المؤسسة: ثانوية خالص سليمان -بشلول -	بطاقة رقم: 54/10	الأستاذ: شداني عبد المالك	
الحصة	هندسة	التاريخ	فيفري 2016
المحور	الأعداد المركبة	القسم	3 علوم تجريبية
الموضوع	الأعداد المركبة و التحويلات النقطية	المدة	ساعة واحدة
الكفاءات المستهدفة	حل مسائل هندسية تتطلب إستعمال انسحابات وتحاكيات أو دورانات بواسطة أعداد مركبة	المعارف المكتسبة	
الوسائل البداغوجية	السبورة، المسطرة، المدور	المراجع	الكتاب المدرسي، كتاب الأستاذ

سير الدرس	مراحل الدرس	الزمن
كل الحصة عبارة عن أنشطة	**تطبيق1:** A ، B ، C ثلاث نقاط لواحقها على التوالي: $a=6$ ، $b=-6+4i$ ، $c=-2-4i$ 1) أ) تحقق أن $b-c=i(a-c)$ ب) إستنتج أن المثلث ABC قائم ومتساوي الساقين 2) نرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' بحيث: $z'=e^{i\frac{\pi}{3}}z$ أ) ما هي طبيعة هذا التحويل؟ ب) أحسب a' ، b' ، c' لواحق النقط A' ، B' ، C' صور A ، B ، C بهذا التحويل 3) P ، Q ، R منتصفات القطع $[A'B]$ ، $[B'C]$ ، $[C'A]$ لواحقها هي : p ، q ، r على الترتيب أ) أحسب p ، q ، r ب) تحقق أن $r-p=e^{i\frac{\pi}{3}}(q-p)$ و إستنتج أن المثلث PQR متقايس الأضلاع	35د

الحل:

1) أ) لدينا: $\begin{cases} b-c=(-6-4i)=-4+8i \\ i(a-c)=i(6+2+4i)=-4+8i \end{cases}$ ومنه: $b-c=i(a-c)$ ...(*)

ب) من العلاقة (*) نستنتج أن B هي صورة A بالدوران الذي مركزه C و زاويته $\frac{\pi}{2}$

وعليه: $CA=CB$ و $(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB})=\frac{\pi}{2}$ و بالتالي المثلث ABC قائم في C ومتساوي الساقين

2) أ) طبيعة التحويل هو دوران مركزه النقطة O و زاويته $\frac{\pi}{3}$

ب)

$$\begin{cases} a'=e^{i\frac{\pi}{3}}a=6\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=3+i3\sqrt{3} \\ b'=e^{i\frac{\pi}{3}}b=(-6+4i)\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\left(-3-2\sqrt{3}\right)+i\left(2-3\sqrt{3}\right) \\ c'=e^{i\frac{\pi}{3}}c=(-2-4i)\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\left(-1+2\sqrt{3}\right)+i\left(-2-\sqrt{3}\right) \end{cases}$$

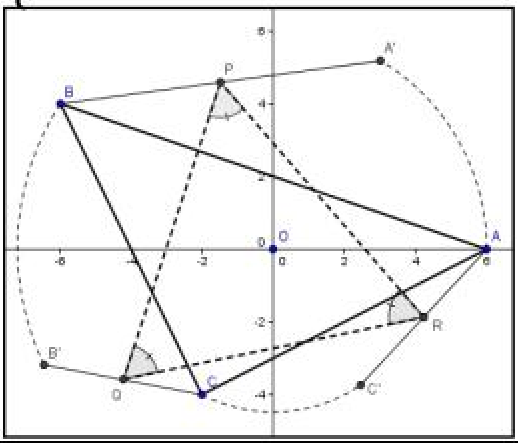
3)

$$\begin{cases} p=\dfrac{a'+b}{2}=\dfrac{3+i3\sqrt{3}+4i-6}{2}=-\dfrac{3}{2}+i\dfrac{3\sqrt{3}+4}{2} \\ q=\dfrac{b'+c}{2}=\dfrac{\left(-3-2\sqrt{3}\right)+i\left(2-3\sqrt{3}\right)-2-4i}{2}=\dfrac{-5-2\sqrt{3}}{2}+i\dfrac{-2-3\sqrt{3}}{2} \\ r=\dfrac{c'+a}{2}=\dfrac{\left(-1+2\sqrt{3}\right)+i\left(-2-\sqrt{3}\right)+6}{2}=\dfrac{5+2\sqrt{3}}{2}+i\dfrac{-2-\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

ب)

$$\begin{cases} \bullet\ r-p=\dfrac{8+2\sqrt{3}}{2}+i\dfrac{\left(-2-\sqrt{3}-3\sqrt{3}-4\right)}{2}=4+\sqrt{3}+i\left(-3-2\sqrt{3}\right) \\ \bullet\ e^{i\frac{\pi}{3}}(q-p)=\left(\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\left[\left(-1-\sqrt{3}\right)+i\left(-3-3\sqrt{3}\right)\right] \\ \qquad =\left[\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(-3-3\sqrt{3}\right)\right]+i\left[\dfrac{-3-3\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(-1-\sqrt{3}\right)\right] \\ \qquad =\left[\dfrac{-1\sqrt{3}+\sqrt{3}+9}{2}\right]+i\left[\dfrac{-3-3\sqrt{3}-\sqrt{3}-3}{2}\right] \\ \qquad =4+\sqrt{3}+i\left(-3-2\sqrt{3}\right) \end{cases}$$

ومنه نستنتج أن R هي صورة Q بالدوران الذي مركزه P و زاويته $\frac{\pi}{3}$،
إذن المثلث PQR متقايس الأضلاع



تطبيق2:

ينسب المستوي المركب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$، (C) الدائرة ذات المركز O و نصف القطر 1، نعتبر النقطة A من (C) ذات اللاحقة $z_A=e^{i\frac{\pi}{3}}$ و ليكن الدوران r الذي مركزه O و زاويته $\frac{2\pi}{3}$.

1) عين لاحقة النقطة B صورة النقطة A بالدوران r
عين لاحقة النقطة C صورة النقطة B بالدوران r.

2) أ) برر أن (C) الدائرة المحيطية بالمثلث ABC ثم أنشئ A، B و C .
ب) ماهي طبيعة المثلث ABC.

3) ليكن h التحاكي الذي مركزه O و نسبته -2.
أ) أنشئ النقط P ، Q و R صور النقط A، B و C على الترتيب بالتحاكي h
.
ب) مــــاهي طبيعة المثلث PQR؟

4) أ) أعط الكتابة المركبة للتحاكي h.
ب) أحسب $z_A+z_B+z_C$ ثم إستنتج أن A منتصف القطعة $[QR]$.
ج) مـــاذا يمثل المستقيم (QR) بالنسبة للدائرة (C)؟

الحل :

الحل:

1) تعيين z_B لاحقة النقطة B :

لدينا النقطة B صورة النقطة A بالدوران r الذي مركزه O و زاويته $\frac{2\pi}{3}$ أي

$r(A)=B$ اي $z_B-z_O=e^{i\frac{2\pi}{3}}(z_A-z_O)$ يكافئ

$z_B=e^{i\frac{2\pi}{3}}e^{i\frac{\pi}{3}}=e^{i\pi}=\cos\pi+i\sin\pi$ ومنه $z_B=-1$.

تعيين z_C لاحقة النقطة C:

لدينا النقطة C صورة النقطة B بالدوران r الذي مركزه O و زاويته $\frac{2\pi}{3}$ أي

$r(B)=C$ اي $z_C-z_O=e^{i\frac{2\pi}{3}}(z_B-z_O)$ يكافئ

$z_B=e^{i\frac{2\pi}{3}}(-1)=-\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ومنه $z_C=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2) أ) تبيان أن (C) هي الدائرة المحيطية بالمثلث ABC :

لدينا ، $|z_A|=|z_B|=|z_C|=1$ معناه $OA=OB=OC=1$ إذن النقاط A ، B ، C تنتمي إلى نفس الدائرة ذات المركز O و نصف القطر 1 .

ب) طبيعة المثلث ABC :

لدينا:

$$\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}=\frac{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}+1}{\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}+1}=\frac{3+i\sqrt{3}}{3-i\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}=\frac{\left(\sqrt{3}+i\right)^2}{4}=\frac{2+i2\sqrt{3}}{4}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

منه: $\begin{cases}\left|\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}\right|=\left|\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right|=1\\ \arg\left(\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}\right)=\arg\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\pi}{3}\end{cases}$ يكافئ $\begin{cases}BA=BC\\ \left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}\right)=\frac{\pi}{3}\end{cases}$ وعليه

المثلث ABC متقايس الأضلاع.

3) أ) إنشـــاء النقط P ، Q و R :

لدينا h تحاكي الذي مركزه O و نسبته -2

P صورة النقطة A بواسطة التحاكي h معناه $\overrightarrow{OP}=-2\overrightarrow{OA}$

Q صورة النقطة B بواسطة التحاكي h معناه $\overrightarrow{OQ}=-2\overrightarrow{OB}$

R صورة النقطة C بواسطة التحاكي h معناه $\overrightarrow{OR}=-2\overrightarrow{OC}$

ب) طبيعة المثلث PQR :

نعلم أن التحاكي يحافظ على الزوايا الموجهة و عليه
$\left(\overrightarrow{QR};\overrightarrow{QP}\right)=\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}\right)=\dfrac{\pi}{3}$

و نعلم أيضا أن التحاكي يضاعف الأطوال بـ $|k|$ و عليه $\begin{cases}QR=2BC\\QP=2BA\end{cases}$ و عليه

$QR=PQ$ لأن $BC=BA$

الخلاصة : المثلث PQR متقايس الأضلاع.

4) أ) العبارة المركبة للتحاكي h :

لتكن النقطة M' ذات اللاحقة z' صورة النقطة M بذات اللاحقة z بواسطة التحاكي h الذي مركزه O و نسبته -2 معناه $z'-z_O=-2(z-z_O)$ و عليه $z'=-2z$.

ب) تبيان أن A منتصف القطعة $[QR]$:

لدينا $z_A+z_B+z_C=\dfrac{1}{2}+i\cancel{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}-1+\dfrac{1}{2}-i\cancel{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=1-1=0$

لدينا $\dfrac{z_Q+z_R}{2}=\dfrac{-2z_B-2z_C}{2}=-z_B-z_C$ و بما أن $z_A+z_B+z_C=0$ نجد

$z_A=-z_B-z_C$ اي $\dfrac{z_Q+z_R}{2}=z_A$

الخلاصة: النقطة A منتصف القطعة المستقيمة $[QR]$.

ج) ماذا يمثل المستقيم (QR) بالنسبة للدائرة (C) :

بما أن النقطة A تقع على الدائرة (C) وفي نفس الوقت تنتمي إلى المستقيم (QR) و عليه المستقيم (QR) يمس الدائرة (C) في النقطة A .

الشكل الهندسي: