_B=\overrightarrow{BM}}$ منه

$\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{BM}\right)=\frac{\pi}{2}+2\pi k$

مجموعة النقط Γ للنقط M ذات اللاحقة Z هي الدائرة

التي قطرها $[AB]$ باستثناء النقطتين A و B ذات اللاحقتين $z_A=(-1-i2)$ و

$z_B=(-1+i2)$ مركزها $z_I=\frac{-1+2i-1-2i}{2}=-1$

6: حالة محور باستثناء المبدا $\arg(z)=\arg(\bar{z})$

مجموعة النقط Δ للنقط M ذات اللاحقة Z حيث

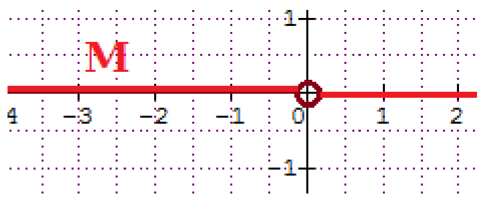
$\arg(z)=\arg(\bar{z})$ هي حامل محور الفواصل باستثناء المبدا

تمرين تطبيقي:

عين مجموعة النقط Γ للنقط M حيث $\arg(z)=\arg(\bar{z})$ وارسمها

الحل : نعلم ان $\boxed{\arg(\bar{z})=-\arg(z)}$ ومنه $2\arg(z)=2\pi k$ اي $\arg(z)=\pi k$

مجموعة النقط Γ للنقط M ذات اللاحقة Z هي محور الفواصل باستثناء المبدا



3.8 عن طريق العمدة $\arg(z-z_A)=\theta$

θ ثابت مجموعة النقط Δ للنقط M ذات اللاحقة Z حيث

$\arg(z-z_A)=\theta$ هي نفسها المجموعة $z-z_A=k\,e^{i\theta}$

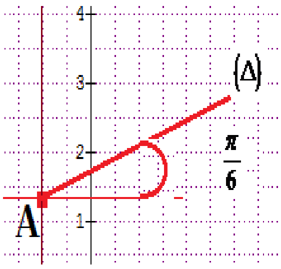
مجموعة النقط Δ للنقط M ذات اللاحقة Z حيث

$z-z_A=k\,e^{i\theta}$ هي نصف المستقيم $[A0$ ذو المبدا A لاحقته z_A

تمرين تطبيقي:

عين مجموعة النقط Δ للنقط M حيث $\arg\left(z+1+i\sqrt{3}\right)=\dfrac{\pi}{6}$ وارسمها

الحل : لدينا $\arg\left(z-\left(-1-i\sqrt{3}\right)\right)=\dfrac{\pi}{6}$ لدينا الطويلة تتغير لان k يمسح R^+



ومنه $ke^{i\frac{\pi}{6}}=k\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\pi}{6}$ اذن

$$\frac{\pi}{6}=\arg k\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=\arg\left(ke^{i\frac{\pi}{6}}\right)$$

نستنتج ان $\arg\left(z-\left(-1-i\sqrt{3}\right)\right)=\arg\left(ke^{i\frac{\pi}{6}}\right)$

اي $\left(z-\left(-1-i\sqrt{3}\right)\right)=ke^{i\frac{\pi}{6}}$ مجموعة النقط Δ للنقط M ذات اللاحقة Z حيث

$z-z_A=k\,e^{i\theta}$ هي نصف المستقيم $[A0$ ذو المبدا A لاحقته $z_A=-1-i\sqrt{3}$

تطبيق تعيين مجموعة نقط

في كل حالة من الحالات التالية، عيّن هندسيا مجموعة النقط M، من المستوي المركب، ذات اللاحقة z التي تحقق العلاقة المقترحة:

بدلالة الطويلة

(أ) $|z-3|=|z+2i|$ (ب) $\left|\bar{z}+\frac{i}{2}\right|=4$ (جـ) $\sqrt{2}|z+1|=|(1+i)z-4|$

(د) $|z+1-2i|<\sqrt{5}$ (هـ) $\left|\frac{z+2i}{z+1-2i}\right|>1$

بدلالة العمدة

(أ) $\arg(z)=\frac{\pi}{6}$ (ب) $\arg(\bar{z})=\frac{\pi}{3}$ (جـ) $\arg(iz)=-\frac{\pi}{4}$ (د) $\arg\left(\frac{z+1}{z-2i}\right)=\frac{\pi}{2}$

4.8 عن طريق المرجح

<u>تطبيق :</u> في المستوي المركب $o,\overrightarrow{oi},\overrightarrow{oj}$ النقط A, B, C من المستوي حيث

$$Z_A=-1-i\sqrt{3};Z_B=-1+i\sqrt{3};Z_C=-5+i\sqrt{3}$$

عين لاحقة D مرجح الجملة $A,2\ ;\ B,-1\ ;\ C;1$

<u>عين مجموعة النقط M لاحقتها</u> z حيث :

2). المجموعة Δ : $\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|$

3). المجموعة φ : $\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right\|$

4). المجموعة S : $\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=4$

5). المجموعة γ : $2\overrightarrow{MA}^2-\overrightarrow{MB}^2+\overrightarrow{MC}^2=20$

<u>الحل :</u> في المستوي المركب $o,\overrightarrow{oi},\overrightarrow{oj}$ النقط A, B, C من المستوي حيث

$$Z_A=-1-i\sqrt{3};Z_B=-1+i\sqrt{3};Z_C=-5+i\sqrt{3}$$

عين لاحقة D مرجح الجملة $A,2\ ;\ B,-1\ ;\ C;1$

$$Z_D=\frac{-2-2i\sqrt{3}+1-i\sqrt{3}-5+i\sqrt{3}}{2}=-3-i\sqrt{3}$$

<u>مجموعة النقط</u>

1 مرجحين

كل علاقة من الشكل $\left\|\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\delta\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\alpha'\overrightarrow{MA}+\beta'\overrightarrow{MB}+\delta'\overrightarrow{MC}\right\|$

حيث $\alpha+\beta+\delta=\alpha'+\beta'+\delta'\neq 0$ هي نفسها المجموعة $|z-z_A|=|z-z_B|$

العلاقة $\left\|3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|$ توضح وجود جملة مرجحين

الجملة الاولى $\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|$ مرجحها D يعني ان $\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|2\overrightarrow{MD}\right\|$

يعني ان $\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=2MD$

الجملة الثانية $\left\|3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|$ تقبل مرجح ليكن D' لان $3-2+1=2\neq 0$

$\left\|3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|2\overrightarrow{MD'}\right\|$ يعني ان $\left\|3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=2MD'$

ومنه $2MD'=2MD$ أي $MD'=MD$ وهي نفسها المجموعة $|z-z_A|=|z-z_B|$

المجموعة Δ هي محور القطعة المستقيمة $[AB]$

مرجح 2

كل علاقة من الشكل $\left\|\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\delta\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\alpha'\overrightarrow{MA}+\beta'\overrightarrow{MB}+\delta'\overrightarrow{MC}\right\|$

حيث: $\alpha+\beta+\delta\neq0;\alpha'+\beta'+\delta'=0$ هي نفسها المجموعة $\left|z-z_A\right|=r$

العلاقة $\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=4$ توضح وجود مرجح وحيد

الجملة الاولى $\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|$ مرجحها D يعني ان $\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|2\overrightarrow{MD}\right\|$

يعني ان $\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=2MD$

الجملة الثانية $\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right\|$ لا تقبل مرجح لان $1-1=0$ يعني ان M مستقلة عن A و B

نكتب الجملة بدون M وهذا باستعمال علاقة شال نجد :

$$\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{MB}\right\|=AB$$

نجد $MD=\dfrac{AB}{2}$ وبما ان $AB=\left|Z_B-Z_A\right|=\left|2i\sqrt{3}\right|=2\sqrt{3}$ ومنه $MD=\sqrt{3}$

المجموعة φ هي الدائرة التي مركزها D ذات اللاحقة $z_D=-3-i\sqrt{3}$ ونصف قطرها $r=\sqrt{3}$

مرجح 3

كل علاقة من الشكل $\left\|\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\delta\overrightarrow{MC}\right\|=k$

حيث: $k\in\mathbb{R}_+^*$ هي نفسها المجموعة $\left|z-z_A\right|=r$

العلاقة $\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right\|$ توضح وجود مرجح وحيد

الجملة الاولى $\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|$ مرجحها D يعني ان $\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|2\overrightarrow{MD}\right\|$

يعني ان $\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=2MD$ نجد $MD=\dfrac{4}{2}=2$

المجموعة S هي الدائرة التي مركزها D ذات اللاحقة $z_D=-3-i\sqrt{3}$ ونصف قطرها $r=2$

مرجح 4

كل علاقة من الشكل $\alpha\overrightarrow{MA}^2+\beta\overrightarrow{MB}^2+\delta\overrightarrow{MC}^2=k$

حيث: $k\in\mathbb{R}_+^*$ هي نفسها المجموعة $\left|z-z_A\right|=r$

العلاقة $2\overrightarrow{MA}^2-\overrightarrow{MB}^2+\overrightarrow{MC}^2=20$ توضح وجود مرجح وحيد

الجملة الاولى $\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|$ مرجحها D يعني ان

$$2\overrightarrow{MA}^2-\overrightarrow{MB}^2+\overrightarrow{MC}^2=2\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}\right)^2-\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}\right)^2+\left(\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{GC}\right)^2$$

$$\left(2MG^2-MG^2+MG^2\right)+\left(2GA^2-GB^2+GC^2\right)$$

$$+2\left(\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GA}\right)-\left(\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GB}\right)+\left(\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{GC}\right)=20$$

يعني ان

$$2\overrightarrow{MA}^2-\overrightarrow{MB}^2+\overrightarrow{MC}^2=\left(2MG^2\right)+\left(2GA^2-GB^2+GC^2\right)$$

$$+2\left(\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GA}\right)-\left(\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GB}\right)+\left(\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{GC}\right)=20$$

ومنه
$$2\overrightarrow{MA}^2-\overrightarrow{MB}^2+\overrightarrow{MC}^2=\left(2MG^2\right)+\left(2GA^2-GB^2+GC^2\right)$$
$$+\overrightarrow{MG}\left(2\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right)=20$$

حسب قانون المرجح $\overrightarrow{MG}\left(2\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right)=0$ نجد عندها

$\left(2MG^2\right)+\left(2GA^2-GB^2+GC^2\right)=20$ ومنه $MG=\sqrt{20-\left(2GA^2-GB^2+GC^2\right)}/2$

نحسب كلا من :
$$\begin{cases} DA=\left|Z_A-Z_D\right|=|2|=2 \\ DB=\left|Z_B-Z_D\right|=\left|2+2i\sqrt{3}\right|=4 \\ DC=\left|Z_c-Z_D\right|=\left|-2+2i\sqrt{3}\right|=4 \end{cases}$$

ومنه $MD=\sqrt{20-(8-16+16)}/2=\sqrt{3}$

المجموعة γ هي الدائرة التي مركزها D ذات اللاحقة $z_D=-3-i\sqrt{3}$ ونصف قطرها $r=\sqrt{3}$

ملاحظة : النقطة D هي نفسها النقطة G ونعني بها المرجح في الحالة العامة

تطبيقات:

تطبيق 1 نعتبر في المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. نعتبر النقط A ، B و C التي لاحقاتها على الترتيب

$z_A=3-2i$ ، $z_B=3+2i$ و $z_C=4i$:.

1. أ) علم النقط A ، B و C

ب) ما طبيعة الرباعي $OABC$ ؟ علّل إجابتك .

جـ)عين لاحقة النقطة Ω مركز الرباعي $OABC$

2. عين ثم أنشئ (E) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق :

$$\|\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|=12$$

3. أ) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-6z+13=0$

نسمي z_0 ، z_1 حلي هذه المعادلة .

ب) لتكن M نقطة من المستوي لاحقتها العدد المركب

عين مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق :

$$|z-z_0|=|z-z_1|$$

تطبيق 2 A و B نقطتان لاحقتيهما على الترتيب $z_A=\sqrt{3}-i$ ، $z_B=\sqrt{3}+i$

$(\mathcal{E})$ هي مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z التي تحقق

$$|z-\sqrt{3}+i|=2$$

(أ) بيّن أنّ النقطة B نقطة من المجوعة $(\mathcal{E})$

تطبيق 3 المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية:

$$z^2+z+1=0$$

2. نعتبر النقط A ، B و M ذات اللاحقات: $z_A=-\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ ، $z_B=\overline{z_A}$ و z على الترتيب. ($\overline{z_A}$ يرمز إلى مُرافق z_A)

(أ) أكتب z_A على الشكل الأسّي

(ب) عيّن مجموعة النقط M من المستوي حيث :

$$\arg[(z-z_A)^2]=\arg(z_A)-\arg(z_B)$$

4 تطبيق المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس المباشر $(O;\vec{u},\vec{v})$ (وحدة الرسم 2cm)

1. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة:

$$(z-2i)(z^2-2z+2)=0$$

تُعطى الحلول على شكلها الجبري و الأسي (مع التبرير)

2. لتكن النقطتين A و B ذات اللاحقتين

$z_A = 1+i$ و $z_B = 2i$

نرفق لكل عدد مركب z يختلف عن z_A العدد المركب:

$$z' = \frac{z-2i}{z-1-i}$$

(أ) لتكن (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث يكون z' عدد تخيّلي صرف. عيّن و أنشئ المجموعة (E)

(ب) لتكن (F) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث يكون $|z'|=1$. عيّن و أنشئ المجموعة (F)

5 تطبيق في المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس و المباشر $(O;\vec{u},\vec{v})$

1. لتكن المجموعة (E) للنقط M ذات اللاحقة z التي تحقق:

$z = 1-2i+e^{i\theta}$ مع θ عددا حقيقيا

- ☐ (E) هي المستقيم الذي يشمل النقطة ذات اللاحقة $-1+2i$
- ☐ (E) هي الدائرة التي مركزها النقطة ذات اللاحقة $-1+2i$ و نصف قطرها 1
- ☐ (E) هي الدائرة التي مركزها النقطة ذات اللاحقة $1-2i$ و نصف قطرها 1
- ☐ (E) هي الدائرة التي مركزها النقطة ذات اللاحقة $1-2i$ و نصف قطرها $\sqrt{5}$

6 تطبيق لتكن المجموعة (F) للنقط M من المستوي ذات اللاحقة z التي تحقق:

$$|z-1+i| = |z+1+2i|$$

و ليكن A، B و C النقط ذات اللواحق $1-i$، $-1+2i$ و $-1-2i$ على الترتيب

- ☐ النقطة C هي نقطة من المجموعة (F)
- ☐ (F) هي محور القطعة $[AB]$
- ☐ (F) هي محور القطعة $[AC]$
- ☐ (F) هي الدائرة التي قطرها $[AB]$