المؤسســــــــة:	المستـــــــــوى: الثالثة رياضيات
السنة الدراسية:	ميــــدان التعلم: هندسة
التاريــــــــــخ:	الوحدة التعلمية: الاعداد المركبة
توقيت الحصة :	موضوع الحصة : التحويلات النقطية في الاعداد المركبة

المكتسبات المستهدفة: تعيين الكتابة المركبة للتحويلات المألوفة (الانسحاب، التحاكي، الدوران).

الأنشطة المقترحة وطبيعتها	الإنجاز(ســير الحصة)	التعليمات والتوجيهات

7/ التحويلات النقطية

1.7 الشكل المركب لتحويل نقطي مألوف

المستوي منسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$

$N(x;y)$ و $N'(x';y')$ نقطتان من المستوي لاحقتاهما على الترتيب $Z;Z'$

الصيغة المركبة للتحويل النقطي المركب تعطى كما يلي $Z'=aZ+b$

تعريف التحويل النقطي:

التحويل النقطي L هو تطبيق يحول النقطة M الى النقطة M' : $L: P \to P'$

$M \to M' = L(M)$ $\qquad$ M' صورة M بالتحويل L

تعريف النقطة الصامدة:

نقول أن M نقطة الصامدة بالتحويل النقطي اذاكانت $M = L(M)$

0.1.7 التحويل المطابق

تعريف : التحويل المطابق هو التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M النقطة M' من المستوي حيث $M = M'$

خاصية : كل نقطة من المستوي صامدة بالتحويل المطابق

العبارة المركبة:

التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' لاحقتها z' حيث : $z' = z$ هو التحويل المطابق

1.1.7 الانسحاب

ليكن $\vec{u}\binom{\alpha}{\beta}$ شعاع غير معدوم من المستوي:

التعريف الهندسي:

T التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة N لاحقتها Z النقطة N' ذات اللاحقة Z'. وشعاعه $\vec{u}$

هذا يعني ان $\overrightarrow{NN'}=\vec{u}$

وبالتالي $\begin{cases} Z'-Z=\alpha+i\beta \\ Z'=Z+\alpha+i\beta \end{cases}$ هي عبارة مركبة للانسحاب الذي شعاعه $\vec{u}$ ونضع $(b=\alpha+i\beta)$

العبارة المركبة:

بعبارة اخرى : إذا كان $Z'=Z+b$ حيث : $\beta \in \mathbb{C}$

فإن : T انسحاب شعاعه $\vec{u}$ ذو اللاحقة β . $(b=\alpha+i\beta)$

التعريف التحليلي:

بعبارة اخرى : إذا كان $Z'=Z+b$ حيث : فان $x'+iy'=x+iy+\alpha+i\beta$

ومنه $x'+iy'=(x+\alpha)+i(y+\beta)$ اي ان $\begin{cases} x'=x+\alpha \\ y'=y+\beta \end{cases}$ تسمى عبارة تحليلية للانسحاب

ملاحظة هامة 1: مركب انسحابين هو انسحاب شعاعه مجموع الشعاعين

الأعداد المركبة والتحويلات النقطية من الشكل:

$M\ z \mapsto M'\ z'$

مع $z' = az + b$

و $a \in \mathbb{R}^*$ أو

$a \in \mathbb{C}$ و $|a|=1$

نبرز الكتابة المختصرة

$z'-z_0 = k\ z-z_0$

لكل من التحاكي و الدوران.

تطبيق:

عين طبيعة التحويل وعناصره المميزة في كل حالة

$z' = z - 1 + 5i \,.........T_1$

$z' = z + 1 - 2i \,.........T_2$

عين $T = T_1 \circ T_2$ واستنتج طبيعة هذا التحويل

عين A' صورة $A(1,-2)$ بواسطة T_2

الحل:

طبيعة التحويل وعناصره المميزة في كل حالة

$z' = z - 1 + 5i \,.........T_1$ انسحاب شعاعه $\vec{w} = (-1,5)$ لاحقته $z_w = -1 + 5i$

$z' = z + 1 - 2i \,.........T_2$ انسحاب شعاعه $\vec{w} = (1,-2)$ لاحقته $z_w = 1 - 2i$

$T = T_1 \circ T_2$ واستنتج طبيعة هذا التحويل

$T = T_1 \circ T_2 = T_1(T_2) = z'' = (z + 1 - 2i) - 1 + 5i_1$

$z'' = z + 3i_1$ انسحاب لاحقته $z_w = 3i$

ملاحظة هامة2:

في هذه الحالة $Z' = aZ + b$ يكون التحويل انسحاب اذا كان a=1 و منه لاحقة شعاعه هي $Z_{\vec{u}} = \dfrac{b}{1-a}$

حالة خاصة اذا كان a=-1 التحويل هو تناظر

خواص:

1). الانسحاب الذي شعاعه $\vec{u}$ هو تحويل نقطي تقابلي و تحويله العكسي هو الانسحاب الذي شعاعه $-\vec{u}$. اذن عبارته هي $Z' = Z - \alpha - i\beta$ أي a=1

2). الانسحاب الذي شعاعه غير معدوم لا يقبل أية نقطة صامدة و الانسحاب الذي شعاعه $\vec{0}$ هو التحويل الثابت.

الخاصة المميزة: صورة ثنائية A, B هي ثنائية A', B' تحقق $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$.

3). الانسحاب تقايس.

أمثلة :

ادرس طبيعة التحويل T الذي يرفق بالنقطة M ذات اللاحقة Z النقطة M' ذات اللاحقة Z' في كل حالة مما يلي : $Z' = Z - 1$ $Z' = Z + i + 1$

الحل:

1) لدينا : $Z' = Z - 1$ و

T انسحاب شعاعه $\vec{W}$ ذو اللاحقة -1.

2) لدينا : $Z' = Z + i + 1$

T انسحاب شعاعه $\vec{W}$ ذو اللاحقة 1 + i .

2.1.7 التحاكي

ليكن Ω نقطة ثابتة و k عدد حقيقي غير معدوم

التعريف الهندسي:

T التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة N لاحقتها Z النقطة N' ذات اللاحقة Z'. ومركزه Ω

ونسبته k هو تحاكي هذا يعني ان $\overrightarrow{\Omega N'}=k\overrightarrow{\Omega N}$ و $k \in \mathbb{R}-\{1\}$ بالتالي $Z'=kZ$ بعبارة اخرى إذا

كان : $Z'=\alpha Z+\beta$ حيث : $\alpha \in \mathbb{R}-\{1\}$

فإن : T تحاك مركزه Ω ذو اللاحقة β. $\left(\beta=x+iy\right)$ ونسبته $k=|a|$

خواص: للتحاكي نقطة صامدة وهي المركز Ω

صورة ثنائية نقطية (A,B) بالتحاكي الذي مركزه Ω ونسبته k هي الثنائية النقطية (A',B') حيث

$$\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{A'B'}$$

التحاكي يحافظ على الاستقامية واقياس الزوايا والمرجح والتوازي

نشاط: المستوى المركب المزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$

نعتبر التحاكي h الذي مركزه Ω ذات اللاحقة $z_\Omega=2+4i$ ونسبته k حيث $k=\frac{-3}{2}$

لتكن M ذات اللاحقة Z و M' ذات اللاحقة z' صورة M بالتحاكي h

– اكتب $\overrightarrow{AM'}$ بدلالة $\overrightarrow{AM}$ ثم استنتج z' بدلالة Z

التعريف المركب للتحاكي :

تعريف01

المستوى المركب المزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$

k *عدد حقيقي غير معدوم ويختلف عن 1 .Ω نقطة ثابتة من المستوي لاحقتها العدد المركب* z_Ω

Z و z' عددان مركبان صورتهما النقطتين M و M' على الترتيب

العبارة المركبة للتحاكي الذي مركزه Ω ونسبته k والذي يحول النقطة M الى النقطة M' هي

$$z'-z_\Omega=k(z-z_\Omega)$$

مثال تطبيقي: أعط العبارة المركبة للتحاكي h الذي مركزه Ω ذات اللا حقة $z_\Omega=-1+i$

ونسبته *-3*

ملاحظة:

$$z'-z_\Omega=a(z-z_\Omega) \text{ معناه } z'=az+(1-a)z_\Omega \text{ معناه } z'=az+b$$

تعريف02

التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث

$z'=az+b$ مع a عدد حقيقي غير معدوم و يختلف عن 1 و b عدد مركب ، هو التحاكي الذي

مركزه النقطة Ω ذات اللاحقة $\frac{b}{1-a}$ ونسبته a .

التعريف التحليلي:

بعبارة اخرى : إذا كان $Z'=aZ+b$ حيث : فان $x'+iy'=ax+iay+\alpha+i\beta$

ومنه $x'+iy'=(ax+\alpha)+i(ay+\beta)$ اي ان $\begin{cases} x'=ax+\alpha \\ y'=ay+\beta \end{cases}$ تسمى عبارة تحليلية للتحاكي

اذا كان $z-z_0=k(z-z_0)$ هو التعريف المركب فان عبارته التحليلية هي $\begin{cases} x'=kx+(1-k)x_0 \\ y'=ky+(1-k)y_0 \end{cases}$

مثال تطبيقي :ماهي طبيعة التحويل النقطي المعرف بـ: $z' = -\frac{3}{2}z - 2 + 3i$

تطبيق رقم 82 صفحة 150

A ، B و C ثلاث نقط من المستوى لواحقها على الترتيب $a=3+i$ ، $b=-2+3i$ و $8-i$

أ .عيّن نسبة التحاكي h ذي المركز C والذي يحوّل A إلى B .

تطبيق رقم 85 صفحة 150

t هو التحويل في المستوي الذي يرفق بكل نقطة M ذات الإحداثيتين (x,y) ، النقطة M' ذات الإحداثيتين (x',y') حيث : $x'=2x-\frac{3}{2}$ و $y'=2y+\frac{1}{2}$.

أ . ما هي طبيعة التحويل t ؟

ب . أكتب العبارة المركّبة للتحويل

خواص:

- إذا اختلفت M عن Ω فإن M' تختلف عن Ω و النقط Ω ، M و M' على استقامة واحدة .
- $\overrightarrow{\Omega M'}=k\overrightarrow{\Omega M}$ يعني $\overrightarrow{\Omega M}=\frac{1}{k}\overrightarrow{\Omega M'}$ و نستنتج أن : التحاكي الذي مركزه Ω و نسبته k هو تحويل نقطي تقابلي و تحويله العكسي هو التحاكي الذي مركزه Ω و نسبته $\frac{1}{k}$.
- الخاصية المميزة: صورة ثنائية A,B بالتحاكي الذي مركزه ω و نسبته k هي الثنائية A',B' التي تحقق: $\overrightarrow{A'B'}=k\overrightarrow{AB}$
- نلاحظ أنه إذا كان $|k|\neq 1$ فإن $A'B'\neq AB$ و بالتالي فإن التحاكي ليس تقايسا.

3.1.7 الدوران

التعريف الهندسي : ω نقطة من المستوي الموجه و θ عدد حقيقي

الدوران الذي مركزه Ω و زاويته θ هو التحويل النقطي الذي يرفق النقطة Ω بنفسها و يرفق بكل نقطة M تختلف عن Ω النقطة M' حيث: $\Omega M'=\Omega M$ و $\left(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'}\right)=\theta$

خواص:

1) الدوران الذي مركزه Ω و زاويته غير معدومة له نقطة صامدة وحيدة هي المركز Ω.

2) الدوران الذي مركزه ω و زاويته θ تحويل تقابلي و تحويله العكسي هو الدوران الذي مركزه ω و زاويته $-\theta$.

3) الخاصية المميزة: صورة كل ثنائية A,B بالدوران الذي مركزه ω و زاويته θ هي ثنائية A',B' تحقق ما يلي: $A'B'=AB$ و $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A'B'}\right)=\theta$ تبين هذه النتيجة أن

4) الدوران تقايس.

5) الدوران يحافظ على الاستقامية واقياس الزوايا والمرجح

نشاط : المستوي المركب المزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$

نعتبر الدوران الذي مركزه r ذات اللاحقة Ω وزاويته $z_\Omega = 1-2i$ ، $\theta=\frac{\pi}{3}$

لتكن M' ذات اللاحقة z' صورة M ذات اللاحقة Z بالتحاكي h

- أحسب $\frac{\Omega M'}{\Omega M}$ و $\left(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'}\right)$ ثم استنتج طويلة وعمدة العدد المركب $\frac{z'-z_\Omega}{z-z_\Omega}$
- أكتب z' بدلالة z

التعريف المركب

تعريف01 :

المستوي المركب المزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$

θ عدد حقيقي ،Ω نقطة ثابتة من المستوي لاحقتها العدد المركب z_Ω

Z و Z' عددان مركبان صورتهما النقطتين M و M' على الترتيب

العبارة المركبة للدوران الذي مركزه Ω وزاويته θ والذي يحول النقطة M الى النقطة M'هي

$$z'-z_\Omega=e^{i\theta}(z-z_\Omega)$$

مثال تطبيقي : أكتب العبارة المركبة للدورا الذي مركزه Ω ذات الاحقة $z_\Omega=2-4i$ وزاويته $\frac{\pi}{6}$

ملاحظة : $z'-z_\Omega=e^{i\theta}(z-z_\Omega)$ ومنه $z'=e^{i\theta}z+z_\Omega(1-e^{i\theta})$

نضع $a=e^{i\theta}$ ومنه a عدد مركب طويلته 1 ، نضع $b=z_\Omega(1-e^{i\theta})$ ومنه $z_\Omega=\frac{b}{1-a}$

ومنه نستنج أن : $z'=az+b$

تعريف 2 :

التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث $z'=az+b$ مع a عدد مركب غير حقيقي طويلته 1 و b عدد مركب ، هو الدوران الذي مركزه النقطة Ω ذات اللاحقة $\frac{b}{1-a}$ ، وزاويته $\arg a$.

التعريف التحليلي:

بعبارة اخرى إذا كان : $Z'=aZ+b$ حيث : فان $x'+iy'=ax+iay+\alpha+i\beta$

ومنه $x'+iy'=(ax+\alpha)+i(ay+\beta)$ اي ان $\begin{cases}x'=ax+\alpha\\ y'=ay+\beta\end{cases}$ تسمى عبارة تحليلية للتحاكي

اذا كان $z-z_0=e^{i\theta}(z-z_0)$ هو التعريف المركب فان عبارته التحليلية هي

$$\begin{cases}x'=(x-x_0)\cos\theta-(y-y_0)\sin\theta+x_0\\ y'=(x-x_0)\sin\theta+(y-y_0)\cos\theta+y_0\end{cases}$$

مثال تطبيقي : ماهي طبيعة التحويل L المعرف ب : $z'=\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)z+2+\sqrt{2}-i\sqrt{2}$

تطبيق : A و B نقطتان من المستوي لاحقتاهما $a=\frac{1}{2}(1+i)$ و $b=\frac{\sqrt{2}}{2}i$

عين زاوية الدوران الذي مركزه مركزه o ويحول النقطة A الى B

تمرين 161 صفحة 159

نعتبر العددين المركبين $a=3+i\sqrt{3}$ ، $b=2+\sqrt{3}+3i$.

A ، B و C نقط من المستوي لواحقها a ، $\bar{a}$ و b على الترتيب .

1) بيّن أن المثلث ABO متساوي الساقين ، ثمّ عيّن z_G لاحقة مركز ثقله G .

2) ليكن α و β عددين مركبين وليكن T التحويل النقطي في المستوي الذي يحوّل $M(z)$ إلى $M'(z')$ حيث $z'=\alpha z+\beta$.

أ . عيّن α و β حيث يكون $T(O)=G$ و $T(A)=C$.

ب . بيّن أنّ التحويل T هو دوران يطلب تعيّن مركزه وزاويته .

ج . استنتج صورة المستقيم (OA) بالدوران T

تمرين :

1/ حل في C المعادلة التالية : $4z^2-12z+153=0$

2/ المستوي منسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$

نعتبر A و B ، C ، P . لوحقها $z_A=\frac{3}{2}+6i$ ، $z_B=\frac{3}{2}-6i$ ، $z_c=-3-\frac{1}{4}\text{i}$ ،

$z_p=3+2i$ و الشعاع $\vec{w}$ ذا اللاحقة $z_{\vec{w}}=-1+\frac{5}{2}i$

- عين اللاحقة z_Q للنقطة Q صورة النقطة B بالانسحاب t الذي شعاعه $\vec{w}$
- عين اللاحقة z_R للنقطة R صورة النقطة P بالتحاكي h الذي مركزه C ونسبته $\frac{-1}{3}$
- عين اللاحقة z_S للنقطة S صورة النقطة P بالدوران r الذي مركزه A وزاويته $\frac{-\pi}{2}$
- أنشئ النقط: P ، Q ، R ، S.

3/ - أثبت أن الرباعي $PQRS$ متوازي الأضلاع

- أحسب $\frac{z_R-z_Q}{z_P-z_Q}$ ، ماذا تستنتج

تمرين(1): المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$.

ليكن التحويل النقطي f الذي إلى كل نقطة $M\,(x\,,y\,)$ يرفق النقطة $M\,'(x\,',y\,')$ حيث

$\begin{cases} x\,'=x+2 \\ y\,'=y-3 \end{cases}$.أثبت أن التحويل f انسحاب

تمرين(2): المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$.

ليكن التحويل النقطي g الذي إلى كل نقطة $M\,(x\,,y\,)$ يرفق النقطة $M\,'(x\,',y\,')$ حيث

$\begin{cases} x\,'=-3x+\frac{1}{2} \\ y\,'=-3y-5 \end{cases}$. أثبت أن التحويل g تحاك يطلب عناصره المميّزة .

4.1.7 التشابه

التعريف الهندسي

نشاط : المستوى المركب المزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$

نعتبر S التحويل النقطي في المستوى الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة $z = x + iy$ النقطة M'

ذات اللاحقة $z' = x' + iy$ حيث : $\begin{cases} x' = x - y + 4 \\ y' = x + y \end{cases}$

1- بين أن التحويل S يقبل نقطة صامدة وحيدة Ω يطلب تحديدها

2- أكتب z' بدلالة z

3- نفرض أن $M \neq \Omega$

أ- أثبت أن : $z' - z_\Omega = (1+i)(z - z_\Omega)$

ب- أثبت أن النسبة $\dfrac{\Omega M'}{\Omega M}$ ثابتة يطلب تحديدها

ت- أثبت أن الزاوية $\left(\overrightarrow{\Omega M};\overrightarrow{\Omega M'}\right)$ ثابتة يطلب تحديدها

4- لتكن النقط $A(3,0)$ ، $B(0,-2)$ ، $C(3,-2)$

نسمي A' ، B' ، C' صور A ، B ، C على الترتيب بالتحويل S

- ما طبيعة المثلثان ABC و $A'B'C'$
- أثبت أن المثلثان ABC و $A'B'C'$ متشابهان
- أحسب مساحة المثلث ABC و، ثم مساحة المثلث $A'B'C'$

تعريف :

نسمي تشابها مباشرا للمستوى كل تحويل نقطي في المستوي يحافظ على نسب المسافات والزوايا الموجهة

نتيجة :

لتكن A و B ، C ، D نقط متمايزة مثنى مثنى من المستوي و A' و B' ، C' ، D' صورها على الترتيب بالتحويل S يكون التحويل النقطي S تشابها مباشرا للمستوي اذا وفقط اذا وجد عدد حقيقي موجب تماما K يحقق $\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{C'D'}{CD} = k$ و $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{A'B'}\right) = \left(\overrightarrow{CD};\overrightarrow{C'D'}\right)$

العدد الحقيقي الموجب تماما k يسمى نسبة التشابه المباشر ، الزاوية $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{A'B'}\right)$ هي ثابتة وتسمى زاوية التشابه المباشر

تعيين تشابه مباشر

خاصية :

إذا كان S تشابها مباشرا مركزه Ω نسبته $1 - \mathbb{R}_+^* \ni k$ k و زاويته θ فإن :

- $S(\Omega) = \Omega$.

التعريف المركب للتشابه المباشر :

خاصية

التحويل النقطي S هوتشابه مباشر اذا وفقط اذاكانت كتابته المركبة من الشكل $z' = az + b$ مع a و b عددين مركبين و a عدد مركب غير معدوم ، نسبته $|a|$ و زاويته $\arg(a)$

الكتابة المختصرة لتشابه المباشر

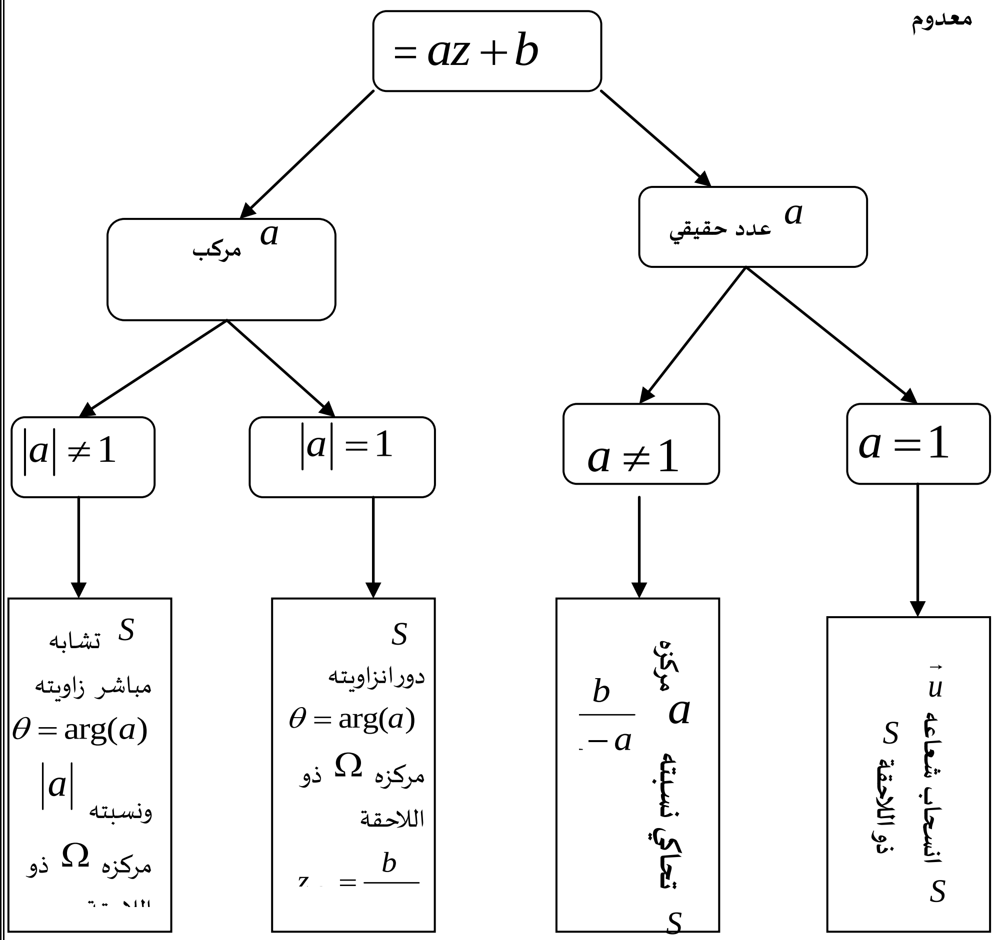
خاصية

المستوى المركب المزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$

العبارة المركبة للتشابه S الذي مركزه Ω ونسبته العدد الحقيقي الموجب k وزاويته θ والذي يحول النقطة M ذات اللاحقة z الى النقطة M' ذات اللاحقة z' هي : $z' - z_\Omega = ke^{i\theta}(z - z_\Omega)$

مخطط تصنيف التشابهات المباشرة

S تشابه مباشر كتابته المركبة $z' = az + b$. مع a و b عددين مركبين و a عدد مركب غير معدوم



7: الاعداد المركبة والتحويلات النقطية

مبرهنة :

ليكن f التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها Z النقطة M' ذات اللاحقة Z' .

1). إذا كان : $Z' = Z + \beta$ حيث : $\beta \in \mathbb{C}$

فإن : f انسحاب شعاعه $\vec{v}$ ذو اللاحقة β.

2). إذا كان : $Z' - Z_0 = k(Z - Z_0)$ حيث $Z_0 \in \mathbb{C}$ و $k \in \mathbb{R}^*$

فإن f تحاكي نسبته k و مركزه النقطة M_0 ذات اللاحقة Z_0 .

3). إذا كان : $Z' - Z_0 = e^{i\theta}(Z - Z_0)$ حيث $Z_0 \in \mathbb{C}$ و $\theta \in \mathbb{R}$

فإن f دوران مركزه النقطة M_0 ذات اللاحقة Z_0 وزاويته θ .

البرهان:

1) إذا كان $Z' = Z + \beta$ فإن $Z' - Z = Z_{\overrightarrow{MM'}} = \beta$

ومنه من أجل كل نقطة M من المستوي فإن الشعاع $\overrightarrow{MM'}$ ثابت. وعليه فهو يعرف انسحاب .

2) إذا كان $Z' - Z_0 = k(Z - Z_0)$ فإن صورة النقطة M_0 ذات اللاحقة Z_0 بواسطة f هي نفسها. ومن أجل $Z \neq Z_0$ فإن : $k \in \mathbb{R}^*$, $\frac{Z' - Z_0}{Z - Z_0} = k$

ومنه : $|k| = \frac{M_0M'}{M_0M}$

فإذا كان $k > 0$ فإن : $(\overrightarrow{M_0M} ; \overrightarrow{M_0M'}) = 0\ [2\pi]$

و إذا كان $k < 0$ فإن : $\left(\overrightarrow{M_0M}\ ;\ \overrightarrow{M_0M'}\right) = \pi\ [2\pi]$

وفي الحالتين النقط M_0 , M , M' على استقامة واحدة.

و بالنسبة $|k| = \dfrac{M_0M'}{M_0M}$ تميز تحاكي مركزه M_0 و نسبته k .

4). إذا كان $Z' - Z_0 = e^{i\theta}(Z - Z_0)$ فإن صورة النقطة M_0 ذات اللاحقة Z_0 بواسطة f هي نفسها. ومن أجل : $Z \neq Z_0$

فإن : $\dfrac{Z' - Z_0}{Z - Z_0} = e^{i\theta}$ ومنه : $\dfrac{M_0M'}{M_0M} = 1$ و $\left(\overrightarrow{M_0M}\ ;\ \overrightarrow{M_0M'}\right) = \theta\ [2\pi]$

هاتين العلاقتين تميزان دوران مركزه M_0 و زاويته θ .

أمثلة :

ادرس طبيعة التحويل f الذي يرفق بالنقطة M ذات اللاحقة Z النقطة M' ذات اللاحقة Z' في كل حالة مما يلي :

1) $Z' = 3Z$ 2) $Z' = Z + i + 1$ 3) $Z' = Z - 1$

4) $Z' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(i + 1)\,Z + i$ 5) $Z' = iZ$ 6) $Z' = -2Z + i + 2$

الحل :

1) لدينا : $Z' = Z - 1$ f انسحاب شعاعه $\vec{w}$ ذو اللاحقة 1-.

2) لدينا : $Z' = Z + i + 1$ f انسحاب شعاعه $\vec{w}$ ذو اللاحقة 1+i .

3) لدينا : $Z' = 3Z$ f تحاك نسبته 3 و مركزه O .

4) لدينا : $Z' = -2Z + i + 2$ f تحاك نسبته 2- و مركزه I حيث لاحقته $Z_0 = \dfrac{i}{1 - i - 1}$.

إذن $Z_0 = -1$.

5) لدينا : $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$, $Z' = iZ$ f دوران مركزه O وزاويته عمدة i أي $\dfrac{\pi}{2}$.

6) لدينا : $Z' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(i + 1)\,Z + i$ ولدينا : $\dfrac{\sqrt{2}}{2}(i + 1) = e^{i\frac{\pi}{4}}$

وعليه f دوران زاويته $\dfrac{\pi}{4}$ و مركزه النقطة ذات اللاحقة Z_0

حيث : $Z_0 = \dfrac{i}{1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)}$ ومنه : $Z_0 = \dfrac{2i}{2 - \sqrt{2} - \sqrt{2}i}$ أي :

$$Z_0 = \frac{2i\left(2 - \sqrt{2} + \sqrt{2}i\right)}{\left[2 - \sqrt{2} - \sqrt{2}i\right]\left[2 - \sqrt{2} + \sqrt{2}i\right]}$$ وعليه : $$Z_0 = \frac{-2\sqrt{2} + 2\left(2 - \sqrt{2}\right)i}{\left(2 - \sqrt{2}\right)^2 + 2}$$

الاعداد المركبة والتحويلات النقطية

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}$ f تحويل نقطي من المستوي المركب الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث $z'=az+b$ مع $a\in C^*$ و $|a|=1$. ونكتب $f\left(M\right)=M'$ يعني $z'=az+b$.

1.الحالة الأولى $a=1$.

خاصية:التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث $z'=z+b$ و b عدد مركب هو انسحاب شعاعه $\vec{U}$ صورة b.

2.الحالة الثانية $a\in\mathbb{R}^*-\{1\}$.

خاصية:التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث $z'=az+b$ مع a عدد حقيقي غير معدوم و يختلف عن 1 و b عدد مركب ، هو التحاكي الذي مركزه Ω النقطة الصامدة ذات اللاحقة $\dfrac{b}{1-a}$ ونسبته a.

3.الحالة الثالثة $a\in\mathbb{C}$ و $|a|=1$.

خاصية:التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث $z'=az+b$ مع a عدد مركب غير حقيقي طويلته 1 و b عدد مركب ، هو الدوران الذي مركزه النقطة Ω النقطة الصامدة ذات اللاحقة $\dfrac{b}{1-a}$ ، وزاويته $\arg a$.

تمرين(1): المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}$. $t_{\vec{u}}$ هو الانسحاب الذي شعاعه $\vec{u}\left(3;-2\right)$

1)عين العبارة المركبة للانسحاب $t_{\vec{u}}$ و استنتج العبارة التحليلية له.

2) A النقطة التي لاحقتها $2-i$ ، عين لاحقة النقطة A' صورة A بالانسحاب $t_{\vec{u}}$.

تمرين(2): المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}$. h التحاكي الذي مركزه A ذات اللاحقة $-2+i$ و نسبته 3.

عين العبارة المركبة للتحاكي h.

B النقطة التي لاحقتها $-4-5i$ ، عين لاحقة النقطة B' صورة B بالتحاكي h.