نهائي رياضيات وتقني

الأعداد الأولية 2015

المحور الثالث

الكفاءة المستهدفة

- التعرّف على أولية عدد طبيعي.
- استعمال تحليل عدد طبيعي إلى جداء عوامل أولية لتعيين مضاعفات عدد طبيعي وقاسمه.
- استعمال تحليل عدد طبيعي إلى جداء عوامل أولية لتعيين المضاعف المشترك والقاسم المشترك الأكبر
- استعمال العلاقة بين المضاعف المشترك الأصغر والقاسم المشترك الأكبر.
- استعمال خواص المضاعف المشترك الأصغر.
- استعمال مبرهنة بيزو.
- استعمال مبرهنة غوص ونتائجها

المكتسبات القبلية

- الاعداد الاولية
- التحليل الى جداء عوامل اولية

الاستاذ يوسفي عبد الرحمن

الاعداد الاولية

نعمم يهتم علم الحساب، باعتباره فرع من فروع الرياضيات، بدراسة الأعداد حيث يعد من أقدم ميادينها وأول من أعطى أسس هذا العلم هو إقليدس، غيرأنه لم يأخذ هذا العلم حظه إلا عندما توصل العرب إلى أنظمة تعداد بينما كان إقليدس في عهده يمثل الأرقام بقطع مستقيمة، الشيء الذي لم يكن ملائما للوصول إلى بناء "نظريه للأعداد".

وقد أعتبر علم الحساب منذ بدايته كمحفز جيد للتكون العقلي لدى الإنسان، إضافة إلى ذلك فقد استفاد المهتمين به من تدريبات فذة بالنسبة للعمليات الذهنية، وهي اليوم تجد مجالا أوسع في تطبيقه في الواقع، نذكر على سبيل المثال التشفير

ســــــــــــــــــير الدرس	التوقيت
نشاط	
1: الاعداد الاولية تعاريف وخواص	1 سا
2: تحليل عدد طبيعي الى جداء عوامل اولية	1 سا
3: المضاعف المشترك الاصغر لعددين	1 سا
4: تمديد المشترك الاكبر لعددين	1 سا
5: حساب القاسم المشترك الاصغر باستعمال التحليل الى جداء عوامل اولية	1 سا
6: حساب المضاعف المشترك الاكبر باستعمال التحليل الى جداء عوامل اولية	1 سا
7:مبرهنة بيزو مبرهنة غوص	

وثائق التحضير	الوسائل البيداغوجية	نقد ذاتي
• دليل الأستاذ • الكتاب المدرسي • المنهاج •	• السبورة •	

المؤسســــــة:	المستـــــــوى: الثالثة رياضيات
السنة الدراسية:	ميــدان التعلم: الاعداد والحساب
التاريـــــــخ:	الوحدة التعلمية: الاعداد الاولية
توقيت الحصة :	موضوع الحصة : الاعداد الاولية

المكتسبات المستهدفة: التعرف على اولية عدد

الأنشطة المقترحة وطبيعتها	الإنجاز (ســـــير الحصة)	التعليمات والتوجيهات
نشاط مقترح	**1 النشاط**	يبرهن وجود تحليل عدد طبيعي إلى جداء عوامل أولية و نقبل، دون برهان، وحدانية هذا التحليل.

1) عيّن من بين الأعداد الآتية الأعداد الأولية: 0، 1، 12، 29

2) ما هو أصغر عدد أولي؟

3) عيّن قائمة الأعداد الأولية الأصغر من 20.

4) نريد تعيين قائمة الأعداد الأولية الأصغر من أو المساوية 100، و لأجل ذلك نستعمل غربال إراطوستان كما يلي:

اكتب في جدول قائمة الأعداد من 2 إلى 100 كما يلي:

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

- أحفظ 2 الذي هو عدد أولي ثمّ اشطب كلّ مضاعفاته. اشرح لماذا هذه الأعداد ليست أولية؟

2 الحـــل

1/الاعداد الاولية

1.1 تعريف

تعريف

القول أن العدد الطبيعي n عدد أولي معناه أن n يقبل قاسمين بالضبط في $\mathbb{N}$: 1 و n نفسه

ملاحظات و نتائج:

- 0 غير أولي لأنه يقبل ما لانهاية من القواسم .
- 1 غير أولي لأنه يقبل قاسم واحد هو 1 .
- 2 هو العدد الأوّلي الزوجي الوحيد .
- 2 ، 3 ، 5 ، 7 ، 11 ، 13 ، 17 ، 19 ، 23 هي الأعداد أولية الأصغر من 25 .

2.1 خواص

خاصية1: كل عدد طبيعي n أكبر تماما من 1 $n \geq 2$ يقبل على الأقل قاسما أوليا ..

البرهان : ليكن n عددا طبيعيا أكبر تماما من 1 .

- إذا كان n أوليا فإن n يقسم n والخاصية محققة .
- إذا كان n غير أولي فإن n يقبل على الأقل قاسما يختلف عن 1 وعن n . ليكن p أصغر قاسم للعدد n يختلف عن 1 وعن n. نفرض p غير أولي و منه يوجد عدد طبيعي d يقسم p حيث $1<d<p$. و بالتالي d يقسم n وهذا تناقض (لأن $d<p$ و p أصغر قاسم للعدد n) و منه p عدد أولي والخاصية محققة .

خاصية2: كل عدد طبيعي n غير أوّلي أكبر تماما من 1 $n \geq 2$ يقبل قاسما أوّليا a حيث $a \leq \sqrt{n}$.

البرهان: ليكن n عددا طبيعيا غير أوّلي أكبر تماما من 1 .

n يقبل قاسما d يختلف عن 1 وعن n ومنه $n=d \times d'$ حيث d' عدد طبيعي غير معدوم . $d' \geq 2$ (لأن إذا كان $d'=1$ فإن $d=n$ و هذا تناقض)

نفرض $d \leq d'$ و منه $d^2 \leq d \times d'$ أي $d^2 \leq n$ و بالتالي $d \leq \sqrt{n}$.

من الخاصية 1: d يقبل على الأقل قاسما أوّلياً a وهو كذلك قاسم أولي للعدد n .

بما أن لدينا $a \leq d$ و $d \leq \sqrt{n}$ نستنتج أن $a \leq \sqrt{n}$.

خاصية3: مجموعة الأعداد الأوّلية غير منتهية .

البرهان:

نستعمل البرهان بالخلف .

نفرض أن مجموعة الأعداد الأولية منتهية . ليكن p أكبر عدد من مجموعة الأعداد الأولية .

نسمي N جداء كل الأعداد الأولية من 2 إلى p . $N=2 \times 3 \times 5 \times 7 \times \ldots \times p$

ليكن N' العدد الطبيعي حيث أن: $N'=N+1$. باقي قسمة N' على 2 ، 3 ، 5 ، ... أو p تعطي الباقي دوما 1 . إذن N' غير قابل للقسمة على 2 ، 3 ، 5 ، ... أو p .

إذا كان N' أوليا فإن $N'>p$ و هذا تناقض . إذا كان N' غير أولي فإن N' يقبل قاسما أوليا أكبر من p (الخاصية 1) و هذا تناقض إذن مجموعة الأعداد الأولية غير منتهية .

.

3.1 البحث عن عدد أولي

ملاحظة إذا كان N عددا طبيعيا أكبر من 1 وكان لا يقبل أي قاسم أولي d حيث $d^2 \leq N$ فإن N أولي.

مثال: هل العدد 191 أولي .

نقوم بقسمة العدد 191 على كل من الأعداد الأولية d ثم نحسب d^2 في كل مرة كما يلي :

d	2	3	5	7	11	13	17
d^2	4	9	25	49	121	169	289
قابلية القسمة للعدد 191 على d	لا يقبل	لا يقبل	لا يقبل	لا يقبل	لا يقبل	لا يقبل	لا يقبل

وبما أن : $17^2 > 191$ و 17 لا يقسم 191 فإن 191 أولي .

تمرين 1: في كل حالة من الحالات الآتية أذكر إن كان العدد أوليا أم لا .

1) 349 ؛ 2) 341 ؛ 3) 841

طريقة: لمعرفة إذا كان عدد طبيعي n أكبر تماما من 1 $n \geq 2$ أوّليا أم لا . نحسب $\sqrt{n}$.

- إذا كان $\sqrt{n}$ عددا طبيعيا أي n مربع تام فإن n غير أولي .
- إذا كان $\sqrt{n}$ غير طبيعي نقسم n على الأعداد الأولية الأصغر من $\sqrt{n}$ على الترتيب .
  * إذا وجدنا أحد البواقي معدوما نتوقف و نقرّ أنّ n غير أولي .
  * إذا كانت كل البواقي غير معدومة نقرّ أنّ n أولي .

الحل:

1) $\sqrt{349} \approx 18,68$ الأعداد الأولية الأصغر من $\sqrt{349}$ هي 2 ، 3 ، 5 ، 7 ، 11 ، 13 ، 17 .

349 لا يقبل القسمة على 2 ، 3 و 5 ثم $349 = 7 \times 49 + 6$ و $349 = 11 \times 31 + 8$

و $349 = 13 \times 26 + 11$ و $349 = 17 \times 20 + 9$

إذن 349 لا يقبل القسمة على 7 ، 11 ، 13 و 17 و منه 349 عدد أولي .

2) $\sqrt{341} \approx 18,46$ الأعداد الأولية الأصغر من $\sqrt{341}$ هي 2 ، 3 ، 5 ، 7 ، 11 ، 13 ، 17 .

341 لا يقبل القسمة على 2 ، 3 و 5 ثم $341 = 7 \times 48 + 5$ و $341 = 11 \times 31$

إذن 341 يقبل القسمة على 11 و منه 341 غير أولي .

3) $\sqrt{841} = 29$ بما أن $\sqrt{841}$ عدد طبيعي فإن 841 غير أولي

تمرين 2: n عدد طبيعي أكبر تماما من 3:

ليكن العدد الطبيعي $a = n^2 - 2n - 8$

هل توجد قيم للعدد n يكون من أجلها a عددا أوليا ؟

طريقة: للبرهان على أن عدد طبيعي $a \geq 4$ غير أولي ، يكفي كتابته على الشكل $a = p \times q$ حيث p و q عددان طبيعيان أكبر تماما من 1 .

الحل: a ينعدم من أجل -2 و 4 .

إذن من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 4$ لدينا $n - 4 \quad n + 2 \quad = a$.

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n ، $n + 2 \geq 2$. ثم من أجل كل عدد طبيعي n أكبر تماما من 5 ، $n - 4 \geq 2$ إذن من أجل $n \geq 6$: a هو جداء العددين $n + 2$ و $n - 4$ الأكبر تماما من 1 و منه a غير أولي .

تبقى دراسة الحالتين $n = 4$ و $n = 5$.

- إذا كان $n = 4$ ، فإن $a = 0$ و منه a غير أولي .
- إذا كان $n = 5$ ، فإن $a = 7$ و منه a عدد أولي .

إذن a عدد أولي إذا و فقط إذا كان $a = 7$

4.1 العددان اوليان فيما بينهما

ملاحظة إذا كان d عددا أوليا وكان N عددا طبيعيا لا يقبل القسمة على d
فإن d و N أوليان فيما بينهما .

البرهان: بما أن d أولي فإن قواسم d هي 1 و d فقط .
وبما أن N لا يقبل القسمة على d فإن القاسم المشترك الوحيد بين N و d هو 1 . ومنه N و d أوليان فيما بينهما .

فمثلا 20 أولي مع 9 لكن 20 غير أولي وكذلك 9 غير أولي.

5.1 تحليل عدد طبيعي الى جداء عوامل اولية

مبرهنة

كل عدد طبيعي غير أوّلي n حيث $n \geq 2$ يمكن تحليله إلى جداء عوامل أولية .

البرهان: ليكن n عددا طبيعيا أكبر تماما من 1 .
n غير أوّلي فإن n يقبل القسمة على عدد أولي p_1 $p_1 \geq 2$ على الأقل و منه :
$n = p_1 \times n_1$ حيث $1 < n_1 < n$.

- إذا كان n_1 أوليا فإن المبرهنة محققة.
- إذا كان n_1 غير أولي فإن n_1 يقبل القسمة على عدد أولي p_2 $p_2 \geq 2$ على الأقل و منه :

$n_1 = p_2 \times n_2$ حيث $1 < n_2 < n_1$. و منه $n = p_1 \times p_2 \times n_2$.
نواصل العملية بنفس الطريقة حتى الحصول على $n_i = 1$ (i عدد طبيعي).
الأعداد n_1 ، n_2 ، ... ، n_i متتالية متناقصة من أعداد طبيعية .
ونحصل على $n = p_1 \times p_2 \times ... \times p_k$ (k عدد طبيعي) و هو تحليل n إلى جداء عوامل أولية .
يمكن للأعداد p_1 ، p_2 ، ... ، p_k أن تتكرر في التحليل .
و عليه نحصل على $n = p_1^{d_1} \times p_2^{d_2} \times ... \times p_k^{d_k}$
حيث d_1 ، d_2 ، ... ، d_k أعداد طبيعية . نقول أن n محلل إلى جداء عوامل أولية .

ملاحظة : نقبل بدون برهان أن كل عدد طبيعي n يقبل تحليلا وحيدا إلى جداء عوامل أولية .

خاصية: a و b عددان طبيعيان كلاهما أكبر تماما من 1.
يكون العدد b قاسما للعدد a إذا وفقط إذا كان كل عامل أولي في تحليل b موجودا في تحليل a و بأس إما مساو و إما أصغر من أسه في تحليل a.

البرهان: n عدد طبيعي أكبر تماما من 1 تحليله إلى جداء عوامل أولية $n = p_1^{d_1} \times p_2^{d_2} \times ... \times p_k^{d_k}$
● إذا كان l قاسما للعدد n فإن $n = l \times l'$ حيث l' عدد طبيعي. إذن كل قاسم أولي للعدد l هو قاسم أولي للعدد n و بالتالي لا يوجد أي قاسم أولي للعدد l يختلف عن العوامل الأولية الموجودة في تحليل n ، و كل عامل أولي في تحليل l موجود في تحليل n بأس إما مساو و إما أصغر من أسه في تحليل n.
إذن قواسم العدد n هي الأعداد الطبيعية من الشكل $p_1^{d'_1} \times p_2^{d'_2} \times ... \times p_k^{d'_k}$ حيث :
$0 \leq d'_1 \leq d_1$ ؛ $0 \leq d'_2 \leq d_2$ ؛ ... ؛ $0 \leq d'_k \leq d_k$.

● عكسيا ليكن l عددا طبيعيا مكتوبا على الشكل $p_1^{d'_1} \times p_2^{d'_2} \times ... \times p_k^{d'_k}$.
يمكننا أن نكتب $p_1^{d_1-d'_1} \times p_2^{d_2-d'_2} \times ... \times p_k^{d_k-d'_k}$ $n = l$ لأن

$$p_1^{d_1} \times p_2^{d_2} \times ... \times p_k^{d_k} = p_1^{d'_1} \times p_2^{d'_2} \times ... \times p_k^{d'_k} \quad p_1^{d_1-d'_1} \times p_2^{d_2-d'_2} \times ... \times p_k^{d_k-d'_k}$$

و منه l يقسم n .

مثال 1 :

حلل إلى جداء عوامل أولية العدد : 7560

7560	2
3780	2
1890	2
945	3
315	3
105	3
35	5
7	7
	1

الحل :

$$7560 = 2^3 \times 3^3 \times 5 \times 7$$

مثال 2 :

حلل إلى جداء عوامل أولية العدد : 80000

الحل :

$$80000 = 8\times 10^4 = 2^3\times(2\times5)^4 = 2^3\times 2^4\times 5^4 = 2^7\times 5^4$$

6.1 عدد قواسم عدد طبيعي

مبرهنة

عدد قواسم العدد المحلل إلى جداء العوامل كما يلي : $N = a_1^{P_1}\times a_2^{P_2}\times \ldots \times a_q^{P_q}$

هو : $(1+P_1)(1+P_2)\times \ldots \times(1+P_{q-1})(1+P_q)$

البرهان :

لدينا : $N = a_1^{P_1}\times a_2^{P_2}\times \ldots \times a_q^{P_q}$ فإذا كان d قاسما للعدد N فإن :

$d = a_1^{\alpha_1}\times a_2^{\alpha_2}\times \ldots \times a_q^{\alpha_q}$ حيث : $0\le\alpha_1\le P_1$ و $0\le\alpha_2\le P_2$ و ... و $0\le\alpha_q\le P_q$

ولدينا : $(1+P_1)$ إمكانية لاختيار الأس α_1 .

$(1+P_2)$ إمكانية لاختيار الأس α_2 .

⋮

$(1+P_q)$ إمكانية لاختيار الأس α_q .

وعليه عدد قواسم d هو : $(1+P_1)(1+P_2)\times \ldots \times(1+P_q)$

مثال : ما هو عدد قواسم العدد 180 . عين كل القواسم .

الحل :

لدينا : $180 = 18\times10 = 3^2\times2\times10 = 2^2\times3^2\times5$

وعليه عدد قواسم 180 هو : $(1+2)(1+2)(1+1) = 18$

تمرين 2 ص 107 أ . ما هو عدد القسمات التي يمكن إجراؤها على الأعداد الأولية المتتابعة لمعرفة أن العدد 1429 أولي ؟

ب . بدون استعمال حاسبة ولا جدول الأعداد الأولية بين أن 1429 ليس أوليا .

تمرين 9ص 107 ليكن p عددا أوّليا أكبر من أو يساوي 5 .

أ . برهن أن p يكتب على الشكل :

$12k+1$ أو $12k-1$ أو $12k+5$ أو $12k-5$ مع $k\in\mathbb{N}$.

ب . ليكن $N = p^2+11$ باستعمال البرهان بفصل الحالات ، عين باقي قسمة N على 24 .

تمرين 16ص 107 n عدد طبيعي غير معدوم .نضع $n! = 1\times2\times3\times\ldots\times n$ (n عاملي)

1) b عدد طبيعي غير معدوم حيث $b\le 2007$.

أ . $a = 2007!+b$ ، برهن أن العدد a ليس أوّليا .

ب . استنتج قائمة لِ 2007 عددا متتابعا ليس أوّليا.

2) كيف يمكن إنشاء بالمثل ، قائمة لِ 3000 عددا متتابعا ليس أوّليا .

تمرين 16ص 107 1) حلل العدد 4032 إلى جداء عوامل أولية .

2) عين العدد الطبيعي n حيث يكون: $n(n+1) = 4032$.

المؤسســــــة:	المستـــــــوى: الثالثة رياضيات
السنة الدراسية:	ميــدان التعلم: الاعداد والحساب
التاريـــــــــخ:	الوحدة التعلمية: الاعداد الاولية
توقيت الحصة :	موضوع الحصة : المضاعف المشترك الاصغر

المكتسبات المستهدفة: استعمال تحليل عدد طبيعي إلى جداء عوامل أولية لتعيين مضاعفات عدد طبيعي وقاسمه.

الأنشطة المقترحة وطبيعتها	الإنجاز(ســير الحصة)	التعليمات والتوجيهات
	(انظر أدناه)	- تقترح أنشطة متنوعة يوظف فيها تحليل عدد طبيعي إلى جداء أعداد أولية لتعيين قواسمه (أو عددها) أو مضاعفاته.

2/ المضاعف المشترك الأصغر PPCM

1.2 تعريف

a عدد طبيعي غير معدوم . نرمز بـ M_a إلى مجموعة مضاعفات العدد a .

مثال: مجموعة مضاعفات 6 هي $M_6 = \{0;6;12;18;24;...\}$.

ملاحظة: المضاعف الوحيد لـ 0 هو 0 .

تعريف

a و b عددان طبيعيان غير معدومين . M_a مجموعة مضاعفات a ، M_b مجموعة مضاعفات b . $M_a \cap M_b$ هي مجموعة المضاعفات المشتركة للعددين a و b يسمى أصغر عنصر غير معدوم من المجموعة $M_a \cap M_b$ المضاعف المشترك الأصغر للعددين a و b . و نرمز له $PPCM(a;b)$.

ملاحظات: $PPCM(a;a) = a$ و $PPCM(1;a) = a$

مجموعة المضاعفات المشتركة لعددين طبيعيين غير معدومين هي مجموعة المضاعفات المضاعف المشترك الأصغر

لهما .

مثال: مجموعة مضاعفات 6 هي $M_6 = \{0;6;12;18;24;30;36;42;48;...\}$.

مجموعة مضاعفات 8 هي $M_8 = \{0;8;16;24;32;40;48;...\}$.

$M_6 \cap M_8 = \{24;48;72;96;...\}$ إذن $PPCM(6;8) = 24$

مثال احسب $PPCM(1000\ ;\ 480\ ;\ 250)$

الحل : $250 = 2\times5^3 \quad ; \quad 480 = 2^5\times3\times5 \quad ; \quad 1000 = 2^3\times5^3$

ومنه : $PPCM(1000\ ;\ 480\ ;\ 250) = 2^5\times3\times5^3 = 12000$

2.2 تحديد م م الأصغر لعددين صحيحين

تعريف

: a و b عددان صحيحان غير معدومين.

المضاعف المشترك الأصغر للعددين a و b هو أصغر عدد طبيعي m غير معدوم حيث $m = PPCM(|a|;|b|)$.

تمرين 1: عين المضاعف المشترك الأصغر للعددين 12 و 18 .

الحل: نسمي M_{12} مجموعة مضاعفات 12 و M_{18} مجموعة مضاعفات 18. المجموعتان غير منتهيتين . $M_{12} = \{0;12;24;36;48;60;72;84;96;108;...\}$ و

$M_{18} = \{0;18;36;54;72;90;108;126;144;...\}$.

$M_{12} \cap M_{18} = \{0;36;72;108;144;180;...\}$ ، أصغر عنصر غير معدوم من المجموعة $M_{12} \cap M_{18}$ هو 36 إذن $PPCM(12;18) = 36$

3.2 خاصية للم و الاصغر لعددين طبيعيين

خاصية : a و b عددان طبيعيان غير معدومين. k عدد صحيح غير معدوم.
$PPCM(ka;kb)=|k|PPCM(a;b)$.

البرهان: a و b عددان صحيحان غير معدومين. نضع $m=PPCM(a;b)$. و منه يوجد عددان صحيحان p و p' حيث $m=p\times a$ و $m=p'\times b$ و منه $km=kp\times a$ و $km=kp'\times b$ و بالتالي $|k|m$ مضاعف مشترك موجب تماما للعددين ka و kb و منه: 1 ...
$PPCM(ka;kb)\le|k|PPCM(a;b)$. نضع $M=PPCM(ka;kb)$ و منه يوجد عددين صحيحين d و d' حيث $M=dk\times a$ و $M=d'k\times b$
و منه a يقسم M/k و b يقسم M/k. و منه $M/|k|$ هو مضاعف مشترك موجب تماما للعددين a و b و بالتالي $PPCM(a;b)\le M/|k|$. و منه: 2 . $|k|PPCM(a;b)\le PPCM(ka;kb)$.
من 1 و 2 نستنتج أن $PPCM(ka;kb)=|k|PPCM(a;b)$.

تمرين 2: عين العدد الطبيعي غير المعدوم a حيث $PPCM(56;a)=280$.

الحل:
$56=2^3\times7$ و $280=2^3\times5\times7$. بما أن $PPCM(56;a)=280$ فإن a يقسم 280.
إذن تحليل a إلى جداء عوامل أولية من الشكل : $2^\alpha\times5^\beta\times7^\gamma$ حيث $0\le\alpha\le3$ ، $0\le\beta\le1$ ، $0\le\gamma\le1$. زيادة على هذا a لا يقسم 56 و إلا $PPCM(56;a)=56$. و منه $\beta=1$.
إذن القيّم الممكنة للعدد a هي :

$a=2^0\times5\times7^0=5$ ؛ $a=2^1\times5\times7^0=10$
$a=2^0\times5\times7^1=35$ ؛ $a=2^1\times5\times7^1=70$
$a=2^2\times5\times7^1=140$ ؛ $a=2^2\times5\times7^0=20$
$a=2^3\times5\times7^0=40$ ؛ $a=2^3\times5\times7^1=280$

تمرين 3: n عدد طبيعي غير معدوم .
a و b عددان طبيعيان حيث أن :
$a=3^n(11^{n+2}-11^n)$ و $b=11^n(3^{n+1}-3^n)$.
عين المضاعف المشترك الأصغر للعددين a و b .

الحل:
$a=3^n\times11^n\times(11^2-1)=3^n\times11^n\times120$.
$b=11^n\times3^n\times(3-1)=3^n\times11^n\times2$.
$PPCM(a;b)=PPCM(3^n\times11^n\times120;3^n\times11^n\times2)$.
$PPCM(a;b)=3^n\times11^nPPCM(120;2)$.
و $PPCM(120;2)=120$.
إذن $PPCM(a;b)=3^n\times11^n\times120$.
أي $PPCM(a;b)=2^3\times3^{n+1}\times5\times11^n$.

تمرين 38 ص 109
$a=256$ و $b=5040$.
أ . حلل إلى جداء عوامل أولية كل من العددين a و b ، ثم عيّن $p\gcd(a,b)$ و $ppcm(a,b)$.
ب . عيّن $p\gcd(a,b)$ باستعمال خوارزمية أقليدس ، ثم استنتج $ppcm(a,b)$.

تمرين 45 ص 109

n عدد طبيعي أكبر من أو يساوي 6 .

نضع : $a = 3n + 2$ ، $b = n - 5$.

أ . أحسب $a - 3b$

استنتج أن $p\gcd(a,b) = p\gcd(b,17)$.

تمرين 41 ص 109

عين كل الثنائيات (a,b) من الأعداد الطبيعية التي تحقق المعادلة المقترحة في كل من الحالات التالية :

أ . $ppcm(a,b) = 21 \times p\gcd(a,b)$.

ب . $ppcm(a,b) - p\gcd(a,b) = 187$.

ج . $ppcm(a,b) = p\gcd(a,b)$.

د . $ppcm(a,b) + 11p\gcd(a,b) = 20$.

هـ . $ppcm(a,b) - 9p\gcd(a,b) = 13$ مع $a \le b$.

المؤسســـــــــة:		المستـــــــــــوى:	الثالثة رياضيات
السنة الدراسية:		ميــدان التعلم:	الاعداد والحساب
التاريـــــــــخ:		الوحدة التعلمية:	الاعداد الاولية
توقيت الحصة :		موضوع الحصة :	استعمالات تحليل عدد طبيعي

المكتسبات المستهدفة: استعمال تحليل عدد طبيعي إلى جداء عوامل أولية لتعيين المضاعف المشترك الأصغر و القاسم المشترك الأكبر .

الأنشطة المقترحة وطبيعتها	الإنجاز (سـير الحصة)	التعليمات والتوجيهات

3/ القاسم المشترك الاكبر PGCD

1.3 تعريف

خاصية

القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين a و b كلاهما أكبر تماما من 1 هو جداء العوامل الأولية المشتركة في تحليلي العددين a و b بحيث يؤخذ كل عامل من هذه العوامل مرة واحدة و بأصغر أس .

البرهان: a و b عددان طبيعيان أكبرا من 1. p_1 ، p_2 ، … ، p_n الأعداد الأولية الموجودة في تحليل a أو في تحليل b . نضع $a=p_1^{\alpha_1}\times p_2^{\alpha_2}\times\ldots\times p_n^{\alpha_n}$ و $b=p_1^{\beta_1}\times p_2^{\beta_2}\times\ldots\times p_n^{\beta_n}$.

حيث α_1 ، α_2 ، … ، α_n ، β_1 ، β_2 ، … ، β_n أعداد طبيعية .

كل قاسم مشترك d للعددين a و b له تحليل على الشكل : $d=p_1^{\gamma_1}\times p_2^{\gamma_2}\times\ldots\times p_n^{\gamma_n}$.

حيث γ_1 ، γ_2 ، … ، γ_n أعداد طبيعية و $0\le\gamma_1\le\alpha_1$ و $0\le\gamma_1\le\beta_1$.

إذا كان δ_1 الأصغر من بين α_1 و β_1 فإن $0\le\gamma_1\le\delta_1$ بنفس الطريقة $0\le\gamma_2\le\delta_2$ ، … ، $0\le\gamma_n\le\delta_n$. δ_2 الأصغر من بين α_2 و β_2 ، … ، و δ_n الأصغر من بين α_n و β_n .

ويكون d هو القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b إذا كان $\gamma_1=\delta_1$ ، $\gamma_2=\delta_2$ ، … ، $\gamma_n=\delta_n$. إذن $PGCD\ (a;b)=p_1^{\gamma_1}\times p_2^{\gamma_2}\times\ldots\times p_n^{\gamma_n}$

4/ المضاعف المشترك الاصغر PPCM

1.4 تعريف

خاصية

المضاعف المشترك الأصغر لعددين طبيعيين a و b كلاهما أكبر تماما من 1 هو جداء العوامل الأولية المشتركة وغير المشتركة في تحليلي العددين a و b بحيث يؤخذ كل عامل من هذه العوامل مرة واحدة و بأكبر أس.

البرهان: a و b عددان طبيعيان كلاهما أكبر من 1. p_1 ، p_2 ، … ، p_n الأعداد الأولية الموجودة في تحليل a أو في تحليل b . نضع $a=p_1^{\alpha_1}\times p_2^{\alpha_2}\times\ldots\times p_n^{\alpha_n}$ و $b=p_1^{\beta_1}\times p_2^{\beta_2}\times\ldots\times p_n^{\beta_n}$.

حيث α_1 ، α_2 ، … ، α_n ، β_1 ، β_2 ، … ، β_n أعداد طبيعية .

كل مضاعف مشترك m للعددين a و b له تحليل على الشكل : $m=p_1^{\lambda_1}\times p_2^{\lambda_2}\times\ldots\times p_n^{\lambda_n}$.

حيث λ_1 ، λ_2 ، … ، λ_n أعداد طبيعية و $0\le\alpha_1\le\lambda_1$ و $0\le\beta_1\le\lambda_1$.

إذا كان ω_1 الأكبر من بين α_1 و β_1 فإن $0\le\omega_1\le\lambda_1$ بنفس الطريقة $0\le\omega_2\le\lambda_2$ ، … ، $0\le\omega_n\le\lambda_n$. ω_2 الأكبر من بين α_2 و β_2 ، … ، و ω_n الأكبر من بين α_n و β_n .

يكون m هو المضاعف المشترك الأصغر للعددين a و b إذا كان $\lambda_1=\omega_1$ ، $\lambda_2=\omega_2$ ، … ، $\lambda_n=\omega_n$. إذن $PPCM\ (a;b)=p_1^{\lambda_1}\times p_2^{\lambda_2}\times\ldots\times p_n^{\lambda_n}$

التعليمات والتوجيهات:

تقترح أنشطة متنوعة يوظف فيها تحليل عدد طبيعي إلى جداء أعداد أولية لتعيين قواسمه (أو عددها) أو مضاعفاته.

تبرهن الخاصيتان : $PPCM\ (ka;kb)=|k|\,PPCM\ (a;b)$ حيث k عدد صحيح غير منعدم.

$PGCD\ (a;b)\times PPCM\ (a;b)=ab$

يمكن اقتراح أنشطة حول: إيجاد الأعداد الصحيحة a و b إذا أعطي $PGCD\ (a;b)$ أو $PPCM\ (a;b)$ أو علاقة بين a و b.

5/ العلاقة بين PPCM و PGCD لعددين طبيعيين

1.5 تعريف

خاصية

جداء عددين طبيعيين a و b كلاهما أكبر تماما من 1 مساو لجداء قاسمهما المشترك الأكبر ومضاعفهما المشترك الأصغر. بعبارة أخرى
$PGCD\ a;b\ \times PPCM\ a;b\ = a\times b$

البرهان:

باستعمال نفس الترميز السابق $PGCD(a;b)\times PPCM(a;b)=p_1^{\gamma_1+\lambda_1}\times p_2^{\gamma_2+\lambda_2}\times\ldots\times p_2^{\gamma_n+\lambda_n}$

و بما أن γ_n هو الأصغر من بين α_n و β_n و λ_n هو الأكبر من بين α_n و β_n فإن $\gamma_n+\lambda_n=\alpha_n+\beta_n$

و منه $PGCD(a;b)\times PPCM(a;b)=p_1^{\alpha_1+\beta_1}\times p_2^{\alpha_2+\beta_2}\times\ldots\times p_2^{\alpha_n+\beta_n}=a\times b$.

تمرين 1: باستعمال التحليل إلى جداء عوامل أولية عين القاسم المشترك الأكبر و المضاعف المشترك الأصغر للعددين 5600 و 28800 .

الحل: نحلل العددين 5600 و 28840 إلى جداء عوامل أولية .

$5600=2^5\times5^2\times7$.

$28800=2^7\times3^2\times5^2$.

$PGCD\ 5600;28800\ =2^5\times5^2=800$.

$PPCM\ 5600;28800\ =2^7\times3^2\times5^2\times7=201600$.

تمرين 2: باستعمال العلاقة بين القاسم المشترك الأكبر والمضاعف المشترك الأصغر للعددين 4530 و480 عين المضاعف المشترك الأصغر لهما.

الحل: باستعمال خوارزمية إقليدس نجد $PGCD\ 4530;480\ =30$.

$PPCM\ 4530;480\ \times PGCD\ 4530;480\ =4530\times480$.

و منه $PPCM\ 4530;480\ =\dfrac{4530\times480}{PGCD\ 4530;480}$.

$$PPCM\ 4530;480\ =\frac{2174400}{30}=72480$$

تمرين 3: عين كل الثنائيات $a;b$ من الأعداد الطبيعية حلول الجملة :

$$\begin{cases} a\times b=18000 \\ PPCM\ a;b\ =600 \end{cases}$$

الحل: نسمي d القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b .

نصع $a=d\times a'$ و $b=d\times b'$ حيث a' و b' عددان طبيعيان أوليان فيما بينهما .

و نعلم أن $PPCM\ a;b\ \times PGCD\ a;b\ =a\times b$.إذن $600\times d=18000$ و منه $d=30$

الجملة تكتب : $\begin{cases} d^2a'\times b'=18000 \\ d\times a'\times b'=600 \end{cases}$

و نستنتج أن $a'\times b'=20$ وبالتالي($a'=1$ و $b'=20$) أو ($a'=4$ و $b'=5$) أو ($a'=5$ و $b'=4$)
أو ($a'=20$ و $b'=1$).

الحلول هي الثنائيات

$a;b\ =\ 30;600$ ، $a;b\ =\ 120;150$ ، $a;b\ =\ 150;120$ ،

$a;b\ =\ 600;30$.

تمرين 29 ص 109

أحسب المجامع المقترحة أدناه ، استعمل المضاعف المشترك الأصغر ، وأعط النتائج على شكل كسور غير قابلة للاختزال .

$\frac{13}{84}+\frac{9}{140}$ ؛ $\frac{23}{216}+\frac{55}{195}$ ؛ $\frac{19}{210}+\frac{82}{75}$.

تمرين 30 ص 109

في كل حالة من الحالات التالية ، عين قيم العدد الطبيعي a غير المعدومة حيث :

أ. $ppcm\left(a,56\right)=392$.

ب . $ppcm\left(a,18\right)=630$.

جـ. $ppcm\left(a,42\right)=882$.

تمرين 31 ص 109

العدد الطبيعي n يوافق 3 بالترديد 35 وبالترديد 28 .

أ . برهن أن $n-3$ هو مضاعف مشترك للعددين 35 و 28 .

ب . ما هي أصغر قيمة للعدد n .

تمرين 32 ص 109 عين أصغر عدد طبيعي غير معدوم بحيث يكون 7 هو باقي قسمته عل كل من العددين 52 و 64 .

تمرين 37 ص 109 العدد d هو القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b ، ما هو المضاعف المشترك الأصغر للعددين a^2 و ab

تمرين 38 ص 109 $a=256$ و $b=5040$.

أ . حلل إلى جداء عوامل أولية كل من العددين a و b ، ثم عيّن $p\gcd\left(a,b\right)$ و $ppcm\left(a,b\right)$.

ب . عيّن $p\gcd\left(a,b\right)$ باستعمال خوارزمية أقليدس ، ثم استنتج $ppcm\left(a,b\right)$.

تمرين 39 ص 109 عين $p\gcd\left(a,b\right)$ و $ppcm\left(a,b\right)$ حيث :

$a=460845$ و $b=372645$.

تمرين 40 ص 109 عين كل الثنائيات $\left(a,b\right)$ من الأعداد الطبيعية التي تحقق الجملة المعطاة ، في كل من الحالتين التاليتين .

أ . $\begin{cases} a+b=60 \\ ppcm\left(a,b\right)=40 \end{cases}$. ب . $\begin{cases} a-b=22932 \\ ppcm\left(a,b\right)=98280 \end{cases}$.

المؤسســــــة:		المستـــــــوى:	الثالثة رياضيات
السنة الدراسية:		ميــدان التعلم:	الاعداد والحساب
التاريـــــخ:		الوحدة التعلمية:	الاعداد الاولية
توقيت الحصة :		موضوع الحصة :	مبرهنتي بيزو وقوص

المكتسبات المستهدفة: استعمال مبرهنة بيزو.استعمال مبرهنة غوص ونتائجها

الأنشطة المقترحة وطبيعتها	الإنجاز (سـير الحصة)	التعليقات والتوجيهات

التعليقات والتوجيهات:

تقترح أنشطة حول مبرهنة "بيزو" ومبرهنة "غوص".

نقصد بنتائج مبرهنة غوص،ما يلي:

$a \in \mathbb{N}^*$ ، $b \in \mathbb{N}^*$ و p عدد أولي.

إذا كان p يقسم ab فإن p يقسم a أو p يقسم b.

أعداد طبيعية $a;b;c$ غير منعدمة.

إذا كان : a مضاعف b و c و $PGCD(b;c)=1$ فإن : a مضاعف bc.

يمكن استعمال مبرهنة غوص لحل المعادلة $ax+by=c$ في $\mathbb{Z}$.

6/ مبرهنة بيزو

1.6 نصها

مبرهنة

يكون عددان صحيحان a و b أوليين فيما بينهما إذا و فقط إذا وجد عددان صحيحان u و v حيث : $au+bv=1$

البرهان: نفرض أنّ a و b عددان صحيحان أوليان فيما بينهما أي $PGCD(a;b)=1$ ومنه أحد العددين a أو b غير معدوم . نضع a غير معدوم .

لتكن E مجموعة الأعداد الصحيحة من الشكل $au+bv$ حيث u و v عددان صحيحان .

المجموعة E غير خالية لأن a عنصر منها (بأخذ $u=1$ و $v=0$) كذالك $-a$ عنصر من E (بأخذ $u=-1$ و $v=0$) .أحد العددين

a أو $-a$ موجب تماما .إذن المجموعة E تحتوي على عدد موجب تماما على الأقل . ليكن m أصغر هذه الأعداد الموجبة تماما ؛ يوجد إذن عددان صحيحان u_0 و v_0 حيث أن $m=au_0+bv_0$.

القسمة الإقليدية للعدد a على m تكتب $a=mq+r$ حيث q و r عددان طبيعيان و $0\leq r<m$. و منه : $r=a-mq$ و بالتالي

$r=a-(au_0+bv_0)q=a(1-qu_0)+b(-qv_0)$ و منه r عنصر من

المجموعة E (بأخذ $u=1-qu_0$ و $v=-qv_0$) بما أن m أصغر عنصر موجب تماما من E

و $0\leq r<m$ فإن $r=0$ و منه $a=mq$ و بالتالي m يقسم a . بنفس الطريقة نثبت أن m يقسم b . إذن $m=1$ لأن a و b عددان صحيحان أوليان فيما بينهما. وهذا يعني وجود u_0 و v_0 حيث $au_0+bv_0=1$.

عكسيا : نفرض $au+bv=1$ (a ، b ، u ، v أعداد صحيحة) نضع $d=PGCD(a;b)$.

d يقسم a و b ومنه d يقسم $au+bv$ و بالتالي d يقسم 1 أي $d=1$ ، و منه a و b أوليان فيما بينهما .

ملاحظة

الثنائية $(u;v)$ ليست وحيدة. مثلا من أجل $a=3$ و $b=2$.

$1\times3-1\times2=1$ ، $-1\times3+2\times2=1$.

2.6 خواص

خاصية1: إذا كان d القاسم المشترك الأكبر لعددين صحيحين a و b فإنه يوجد عددان صحيحان u و v حيث : $au+bv=d$

البرهان: : a و b عددان صحيحان غير معدومين و ليكن d قاسمهما المشترك الأكبر. نضع $a=da'$ و $b=db'$ حيث a' و b' عددان صحيحان أوليان فيما بينهما. و منه وحسب مبرهنة بيزو يوجد عددان صحيحان u و v حيث $a'u+b'v=1$. بضرب الطرفين في d . نحصل على: $da'u+db'v=d$ أي $au+bv=d$ وهو المطلوب.

مثال : لدينا : $PGCD(24\,;9)=3$

لنبحث عن عددان صحيحان α_0 و β_0 بحيث : $24\alpha_0+9\beta_0=3$

نلاحظ أن $\alpha_0=-1$ و $\beta_0=3$ يحققان المعادلة $24(-1)+9(3)=3$

خاصية2: إذا كان a عددا أوليا فإن a أولي مع كل الأعداد التي لا يقسمها

البرهان: ليكن p عددا أوليا و a عددا طبيعيا لا يقبل القسمة على p . نضع $PGCD\ a;p\ = d$.
بما أن p أولي فإن $d=1$ أو $d=p$ و d لا يقسم a إذن $d=1$. و منه p أولي مع a .

خاصية3: إذا كان a عددا أوليا مع عددين صحيحين b و c فإن a أولي مع جدائهما $b\times c$

البرهان: ليكن a عددا أوليا مع عددين صحيحين b و c ، إذن حسب مبرهنة بيزو توجد أعداد صحيحة u ، v ، u' ، v' حيث : $au+bv=1$ و $au'+cv'=1$. نضرب طرفا بطرف نحصل على: $a^2uu'+acuv'+abu'v+bcvv'=1$ أي $a(auu'+cuv'+bu'v)+bc(vv')=1$
و منه و حسب مبرهنة بيزو a و bc أوليان فيما بينهما .

تمرين 46 ص 109

n عدد طبيعي . أثبت أن العددين a و b أوّليان فيما بينهما في كل من الحالتين التاليتين .

أ . $a=n$ ؛ $b=2n+1$.

ب . $a=2n+3$ ؛ $b=3n+5$.

تمرين 47 ص 109 أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، يكون :

تمرين 49 ص 109 n عدد طبيعي غير معدوم .

أ . تحقق من أن $\left(n^3+1\right)^2=n^2\left(n^4+2n\right)+1$.

ب . استنتج أن العددين n^3+1 و n^4+2n أوّليان فيما بينهما .

تمرين 50 ص 109 n عدد طبيعي غير معدوم .

أ . حلل العدد $n\left(2n+1\right)-1$.

ب . باستعمال مبرهنة بيزو ، جد القاسم المشترك الأكبر للعددين $n+1$ و $n\left(2n+1\right)$.

تمرين 51 ص 109 بيّن باستعمال خوارزمية أقليدس ، أن العددين 12 و 35 أوليان فيما بينهما .
استنتج ثنائية من $\mathbb{Z}^2$ تحقق المعادلة $12x+35y=1$.

تمرين 52 ص 109 أ . أكتب خوارزمية أقليدس لتعيّن $PGCD\left(257,45\right)$.

ب . انطلاقا من المساواة الأخيرة والتي يكون فيها الباقي غير معدوم ، أحسبه بدلالة البواقي السابقة له .

ج . عيّن ثنائية من الأعداد الصحيحة $\left(u,v\right)$ حيث يكون $257u+45v=PGCD\left(257,45\right)$.

تمرين 55 ص 109 :

1) عيّن $PGCD\left(168,20\right)$.

2) هل المعادلة $168x+20y=6$ تقبل حلا في $\mathbb{Z}^2$ ؟

3) هل المعادلة $168x+20y=4$ تقبل حلا في $\mathbb{Z}^2$ ؟

7/ مبرهنة غوص

1.7 نصها

مبرهنة

a ، b و c ثلاثة أعداد صحيحة غير معدومة .
إذا كان a يقسم الجداء bc وكان a أوليا مع b ، فإن a يقسم c

البرهان: ليكن a و b عددين صحيحين غير معدومين أوليين فيما بينهما . إذن حسب مبرهنة بيزو يوجد عددانصحيحان u و v حيث: $au+bv=1$.
ليكن c عددا صحيحا غير معدوم حيث a يقسم الجداء bc. نضرب طرفي المساواة $au+bv=1$ في c ، نحصل على $cau+cbv=c$. من المعطيات a يقسم الجداء bc و منه a يقسم الجداء bcv و بما أن a يقسم الجداء acu فإن a يقسم $acu+bcv$ أي a يقسم c .

مثال 1: 396 يقبل القسمة على كل من العددين 2 و 11 الأوليان فيما بينهما وعليه فهو يقبل القسمة

2.7 خواص

خاصية1 a و b عددان طبيعيان غير معدومين و p عدد أولي .
إذا كان p يقسم الجداء ab ، فإن p يقسم a أو p يقسم b.

البرهان: a و b عددان طبيعيان غير معدومين و ليكن p عددا أوليا. حيث p يقسم الجداء ab.
- إذا كان p يقسم a الخاصية محققة.
- إذا كان p لا يقسم a فإن $PGCD\ a;p\ =1$ لأن p عدد أولي وقاسميه هما 1 و p .

إذن a و p أوليان فيما بينهما. و بما أن p يقسم الجداء ab و هو أولي مع a و حسب مبرهنة غوص فإن p يقسم b . و منه صحة الخاصية .

خاصية2: a ، b و c أعداد طبيعية غير معدومة .
اذا كان a مضاعفا للعددين b و c وكان b و c أوليين فيما بينهما فان a

البرهان: لتكن a ، b و c أعداد طبيعية غير معدومة. حيث a مضاعف للعددين b و c .
a مضاعف للعدد b إذن يوجد عدد طبيعي d حيث $a=db$.
a مضاعف للعدد c إذن يوجد عدد طبيعي d' حيث $a=d'c$.
إذن $db=d'c$.
c يقسم $d'c$ و منه c يقسم db. بما أن c أولي مع b و حسب مبرهنة غوص فإن c يقسم d .إذن يوجد عددعدد طبيعي d'' حيث $d=d''c$. نعوض في $a=db$ نحصل على $a=d''cb$ و منه a مضاعف للعدد bc و منه صحة الخاصية .

مثال: العدد 116916 مضاعف لـ 3 لأن ($1+1+6+9+1+6=24$ و 24 مضاعف لـ 3)
العدد 116916 مضاعف لـ 4 لأن (16 العدد المكون من الآحاد و العشرات يقبل القسمة على 4)
بما أن 3 و 4 أوليان فيما بينهما فإن 116916 مضاعف لـ 3×4 أي مضاعف لـ12

مثال 2: عين كل الأعداد الصحيحة x و y بحيث : $5x=7y$.

الحل: لدينا $5x=7y$ وعليه 5 يقسم $7y$ و 5 أولي مع 7 ومنه 5 يقسم y وعليه يوجد عدد صحيح k بحيث : $y=5k$
وعليه : $5x=7\times5k$ ومنه : $x=7k$
إذن : $x=7k$ و $y=5k$ مع $k\in\mathbb{Z}$

مثال 3:

حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $5x-3y=2\ \ldots(1)$ علما أن $(1;1)$ حل خاص لها .

الحل:

لدينا : $5x-3y=2$ و $5(1)-3(1)=2$

وعليه : $5x-3y=5(1)-3(1)$

وبالتالي : $5(x-1)=3(y-1)\ldots(1)$

لدينا 5 يقسم $3(y-1)$ و 5 أولي مع 3 و حسب مبرهنة غوص

فإن : 5 يقسم $y-1$ إذن يوجد عدد صحيح k بحيث : $y-1=5k$ إذن : $y=5k+1$

وبالتعويض في (2) نجد : $5(x-1)=3\times5k$

وعليه : $x-1=3k$ أي : $x=3k+1$

وعليه حلول (1) هي الثنائيات $(x;y)$ حيث : $x=3k+1$

و$y=5k+1$ مع $k\in\mathbb{Z}$.

تمرين 1: 1) عين في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ مجموعة حلول المعادلة ذات المجهول $x;y$: $9x-16y=0$.

2) تأكد أن الثنائية $4;2$ حل للمعادلة ذات المجهول $x;y$: $9x-16y=4$.

3) استنتج في $\mathbb{Z}^2$ مجموعة حلول المعادلة ذات المجهول $x;y$: $9x-16y=4$.

الحل:

1) $9x-16y=0$ و منه $9x=16y$.

16 يقسم $16y$ و بالتالي 16 يقسم $9x$ بما أن 16 أولي مع 9 فإن 16 يقسم x

نضع $x=16k$ حيث k عدد صحيح . بالتعويض في المساواة $9x=16y$ نحصل على $9\ 16k=16y$ و منه $y=9k$. الحلول هي الثنائيات من الشكل $16k;9k$ حيث k عدد صحيح

2) $9\times4-16\times2=36-32=4$ و منه $4;2$ حل للمعادلة $9x-16y=4$.

3) بطرح 4 من طرفي المعادلة $9x-16y=4$ نحصل على $9x-16y-4=0$.

و نعلم أن $9\times4-16\times2=4$ إذن $9x-16y-\ 9\times4-16\times2\ =0$. و منه

$9\ x-4\ =16\ y-2$.

16 يقسم $16(y-2)$ و بالتالي 16 يقسم $9(x-4)$ بما أن 16 أولي مع 9 فإن 16 يقسم $x-4$

نضع $x-4=16k$ حيث k عدد صحيح أي $x=16k+4$ بالتعويض في المساواة $9\ x-4\ =16\ y-2$ نحصل على $9\ 16k\ =16(y-2)$ ومنه $y=9k+2$.

الحلول هي الثنائيات من الشكل $16k+4;9k+2$ حيث k عدد صحيح .

تمرين 2: ليكن n عددا طبيعيا . أثبت أن العدد $A=n\ 5n+1\ \ 13n+1$ يقبل القسمة على 6.

طريقة: للبرهان على أن العدد A يقبل القسمة على 6 يكفي البرهان أن A يقبل القسمة على 2 و على 3، لأن 2 و 3 أوليان فيما بينهما.

الحل: ● نبرهن أن A يقبل القسمة على 2.

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $n\equiv0\ 2$ أو $n\equiv1\ 2$.إذا كان $n\equiv0\ 2$ فإن $A\equiv0\ 2$.

إذا كان $n\equiv1\ 2$ فإن $5n+1\ \equiv6\ 2$ و $6\equiv0\ 2$ و منه $5n+1\ \equiv0\ 2$ و بالتالي $A\equiv0\ 2$

إذن في الحالتين $A\equiv0\ 2$. إذن من أجل كل عدد طبيعي n : $A\equiv0\ 2$.

● نبرهن أن A يقبل القسمة على 3.

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $n\equiv0\ 3$ أو $n\equiv1\ 3$ أو $n\equiv2\ 3$.إذا كان $n\equiv0\ 3$ فإن $A\equiv0\ 3$

إذا كان $n\equiv1\ 3$ فإن $5n+1\ \equiv6\ 3$ و $6\equiv0\ 3$ و منه $5n+1\ \equiv0\ 3$ و بالتالي $A\equiv0\ 3$.

إذا كان $n\equiv2\ 3$ فإن $13n+1\ \equiv27\ 3$ و $27\equiv0\ 3$ و منه $13n+1\ \equiv0\ 3$ وبالتالي $A\equiv0\ 3$.

إذن في الحالات الثلاث $A\equiv0\ 2$. إذن من أجل كل عدد طبيعي n : $A\equiv0\ 3$.

A يقبل القسمة على 2 و على 3 و بما أن 2 و 3 أوليان فيما بينهما فإن A يقبل القسمة على 6

القاسم المشترك الاكبر لعدة اعداد طبيعية

خاصية

عند البحث عن القاسم المشترك الأكبر لعدة أعداد يمكن تعويض عددين منها بقاسمهما المشترك الأكبر.

مثال:

احسب $PGCD\left(200\ ;\ 150\ ;\ 40\right)$

الحل :

$$PGCD\left(200\ ;\ 150\right)=PGCD\left(10\times 20\ ;\ 10\times 15\right)=10\times PGCD\left(20\ ;\ 15\right)$$
$$=10\times 5\times PGCD\left(4\ ;\ 3\right)=50\times 1=50$$
$$PGCD\left(40\ ;\ 50\right)=10PGCD\left(4\ ;\ 5\right)=10\times 1=10$$

ومنه : $PGCD\left(200\ ;\ 150\ ;\ 40\right)=10$

المضاعف المشترك الاصغر لعدة اعداد طبيعية

خاصية

عند البحث عن المضاعف المشترك الأصغر لعدة أعداد طبيعية يمكن تعويض عددين منها بمضاعفهما المشترك الأصغر.

مثال:

احسب : $PPCM\ \left(150\ ;\ 200\ ;\ 350\right)$

الحل :

* نحسب أولا : $PPCM\ \left(150\ ;\ 200\right)$

$$PPCM\ \left(150\ ;\ 200\right)=PPCM\ \left(50\times 3\ ;\ 50\times 4\right)$$
$$=50\times PPCM\ \left(3\ ;\ 4\right)=50\times 3\times 4=600$$

فيكون : $PPCM\ \left(150\ ;\ 200\ ;\ 350\right)=PPCM\ \left(600\ ;\ 350\right)$

ومنه : $PPCM\ \left(600\ ;\ 350\right)=PPCM\ \left(50\times 12\ ;\ 50\times 7\right)$

$=50\times PPCM\ \left(12\ ;\ 7\right)=50\times 12\times 7=4200$ وبالتالي : $PPCM\ \left(150\ ;\ 200\ ;\ 350\right)=4200$

تمارين

تمرين 1:

حلل كل من الأعداد الآتية إلى جداء عوامل أولية

$$A=44\times 50\quad ;\quad B=80\times 77\quad ;\quad C=45\times 100$$

ثم استنتج قاسمها المشترك الأكبر ومضاعفها المشترك الأصغر.

الحل: تحليل كل من A و B و C إلى جداء عوامل أولية :

$$A=44\times 50=4\times 11\times 5\times 10=2^2\times 11\times 5\times 2\times 5=2^3\times 5^2\times 11$$
$$B=80\times 77=8\times 10\times 7\times 11=2^3\times 2\times 5\times 7\times 11=2^4\times 5\times 7\times 11$$
$$C=45\times 100=9\times 5\times 10^2=3^2\times 5\times\left(2\times 5\right)^2=3^2\times 5\times 2^2\times 5^2=2^2\times 3^2\times 5^3$$
$$PGCD\left(A;B;C\right)=2^2\times 5=20$$
$$PPCM\ \left(A;B;C\right)=2^4\times 5^3\times 3^2\times 7\times 11=1386000$$

تمرين 2:

أوجد عددين $a;b$ بحيث $PPCM\left(a;b\right)=2226$ و $a+b=148$

الحل: إيجاد $a;b$:

نفرض : $PGCD\left(a;b\right)=\delta$

لدينا : $a=\delta.a'$ و $b=\delta b'$ مع a' و b' أوليان فيما بينهما .

ولدينا : $\delta\times 2226=a\times b$ ومنه : $\delta\times 2226=\delta a'\times\delta b'$

وعليه : $\delta a'b'=2226$ وبما أن : $a+b=148$

فإن : $\delta a'+\delta b'=148$ وعليه : $\delta\left(a'+b'\right)=148$ ومنه δ يقسم 148 .

لنبحث عن قواسم 148 : لدينا : $148=2^2\times 37$ ومنه قواسم 148 هي : 1 ، 2 ، 4 ، 37 ، 74 ، 148 .

1) $\delta=1$: $\begin{cases}a'b'=2226\\ a'+b'=148\end{cases}$ ومنه a' و b' هما حلان للمعادلة : $x^2-148x+2226=0$

. $\Delta'=3250$ وعليه : $\sqrt{\Delta'}\simeq 57{,}008$ إذن لا توجد حلول طبيعية للمعادلة .

2) $\delta=2$: $\begin{cases}a'b'=1113\\ a'+b'=74\end{cases}$ ومنه a' و b' هما حلان للمعادلة : $x^2-74x+1113=0$.

$\Delta'=256$ ومنه للمعادلة حلان . $x_1=37-16=21$ ، $x_2=37+16=53$

إذن إما $a'=21$ و $b'=53$ وعليه : $a=2\times 21=42$ و $b=2\times 53=106$

أو $a'=53$ و $b'=21$ وعليه : $a=106$ و $b=42$

3) $\delta=4$: $\begin{cases}a'b'=556{,}5\\ a'+b'=37\end{cases}$ مرفوض . 4) $\delta=37$: $\begin{cases}a'b'\simeq 60{,}1\\ a'+b'=4\end{cases}$ مرفوض .

5) $\delta=74$: $\begin{cases}a'b'\simeq 30{,}08\\ a'+b'=2\end{cases}$ مرفوض 6) $\delta=168$: $\begin{cases}a'b'\simeq 15{,}04\\ a'+b'=1\end{cases}$ مرفوض

تمرين 60 ص 110 نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول $\left(x,y\right)$ التالية $2045x-64y=1\ldots(1)$

1) عيّن $PGCD\left(2045,64\right)$.

2) استنتج أن المعادلة $\left(1\right)$ تقبل على الأقل حلا في $\mathbb{Z}^2$. عيّن حلا خاصا للمعادلة $\left(1\right)$.

3) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $\left(1\right)$.

تمرين 61 ص 110 في $\mathbb{Z}^2$ نعتبر المعادلة $\left(1\right)$ التالية: $11x-5y=14$.

1) تحقق من أن الثنائية $\left(19,39\right)$ حل للمعادلة $\left(1\right)$ ثم استنتج كل الثنائيات $\left(x,y\right)$ من الأعداد الصحيحة التي تحقق المعادلة $\left(1\right)$.

2) بيّن أنه توجد ثنائية وحيدة $\left(x_0,y_0\right)$ حلا للمعادلة $\left(1\right)$ مع $0<x_0<5$.

تمرين 65 ص 110

السؤال : n عدد طبيعي غير معدوم . هل العدد $6\left(n^2+n\right)$ يكون دائما قابلا للقسمة على 24 ؟

الجواب : من كتابة العدد $6\left(n^2+n\right)$ فإنه يقبل القسمة على 6 ولدينا $n^2+n=n\left(n+1\right)$.

بما أن $n\left(n+1\right)$ عدد زوجي فإن العدد $2\left(n^2+n\right)$ يقبل القسمة على 4 وبالتالي $6\left(n^2+n\right)$ يقبل القسمة على 4. وحسب مبرهنة غوص فإن العدد $6\left(n^2+n\right)$ يقبل القسمة على $6\times 4=24$

ما هو تعليقك على هذا الجواب علما أنه من أجل $n=1$ يكون $6\left(n^2+n\right)=12$ ؟