نهائي رياضيات وتقني

القسمة في Z 2015

الحساب

الكفاءة المستهدفة

- إثبات أن عدد صحيح يقسم عددا صحيحا آخر.
- استعمال خواص قابلية القسمة في $\mathbb{Z}$.
- استعمال خوارزمية إقليدس لتعيين القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين.
- استعمال خوارزمية إقليدس لتعيين القواسم المشتركة لعددين طبيعيين.
- حل مشكلات بتوظيف خواص القاسم المشترك الأكبر.

المكتسبات القبلية

- القسمة الاقليدية
- الاعداد الاولية

الاستاذ YousfiMath Yousfisifou804@yahoo.fr القسمة الاقليدية يوسفي عبد الرحمن

نعمم يهتم علم الحساب، باعتباره فرع من فروع الرياضيات، بدراسة الأعداد حيث يعد من أقدم ميادينها وأول من أعطى أسس هذا العلم هو إقليدس، غيرأنه لم يأخذ هذا العلم حظه إلا عندما توصل العرب إلى أنظمة تعداد بينما كان إقليدس في عهده يمثل الأرقام بقطع مستقيمة، الشيء الذي لم يكن ملائما للوصول إلى بناء "نظريه للأعداد".

وقد أعتبر علم الحساب منذ بدايته كمحفز جيد للتكون العقلي لدى الإنسان، إضافة إلى ذلك فقد استفاد المهتمين به من تدريبات فذة بالنسبة للعمليات الذهنية، وهي اليوم تجد مجالا أوسع في تطبيقه في الواقع، نذكر على سبيل المثال التشفير

ســـــــــــــــير الدرس	التوقيت
نشاط	
1: قابلية القسمة	1 سا
2: القسمة الاقليدية	1 سا
3: القاسم المشترك الاكبر	1 سا
4: تمديد القاسم المشترك الاكبر	1 سا
5: الاعداد الاولية فيما بينها	1 سا
6: مبرهنة بيزو	1 سا
7: خوارزمية اقليدس	

وثائق التحضير	الوسائل البيداغوجية	نقد ذاتي
• دليل الأستاذ • الكتاب المدرسي • المنهاج • الهباج في الرياضيات • مذكرات شايبي امين	• السبورة •	

المؤسســـــــة:	المستـــــــوى: الثالثة رياضيات
السنة الدراسية:	ميـــدان التعلم: الاعداد والحساب
التاريـــــــــخ:	الوحدة التعلمية: قابلية القسمة في Z
توقيت الحصة :	موضوع الحصة : قابلية القسمة في Z

المكتسبات المستهدفة: إثبات أن عددا صحيحا يقسم عددا صحيحا آخر.استعمال خواص قابلية القسمة في $\mathbb{Z}$.

الأنشطة المقترحة وطبيعتها	الإنجاز(ســــــير الحصة)	التعليمات والتوجيهات

نشاط مقترح

137 | 12
17 | 11
5

لدينا هكذا: $137 = 12 \times 11 + 5$

حاصل قسمة 137 على 12 هو 11.
باقي قسمة 137 على 12 هو 5.

بإتباع نفس المنهجية المقابلة عين باقي و حاصل قسمة a على b في الحالتين التاليتين:

* $a = 312$ و $b = 46$
* $a = 676$ و $b = 13$.

أحصر العدد الطبيعي a بين مضاعفين متعاقبين للعدد الطبيعي b في الحالتين التاليتين:

* $a = 170$ و $b = 29$
* $a = 2007$ و $b = 16$.

عين باقي قسمة كل من العددين 660 و 366 على 7 . ماذا تلاحظ ؟

نقول عن العددين 660 و 366 أنهما متوافقان بترديد 7 و نكتب $660 \equiv 366[7]$.

هل العددان 153 و 2008 متوافقان بترديد 5 ؟

هل العددان 274 و 69 متوافقان بترديد 3 ؟

بين أن العددين $a = 234$ و $b = 146$ متوافقان بترديد $n = 11$. ما هو باقي قسمة $a - b$ على n ؟

بين أن العددين $a = 174$ و $b = 109$ متوافقان بترديد $n = 13$. ما هو باقي قسمة $a - b$ على n ؟

ضع تخمينا.

1. النشاط

2. الحـــل

1/ قابلية القسمة في $\mathbb{Z}$

1.1 تعريف

تعريف: a و b عددان صحيحان و a غير معدوم. القول أن العدد a يقسم العدد b يعني وجود عدد صحيح k حيث : $b = ka$. نقول كذلك a قاسم للعدد b أو نقول كذلك b مضاعف للعدد a . نكتب $a|b$ ونقرأ a يقسم b.

أمثلة: $48 = 8 \times 6$ و منه $6|48$

$48 = -8 \times -6$ و منه $-6|48$

$-65 = -13 \times 5$ و منه $5|-65$

$-65 = -13 \times 5$ و منه $-13|-65$

ملاحظة: في $\mathbb{Z}$ للعددين a و $-a$ نفس القواسم .

2.1 خواص

خاصية1: a ، b ، c ثلاثة أعداد صحيحة غير معدومة .
إذا كان a يقسم b و b يقسم c فإن a يقسم c .

البرهان: إذا كان $a|b$ و $b|c$ فإن $b = ka$ و $c = k'b$ حيث k و k' عددان صحيحان و منه $c = kk'a$. وبما أن kk' عدد صحيح فإن a يقسم c .

خاصية2: a و b عددان صحيحان و a غير معدوم.
إذا كان a يقسم b فإنه من أجل كل عدد صحيح m ، a يقسم mb

البرهان: إذا كان $a|b$ فإن $b = ka$ حيث k عدد صحيح و منه $mb = mka = mk\ a$
وبما أن mk عددا صحيحا فإن a يقسم mb .

خاصية3: a و b عددان صحيحان و a غير معدوم.
إذا كان a يقسم b فإنه من أجل كل عدد صحيح غير معدوم m ، ma يقسم mb

البرهان: إذا كان $a|b$ فإن $b = ka$ حيث k عدد صحيح و منه $mb = mka = k\ ma$
وبما أن k عدد صحيح فإن ma يقسم mb .

خاصية3: a ، b ، c ثلاثة أعداد صحيحة و c غير معدوم .
إذا كان c القاسم المشترك لـ: a و b فإن : c يقسم $a+b$ و $a-b$
بصفة عامة c يقسم: $ma + nb$ من أجل كل $n,m \in$ ⍰

يتعلق الأمر بالخواص التالية، التي يتعين إثباتها:

إذا كان a يقسم b و b يقسم c فإن a يقسم c.

إذا كان a يقسم b فإنه من أجل كل عدد صحيح k، a يقسم kb و kb يقسم kb.

إذا كان a يقسم b و c فإنه من أجل كل x و y من $\mathbb{Z}$، لدينا a يقسم $ax + by$.

نجد هنا فرصا لممارسة بعض أنماط البرهان.

تطبيق

- ❖ عين الأعداد الصحيحة n التي من أجلها العدد $\frac{n+17}{n+4} \in$
- ❖ عين الاعداد الطبيعية a و b حيث : $a^2+4b^2=20$
- ❖ عين الأعداد الصحيحة n حيث : $3n+5$ يقسم 8 .
- ❖ عين الأعداد الصحيحة n حيث : $3n+8$ يقسم $n+6$

الحل

1) لنا : $\frac{n+17}{n+4}=\frac{n+4+13}{n+4}=1+\frac{13}{n+4}$

لكي يكون العدد : $\frac{n+17}{n+4}\in\Omega$ يكفي أن $(n+4)/13$ ومنه $(n+4)\in D_{13}$

$D_{13}=\{-13;-1;1;13\}$

ومنه : $n\in\{-17;-4;-3;9\}$

2) لنا : $a^2+4b^2=20$ يكافئ $(a+2b)(a-2b)=20$

نميز ثلاث حالات : لأن : $20=1\times 20=2\times 10=4\times 5$

$a+2b$	20	10	5
$a-2b$	1	2	4
a		6	
b		2	

ومنه : $(a,b)=(6,2)$

3) مجموعة قواسم 8 هي $-8;-4;-2;-1;1;2;4;8$.

$3n+5$ يقسم 8 معناه $3n+5=-8$ أو $3n+5=-4$ أو $3n+5=-2$ أو $3n+5=-1$ أو $3n+5=1$

أو $3n+5=2$ أو $3n+5=4$ أو $3n+5=8$.

أي $3n=-13$ أو $3n=-9$ أو $3n=-7$ أو $3n=-6$ أو $3n=-4$ أو $3n=-3$ أو $3n=-1$ أو $3n=3$.

المعادلات $3n=-13$ ، $3n=-7$ ، $3n=-4$ و $3n=-1$ ليس لها حلول .

الحلول هي الأعداد الصحيحة -3 ، -2 ، -1 ، 1 .

4) ليكن n عدد صحيح حيث $3n+8$ يقسم $n+6$. ومنه $3n+8$ يقسم $3n+18$. و بالتالي $3n+8$ يقسم

$3n+18-3n+8$ أي $3n+8$ يقسم 10. مجموعة قواسم 10 هي

$-10;-5;-2;-1;1;2;5;10$.

$3n+8$ يقسم 10 معناه $3n+8=-10$ أو $3n+8=-5$ أو $3n+8=-2$ أو $3n+8=-1$ أو $3n+8=1$

أو $3n+5=2$ أو $3n+8=5$ أو $3n+8=10$.

أي $3n=-18$ أو $3n=-13$ أو $3n=-10$ أو $3n=-9$ أو $3n=-7$ أو $3n=-3$ أو $3n=2$.

و منه $n=-6$ أو $n=-3$ أو $n=-1$

عكسيا هذه الأعداد حلولا (يكفي التعويض في $3n+8$ و $n+6$ والتأكد في كل مرة من أن $3n+8$ يقسم $n+6$).

الحلول هي الأعداد الصحيحة -6 ، -3 ، -1 .

التمرين 12 ص 56

1) عيّن الأعداد الصحيحة n حيث يكون $5n+6$ يقسم 34 .

2) عين الأعداد الصحيحة n التي يكون من أجلها $5n+6$ قاسما للعدد $n+8$.

الحل نبحث عن قواسم 34

طريقة البحث :

مبرهنة

لإيجاد قواسم عدد طبيعي نحلله الى جداء عوامل أولية ثم نحسب الجداء (الأس الأخير +1) في (الأس الثاني +1) في (الأس الأول +1)

نتيجة: قواسم عدد صحيح هي نفس قواسم العدد الطبيعي اذا كان موجبا أما اذا كان هذا العدد سالبا نضيف اليه القواسم بأشارة سالبة

$34=17^1\times 2^1$ عدد القواسم $(1+1)(1+1)=4$ وهي $34=\{1.2.17.34.-1.-2.-17.-34\}$

لدينا $5n+6 \mid 34$ اي ان $34=(5n+6)k;k\in\mathbb{Z}$

ومنه $5n+6=1$ أي $5n=-5$ ومنه $n=-1$

ومنه $5n+6=2$ مرفوض ومنه $5n+6=17$ مرفوض ومنه $5n+6=34$ مرفوض

ومنه $5n+6=-1$ مرفوض ومنه $5n+6=-2$ مرفوض ومنه $5n+6=-17$ مرفوض

ومنه $5n+6=-34$ أي $5n=-20$ ومنه $n=-8$ القيم هي $n=-4$ و $n=-1$

2) عين الأعداد الصحيحة n التي يكون من أجلها $5n+6$ قاسما للعدد $n+8$.

لدينا $5n+6 \mid n+8$ اي ان $5n+6 \mid 5(n+8)$ ومنه $5n+40=(5n+6)k;k\in\mathbb{Z}$

ومنه $5n+40-(5n+6)=(5n+6)k-(5n+6);k\in\mathbb{Z}$ ينتج ان

$34=(5n+6)(k-1);k\in\mathbb{Z}$ وهذا يعني ان $5n+6 \mid 34$ القيم هي $n=-8$ و $n=-1$

المؤسســــــة:	المستـــــــوى: الثالثة رياضيات
السنة الدراسية:	ميـــدان التعلم: الاعداد والحساب
التاريـــــخ:	الوحدة التعلمية: قابلية القسمة في Z
توقيت الحصة :	موضوع الحصة : القسمة الإقليدية في $\mathbb{Z}$.القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين.

المكتسبات المستهدفة: استعمال خوارزمية إقليدس لتعيين القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين.- و تعيين القواسم المشتركة لعددين طبيعيين.

الأنشطة المقترحة وطبيعتها	الإنجاز (سـير الحصة)	التعليمات والتوجيهات

2/ القسمة الاقليدية في Z

1.2 القسمة الاقليدية في $\mathbb{Z}$

مبرهنة

من أجل كل عدد صحيح a و من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم b. توجد ثنائية وحيدة q, r من الأعداد الصحيحة حيث: $a = bq + r$ و $0 \le r < b$.

ملاحظة:

تسمى عملية البحث عن الثنائية q, r بالقسمة الإقليدية للعدد a على العدد b. يسمى q و r بهذا الترتيب حاصل و باقي القسمة الإقليدية للعدد a على العدد b.

البرهان:

العدد a إما مضاعف لِ b و إما محصور بين مضاعفين متتابعين لِ b أي يوجد عدد صحيح q وحيد حيث: $qb \le a < (q+1)b$ و نستنتج من هذا أن $0 \le a - qb < b$.
بوضع $r = a - qb$ نحصل على $a = bq + r$ مع $0 \le r < b$.

ملاحظة:

- ❖ يمكن تمديد مفهوم القسمة الإقليدية لعدد صحيح a على عدد صحيح غير معدوم b.
ونحصل على $a = bq + r$ و $0 \le r < |b|$
- ❖ يمكن تعيين الحاصل والباقي باستعمال الالة الحاسبة وذلك بقسمة مثلا 126 على 11 فنجد الحاصل هو 11.4545 وبالتالي الحاصل هو 11 والباقي هو 126-(11.11)

مثال 1:

& $a = 384$ و $b = 53$ باستعمال الالة الحاسبة $\frac{a}{b} = \frac{384}{53} = 7,245$ الحاصل هو 7
الباقي هو $384 - 53 \times 7 = 13$ & $a = -237$ و $b = 26$ باستعمال الالة الحاسبة
$\frac{a}{b} = \frac{-237}{26} = -9,115$ الحاصل هو $-9 + (-1) = -10$ نقوم باضافة 1- الى الحاصل الباقي هو
$-237 - 26(-10) = 23$

مثال 2:

a عدد صحيح . باقي قسمة a على 10 هو 6 .
1. ما هو باقي قسمة العدد a على 5 ؟
2. ما هو باقي قسمة العدد a على 2 ؟

الحل:

$a = 10k + 6$ حيث k عدد صحيح .

1.
$$a = 10k + 5 + 1$$
$$= 5(2k+1) + 1$$

ومنه باقي قسمة a على 5 هو 1 .

2. $a = 2(5k+3)$ حيث k عدد صحيح .
ومنه باقي قسمة a على 2 هو 0 .

التعليمات والتوجيهات:

تبرهن الخاصية : من أجل $a \in \mathbb{Z}$ و $b \in \mathbb{Z}_+^*$.
توجد ثنائية وحيدة $(q;r)$ (عددان صحيحان) حيث $a = bq + r$ و $0 \le r < b$
كما تبرهن المساواة: $PGCD(a;b) = PGCD(b;r)$
نبرهن أن : $PGCD(ka;kb) = kPGCD(a;b)$
و أن: $PGCD(a;b) = d$
يكافئ: $a = da'$ و $b = db'$ مع a' و b' أوليان فيما بينهما.
توسيع مفهوم القاسم المشترك الأكبر إلى $\mathbb{Z}$.
يمكن اقتراح أنشطة من النوع: إيجاد الأعداد الصحيحة a و b إذا أعطي $PGCD(a;b)$ و علاقة بين a و b.
- يمكن اقتراح مشكلات من الواقع مثل تبليط أرضية مستطيلة الشكل ، رصف علب (متوازي مستطيلات) في صندوق(متوازي مستطيلات) ذو أبعاد معلومة، ...

2.2 حصر عدد بين مضاعفين متعاقبين لعدد صحيح

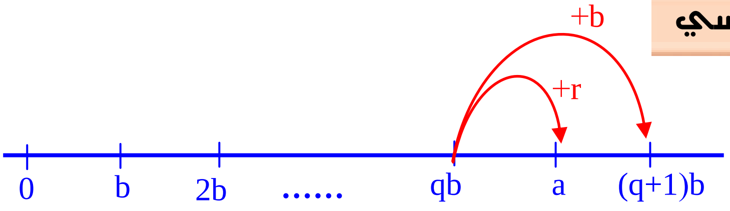
تمهيد:

لدينا $25=3(7)+4$ معناه حاصل قسمة 25 على 3 هو 7 والباقي هو 4 لدينا $0\leq 4<7$

باضافة $3(7)$ الى الطرفين نجد $0+3(7)\leq 4+3(7)<7+3(7)$ اي $0+7(3)\leq 25<7(4)$

العددان $7(3)$ و $7(4)$ مضاعفان متعاقبان أو متتابعان للعدد 7

1 التفسير الهندسي



خاصية: من أجل كل عدد صحيح a و من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم b، توجد ثنائية وحيدة (q,r) من الأعداد الصحيحة حيث: $a=bq+r$ و $0\leq r<b$. و $bq\leq a<b(q+1)$

تمرين

عين باقي قسمة العدد الصحيح a على العدد الطبيعي b ، ثم عين أحصر العدد a بين مضاعفين متعاقبين للعدد b في كل حالة من الحالات الآتية.

1. $a=8159$ و $b=52$. 2. $a=725$ و $b=91$. 3. $a=-7361$ و $b=47$

الحل:

1. $8159=52\times156+47$. 156 هو حاصل قسمة 8159 على 52 و 47 هو باقي قسمة 8159 على 52. $52\times156\leq 8159<52\times157$ أي $8112\leq 8159<8164$.

2. $725=91\times7+88$. 7 هو حاصل قسمة 725 على 91 و 88 هو باقي قسمة 725 على 91. $91\times7\leq 725<91\times8$ أي $637\leq 725<728$.

3. $-7361=47\times(-157)+18$. -157 هو حاصل قسمة -7361 على 47 و 18 هو باقي قسمة -7361 على 47 . $47\times(-157)\leq -7361<47\times(-156)$ أي $-7379\leq -7361<-7332$

تمرين 9:

عيّن الأعداد الصحيحة n التي من أجلها يكون العدد $n+3$ يقبل القسمة على 7

الحل:

$n+3$ يقبل القسمة على 7 أي $n+3=7k$ ومنه $n=7k-3$

تمرين 11:

عيّن الأعداد الصحيحة n التي من أجلها يكون العدد $2n+3$ يقسم 6 .

الحل:

$2n+3$ يقسم 6 أي ان $2n+3$ من قواسم ال 6 وبالتالي:

$$2n+3=\{1.2.3.6.-1.-2.-3.-6\}$$

$\begin{cases}2n+3=1\\ n=-1\end{cases}$ لما $\begin{cases}2n+3=2\\ n\neq -1/2\end{cases}$ لما $\begin{cases}2n+3=3\\ n=0\end{cases}$ الخ........

2.2 القاسم المشترك الاكبر لعددين طبيعيين

$PGCD$ يعني **plus grand commun divisiseur**

a عدد طبيعي غير معدوم . نرمزبـ D_a إلى مجموعة قواسم العدد a .

تعريف

a و b عددان طبيعيان غير معدومين. D_a و D_b مجموعتا قواسم a و b على الترتيب . $D_a \cap D_b$ هي مجموعة القواسم المشتركة للعددين a و b . يسمى أكبر عنصر من المجموعة $D_a \cap D_b$ بالقاسم المشترك الأكبر للعددين a و b .و نرمز له بـ $PGCD(a;b)$

مثال

$D_{10} = \{1;2;5;10\}$

$D_{15} = \{1;3;5;15\}$

$D_{10} \cap D_{15} = \{1;5\}$

$PGCD(10;15) = 5$

ملاحظات:

$PGCD(a;a) = a$ و $PGCD(1;a) = 1$

$PGCD(0;a) = a$ (a غير معدوم) .

مجموعة القواسم المشتركة لعددين طبيعيين غير معدومين هي مجموعة قواسم قاسمهما المشترك الأكبر.

تطبيق

1) ليكن n عددا صحيحا.

ليكن العددان الصحيحان $a = 5n - 2$ و $b = 2n + 3$.

أثبت أن كل قاسما مشتركا للعددين a و b يقسم العدد 19.

الحل:

ليكن d قاسم مشترك للعددين a و b . و منه d يقسم $5b - 2a$ أي d يقسم

$5\times(2n+3) - 2\times(5n-2)$

أي d يقسم 19.

3.2 خواص القاسم المشترك الاكبر لعددين طبيعيين

مبرهنة

a و b عددان طبيعيان غير معدومين حيث $a \geq b$. r باقي قسمة a على b

$PGCD(a;b) = PGCD(b;r)$

البرهان:

نضع $PGCD(a;b) = d$ و $PGCD(b;r) = d'$.

نعلم أن $a = bq + r$ حيث q عدد طبيعي . و منه $r = a - bq$.

d يقسم b وبالتالي d يقسم bq و d يقسم a إذن d يقسم $a - bq$ أي d يقسم r.

و منه d قاسم مشترك للعددين b و r .

d' يقسم b وبالتالي d' يقسم bq و d' يقسم r إذن d' يقسم $bq + r$ أي d' يقسم a .

و منه d' قاسم مشترك للعددين a و b .

إذن مجموعة القواسم المشتركة للعددين a و b هي نفسها مجموعة القواسم المشتركة للعددين b و r

وبالتالي $d = d'$ أي $PGCD(a;b) = PGCD(b;r)$.

4.2 خوارزمية اقليدس

a و b عددان طبيعيان غير معدومين و حيث $a > b$. بقسمة a على b نحصل على $a = bq_1 + r_1$ و $0 \le r \prec b$ حيث q_1 و r_1 عددان طبيعيان.

- إذا كان $r_1 = 0$ (أي b يقسم a) فإن $PGCD(a;b) = b$.
- إذا كان $r_1 \neq 0$ فإن $PGCD(a;b) = PGCD(b;r_1)$. نقسم b على r_1 نحصل على $b = r_1q_2 + r_2$ و $0 \le r_2 \prec r_1$ حيث q_2 و r_2 عددان طبيعيان.
- إذا كان $r_2 = 0$ (أي r_1 يقسم b) فإن $PGCD(a;b) = PGCD(b;r_1) = r_1$.
- إذا كان $r_2 \neq 0$ فإن $PGCD(a;b) = PGCD(b;r_1) = PGCD(r_1,r_2)$. نقسم r_1 على r_2 نحصل على $r_1 = r_2q_3 + r_3$ و $0 \le r_3 \prec r_2$ حيث q_3 و r_3 عددان طبيعيان.
- نواصل هكذا حتى نجد باقيا معدوما . ونسمي r_n آخر باق غير معدوم وعليه:

$PGCD(a;b) = PGCD(b;r_1) = PGCD(r_1;r_2) = ... = PGCD(r_n;0) = r_n$.

هذه الطريقة لإيجاد القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين تسمى خوارزمية إقليدس.

مبرهنة

القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين غير معدومين a و b هو آخر باقي غير معدوم في سلسلة قسمات خوارزمية إقليدس .

مثال: تعيين $PGCD(1631,932)$.

$$1631 = 932 \times 1 + 699$$
$$932 = 699 \times 1 + 233$$
$$699 = 233 \times 3 + 0$$

و منه: $PGCD(1631;932) = 233$

مثال: عين القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b في كل حالة من الحالات الآتية :

1. $a = 8700$ و $b = 9150$.
2. $a = 691$ و $b = 2007$.
3. $a = 1500$ و $b = 250$.

طريقة: لحساب القاسم المشترك الأكبر لعددين صحيحين يمكن استعمال خوارزمية إقليدس و وضع النتائج في جدول

الحل:

.1

الحاصل		1	19	3
المقسوم و القاسم	9150	8700	450	150
الباقي		450	150	0

إذن : $PGCD(8700;9150) = 150$

.2

الحاصل		2	1	9	2	7	1	3
المقسوم و القاسم	2007	691	625	66	31	4	3	1
الباقي		625	66	31	4	3	1	0

إذن : $PGCD(691;2007) = 1$

.3

الحاصل		6
المقسوم و القاسم	1500	250
الباقي		0

إذن : $PGCD(1500;250) = 250$

تمرين 34 ص57 عين القاسم المشترك الأكبر للعددين الصحيحين a و b في كل حالة من الحالات التالية: أ. $a=-350$ و $b=-252$. ب . $a=126$ و $b=-735$. ج. $a=-138$ و $b=575$.

الحل لدينا أ. $a=-350$ و $b=-252$. اي $PGCD\left(-252,-350\right)=PGCD\left(252,350\right)$

ومنه
$$350=252\times1+98....252=98\times2+56$$
$$98=56\times1+42....56=42\times1+14$$
$$42=14\times3+0....PGCD\left(-350,-252\right)=14$$

ب . $a=126$ و $b=-735$.

اي. $PGCD\left(-735,126\right)$

ومنه
$$-735=126\times\left(-6\right)+21....126=21\times6+0$$
$$PGCD\left(-735,126\right)=21$$

ملاحظة
$-735=126\times\left(-5\right)+r$
$r\prec0$ الحاصل سالب نضيف
له -1 لان $0\le r<b$

ج. $a=-138$ و $b=575$

اي $PGCD\left(575,-138\right)$

ومنه
$$575=-138\times\left(-4\right)+23....-138=23\times\left(-6-1\right)+23$$
$$23=23\times1+0........PGCD\left(575,-138\right)=23$$

$5\times\ 2n+3\ -2\times\ 5n-2$ أي d يقسم 19.

مبرهنة

a و b عددان طبيعيان غير معدومين . k عدد طبيعي غير معدوم.

$$PGCD\ \ ka;kb\ \ =k\times PGCD\ \ a;b$$

البرهان: نضع $PGCD\ \ a;b\ \ =d$ و $PGCD\ \ ka;kb\ \ =d'$. d و d' عددان طبيعيان غير معدومين. d يقسم a و منه kd يقسم ka. d يقسم b و منه kd يقسم kb و بالتالي kd قاسم مشترك للعددين ka و kb إذن kd يقسم القاسم المشترك الأكبر للعددين ka و kb أي kd يقسم d' ومنه يمكن كتابة

$d'=k'\ kd$ حيث k' عدد طبيعي .

كذالك d' يقسم ka و kb . و منه $k'kd$ يقسم ka و kb و بالتالي $k'd$ يقسم a و b وبالتالي $k'd$ يقسم القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b و بالتالي $k'=1$. ومنه $d'=kd$.

إذن $PGCD\ \ ka;kb\ \ =k\times PGCD\ \ a;b$.

تمرين 35 ص 57 عين $PGCD\left(54,82\right)$ ثم استنتج القاسم المشترك الأكبر للعددين $PGCD\left(5400,8200\right)$.

الحل لدينا
$$82=54\times1+28....54=28\times1+26$$
$$28=26\times1+2....26=2\times13+0$$
$$PGCD\left(82,54\right)=2$$

$$PGCD\left(54,82\right)=PGCD\left(54\times100,82\times100\right)=200$$

تعريف

a و b عددان طبيعيان غير معدومين.

يكون العددان a و b أوليين فيما بينهما إذا و فقط إذا كان قاسمهما المشترك الأكبر يساوي 1 $PGCD\ \ a;b$

تمرين 33 ص 57 أحسب باقي قسمة العدد 1399 على 82 ثمّ استنتج $PGCD(1399,82)$.

الحل لدينا $1399=17\times82+(0.6097560976\times82)$
$1399=17\times82+5$ باقي قسمة العدد 1399 على 82 هو 5

اذن $PGCD(1399,82)=PGCD(82,5)$

العددان $82,5$ اوليان فيما بينهما اذن $PGCD(1399,82)=1$

مبرهنة

a و b عددان طبيعيان غير معدومين . d قاسم مشترك للعددين a و b. نضع $a=da'$ و $b=db'$: يكون d القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b إذا و فقط إذا كان العددان الطبيعيان a' و b' أوليين فيما بينهما .

البرهان:

a و b عددان طبيعيان غير معدومين و d قاسمهما المشترك الأكبر.

- نضع $a=da'$ و $b=db'$

و منه
$$d=PGCD(a;b)=PGCD(da';db')$$
$$=d\times PGCD(a';b')$$

بما أن d غير معدوم فإن: $PGCD(a';b')=1$

- المسألة العكسية . نعتبر $PGCD(a';b')=1$.

$$PGCD(a;b)=d\times PGCD(a';b')=d$$

تطبيق:

$a=1440$ و $b=448$ بين ان $PGCD(1440,448)=32$

الحل

$1440=448\times3+96....448=96\times4+46$

$96=46\times1+23....46=23\times2+0$

$PGCD(1440,448)=32$

5.2 تحديد المشترك الاكبر لعددين صحيحين

تعريف

a و b عددان صحيحان غير معدومين. القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b هو العدد الطبيعي الوحيد d حيث $d=PGCD(|a|;|b|)$.

خاصية

a و b عددان صحيحان غير معدومين . k عدد صحيح غير معدوم.

$$PGCD(ka;kb)=|k|PGCD(a;b)$$

ملاحظة:

a و b عددان صحيحان غير معدومين.

إذا كان b يقسم a فإن $PGCD(a;b)=|b|$

تطبيق عين كل الثنائيات $(a;b)$ من الأعداد الطبيعية غير المعدومة حيث :

$$\begin{cases} a+b=66 \\ PGCD(a;b)=6 \end{cases}$$

الحل:

نضع $a=6a'$ و $b=6b'$ حيث a' و b' عددان أوليان فيما بينهما .

$a+b=66$ تعني $6a'+6b'=66$ و منه $a'+b'=11$

$a';b' \in \; 1;10 \;,\; 2;9 \;,\; 3;8 \;,\; 4;7 \;,\; 5;6 \;,\; 6;5 \;,\; 7;4 \;,\; 8;3 \;,\; 9;2 \;,\; 10;1$

و منه مجموعة الحلول هي :

$$\left| \begin{array}{l} 6;60 \;,\; 12;54 \;,\; 18;48 \;,\; 24;42 \;,\; 30;36 \;,\; 36;30 \;, \\ 42;24 \;,\; 48;18 \;,\; 54;12 \;,\; 60;6 \end{array} \right|$$

تطبيق عين كل الثنائيات $a;b$ من الأعداد الطبيعية غير المعدومة حيث :

$$\begin{cases} a \times b = 900 \\ PGCD \;\; a;b \;\; = 5 \end{cases}$$

الحل:

نضع $a = 5a'$ و $b = 5b'$ حيث a' و b' عددان أوليان فيما بينهما .

$a \times b = 900$ تعني $5a' \times 5b' = 900$ و منه $a' \times b' = 36$

$a';b' \in \; 1;36 \;,\; 4;9 \;,\; 9;4 \;,\; 36;1$

و منه مجموعة الحلول هي : $5;180 \;,\; 20;45 \;,\; 180;5 \;,\; 45;20$

تطبيق عين القاسم المشترك الأكبر للعددين -1440 و -448

الحل

$$PGCD \;\; -1440;-448 \;\; = PGCD \;\; 1440;448$$

يمكن الملاحظة أن $1440 = 32 \times 45$ و $448 = 32 \times 14$

$$PGCD \;\; 1440;448 \;\; = 32 \times PGCD \;\; 45;14$$

لنحسب $PGCD \;\; 45;14$

2	1	4	3		الحاصل
1	2	3	14	45	المقسوم و القاسم
0	1	2	3		الباقي

إذن : $PGCD \;\; 45;14 \;\; = 1$.

$$PGCD \;\; 1440;448 \;\; = 32 \times PGCD \;\; 45;14 \;\; = 32$$

و منه $PGCD \;\; -1440;-448 \;\; = 32$

تمارين 36 .39.41 ص 57

عيّن كل الثنائيات (a,b) من الأعداد الطبيعية التي تحقق الشرطين المقترحين

$$\begin{cases} a+b = 72 \\ PGCD(a,b) = 9 \end{cases} \qquad \begin{cases} ab = 360 \\ PGCD(a,b) = 6 \end{cases} \qquad \begin{cases} a^2 - b^2 = 825 \\ PGCD(a,b) = 5 \end{cases}$$

الحل

$\begin{cases} a+b = 72 \\ PGCD(a,b) = 9 \end{cases}$ لدينا $PGCD(a,b) = 9$ ومنه $\begin{cases} a = 9x \\ b = 9y \end{cases}$ حيث $\begin{cases} (x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \\ PGCD(x,y) = 1 \end{cases}$

$a+b = 72$ ومنه $9x + 9y = 72$ أي ان $x + y = 8$

الثنائيات هي $\left\{ \begin{array}{l} (0;8);\boxed{(1;7)};(2;6);\boxed{(3;5)};(4;4) \\ ;\boxed{(5;3)};(6;2);\boxed{(7;1)};(8;0) \end{array} \right\}$ $(x,y) \in$ الثنائية الغير مؤطرةمرفوضة

لانها لا تحقق $PGCD(x,y) = 1$

$$(x,y) \in \left\{ \boxed{(1;7)};\boxed{(3;5)};\boxed{(5;3)};\boxed{(7;1)} \right\}$$

ومنه

$$(a,b) \in \left\{ \boxed{(9;63)};\boxed{(27;45)};\boxed{(45;27)};\boxed{(63;9)} \right\}$$

$\begin{cases} ab = 360 \\ PGCD(a,b) = 6 \end{cases}$ لدينا $PGCD(a,b) = 6$ ومنه $\begin{cases} a = 6x \\ b = 6y \end{cases}$ حيث $\begin{cases} (x,y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \\ PGCD(x,y) = 1 \end{cases}$

$ab = 360$ ومنه $36xy = 360$ أي ان $xy = 10$

الثنائيات هي $(x,y) \in \{(2;5);(1;10);(5;2);(10;1)\}$ كل الثنائيات تحقق $PGCD(x,y) = 1$

ومنه $(a,b) \in \{\boxed{(6;60)};\boxed{(12;30)};\boxed{(60;6)};\boxed{(30;12)}\}$

$\begin{cases} a^2 - b^2 = 825 \\ PGCD(a,b) = 5 \end{cases}$ لدينا $PGCD(a,b) = 5$ ومنه $\begin{cases} a = 5x \\ b = 5y \end{cases}$ حيث $\begin{cases} (x,y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \\ PGCD(x,y) = 1 \end{cases}$

$a^2 - b^2 = 825$ ومنه $(a-b)(a+b) = 825$ أي ان $(x-y)(x+y) = 33$

لاحظ ان $(x,y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ ومنه $x - y \succ 0$ أي $x \succ y$

لدينا الثنائيات الممكنة هي $((x-y),(x+y)) \in \{(1;33);(33;1);(11;3);(3;11)\}$

وبالتالي عند $(1;33)$ ومنه $x + y = 33$ و $x - y = 1$ أي $x = 17$ و $y = 16$

وبالتالي عند $(33;1)$ ومنه $x + y = 1$ و $x - y = 33$ أي $x = 17$ و $y = -16$ مرفوض

وبالتالي عند $(11;3)$ ومنه $x + y = 3$ و $x - y = 11$ أي $x = 7$ و $y = 4$

وبالتالي عند $(3;11)$ ومنه $x + y = 11$ و $x - y = 3$ أي $x = 7$ و $y = -4$ مرفوض

مرفوض لان $(x,y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$

ومنه $(x,y) \in \{(17;16);(7;4)\}$

اي $(a,b) \in \{(85,80);(35;20)\}$

تمرين 48 ص 57

1) أحسب مجموع قواسم العدد 8 ثم مجموع قواسم 81.

2) ما هو عدد قواسم العدد 8×81 ؟

الحل

D_8 $1,2,4,8$ مجموع قواسم 8 هو 15

$81 = 3^4$ لها خمس قواسم هي D_{81} $1,3,9,27,81$ مجموعها هو 121

عدد قواسم 8×81 لدينا $8 \times 81 = 2^3 \times 3^4$ عدد القواسم هو 20 قاسم

طريقة البحث عنها هي $8 \times 81 = 2^n \times 3^p$ و $n = 0,1,2,3$ و $n = 0,1,2,3,4$

2^n	1					2				
3^p	1	3	9	27	81	1	3	9	27	81
D	1	3	9	27	81	2	6	18	54	162

2^n	4					8				
3^p	1	3	9	27	81	1	3	9	27	81
D	4	12	36	108	324	8	24	72	216	648

تمرين 49 ص 57

1) كيف يمكن اختيار العدد الطبيعي n حتى يكون $\frac{n+2}{n-1}$ عددا صحيحا .

2) عين الأعداد الطبيعية a حيث من بين قواسم العدد a قاسمين أوليين فقط هما 2 و 3 ,

وعدد قواسم a^2 هو ثلاث مرات عدد قواسم العدد a

3)

الحل يكون $\frac{n+2}{n-1}$ عددا صحيحا . اذا وفقط اذا كان $PGCD\ (n+2;n-1)=n-1$

نجري الخوارزمية نجد $\begin{array}{r|l} n+2 & n-1 \\ \hline n-1 & 1 \\ 3 & \end{array}$ اذن $PGCD\ (n+2;n-1)=PGCD\ (n-1;3)=n-1$

ومنه $PGCD\ (n+2;n-1)\in\{1;3\}$

تمرين 50 ص 57 عين كل الثنائيات $(x\,;y)$ من الأعداد الصحيحة التي تحقق $xy-4y-12=0$.

الحل:

تمرين 51 ص 57 في المستوي المنسوب إلى معلم ، نعتبر C_f منحنى الدالة f المعرفة على المجموعة $D=[-3;1[\cup]1;3]$ بِ: $f\,(x)=\frac{2x^2-3x-3}{x-1}$.

1) عين العدد الحقيقي a حتى يكون من أجل كل $x\in D$ ، $f\,(x)=2x-1+\frac{a}{x-1}$

2) عين نقط المنحني C_f التي إحداثيتها أعداد صحيحة .

الحل:

تمرين x عدد طبيعي . برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم k ،
$(x-1)(1+x+x^2+...+x^{k-1})=x^k-1$

2. أ. d و n عددان طبيعيان غير معدومين حيث d يقسم n .

برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم a ، العدد a^d-1 يقسم العدد a^n-1 .

ب . استنتج أن العدد $2^{2010}-1$ يقبل القسمة على 7 ثم على 63 ثم على 9 .

3. أ . عين $PGCD\,(63;60)$.

ب . بين أن : $(a^{63}-1)-(a^{60}-1)a^3=a^3-1$.

جـ . برهن أن: $PGCD\,(a^{63}-1;a^{60}-1)=a^3-1$.

د . استنتج القيمة لِ: $PGCD\,(2^{63}-1;2^{60}-1)$.

تمرين 66 ص 57

ما هو باقي القسمة الأقليدية للعدد 71 على 72 ؟

تمرين 67 ص 57

كتاب مكتوب عليه 4350 سطرا .

كل صفحة تحمل 34 سطرا ماعدا الصفحة الأخيرة ناقصة .

ما هو عدد الأسطر الموجودة على الصفحة الأخيرة ؟

تمرين 68 ص 57

علما أنه يوجد عدد طبيعي k حيث $100^{100}=13k+35$. عين باقي قسمة 100^{100} على 13 .

تمرين 69 ص 57

الباقيان للقسمة الأقليدية لكل من العددين m و n على 17 هما على التوالي 8 و 12.

عين بواقي القسمة الأقليدية لكل من الأعداد $m+n$ ، $m\times n$ و m^2 على 17.

تمرين 70 ص 57

عين الأعداد الطبيعية غير المعدومة n الذي يكون باقي قسمتها على 43 مساويا لمربع الحاصل .

تمرين 71 ص 57

أ . حول $241312s$ (ثانية) إلى أيام ، ساعات ، دقائق وثوان .

5.2 حل مشكلات

حل مشكلات بتوظيف $PGCD$.

1). xعدد طبيعي برهن انه من اجل $k \in \mathbb{N}^*$

$$(x-1)(1+x+x^2....x^{k-2}+x^{k-1})=x^k-1$$

2). $a.n.d$ اعداد طبيعية غير معدومة و d يقسم n برهن انه مهما كان a فان

$$(a^d-1)|(a^n-1)$$

3). استنتج ان $2^{2010}-1$ يقبل القسمة على 7 ثم على 63 ثم على 9

4). عين $PGCD(63,60)$

5). بين ان $(a^{63}-1)-(a^{60}-1)a^3=a^3-1$

6). برهن ان $PGCD(a^{63}-1;a^{60}-1)=a^3-1$

7). استنتج $PGCD(2^{63}-1;2^{60}-1)$

الحل

1). xعدد طبيعي برهن انه من اجل $k \in \mathbb{N}^*$ بالنشر نجد

$$x+x^2....x^{k-1}+x^k-1-x-x^2.....-x^{k-2}-x^{k-1}=x^k-1$$

2). $a.n.d$ اعداد طبيعية غير معدومة و d يقسم n برهن انه مهما كان a فان

$$(a^d-1)|(a^n-1)$$

3). استنتاج ان $2^{2010}-1$ يقبل القسمة على 7 ثم على 63 ثم على 9

لدينا $2^{2010}-1=(2^3)^{670}-1$

4). عين $PGCD(63,60)$

5). بين ان $(a^{63}-1)-(a^{60}-1)a^3=a^3-1$

6). برهن ان $PGCD(a^{63}-1;a^{60}-1)=a^3-1$

7). استنتج $PGCD(2^{63}-1;2^{60}-1)$

- يمكن اقتراح أنشطة من النوع:

إيجاد الأعداد الصحيحة a و b إذا أعطي $PGCD(a;b)$ و علاقة بين a و b.

- يمكن اقتراح مشكلات من الواقع مثل تبليط أرضية مستطيلة الشكل ، رصف علب (متوازي مستطيلات) في صندوق(متوازي مستطيلات) ذو أبعاد معلومة، ...

نشاط 3:

يهدف هذا النشاط إلى توظيف المضاعف المشترك الأصغر و خواصه لحل مسائل من الواقع.

نريد تصفيف تلاميذ ثانوية في الساحة.

عندما ننشئ صفوفا ذات 45 تلميذا يبقى 44 و عندما ننشئ صفوفا ذات 50 تلميذا يبقى 49 و عندما ننشئ صفوفا ذات 75 تلميذا يتبقى 74.

أحسب N عدد تلاميذ الثانوية علما أن N محصور بين 1000 و1500 .

حـل

نعلم أن كل عدد، يوافق بترديد n، باقي قسمته على n .

إذن: $N \equiv 44[45]$ و $N \equiv 49[50]$ و $N \equiv 74[75]$

وبإضافة العدد 1 (خواص الموافقات) نحصل على:

$N+1 \equiv 0[45]$ و $N+1 \equiv 0[50]$ و $N+1 \equiv 0[75]$

وهذا يعني أن العدد $N+1$ يقبل القسمة على كل من الأعداد 45، 50، 75 فهو مضاعف مشترك لها، وبالتالي مضاعف للمضاعف المشترك الأصغر لها.

لدينا : $PPCM(45;50;75) = 5 \times PPCM(9;10;15) = 5 \times (9 \times 2 \times 5)$

وبالتالي: $PPCM(45;50;75) = 450$ ومنه $N+1 = 450 \times k$ حيث k عدد طبيعي غير معدوم.

لكن $1000 < N < 1500$

إذن $999 < 450 \times k < 1499$

وبالتالي $\frac{999}{450} < k < \frac{1499}{450}$

فنجد $k \in]2,22;3,332[$ و منه $k = 3$

وبذلك نحصل على $N = 450 \times 3 - 1$ أي $N = 1349$

المؤسســـــــة:		المستـــــــوى:	الثالثة رياضيات
السنة الدراسية:		ميـــدان التعلم:	الاعداد والحساب
التاريـــــــخ:		الوحدة التعلمية:	قابلية القسمة في Z
توقيت الحصة :		موضوع الحصة :	توظيف مشكلات من الواقع

المكتسبات المستهدفة: حل مشكلات بتوظيف $PGCD$.

الأنشطة المقترحة وطبيعتها	الإنجاز (سـير الحصة)	التعليمات والتوجيهات
	حل مشكلات 1). $k\in\mathbb{N}^*$ عدد طبيعي برهن انه من اجل x $(x-1)(1+x+x^2....x^{k-2}+x^{k-1})=x^k-1$ 2). $a.n.d$ اعداد طبيعية غير معدومة و d يقسم n برهن انه مهما كان a فان $(a^d-1)\|(a^n-1)$ 3). استنتج ان $2^{2010}-1$ يقبل القسمة على 7 ثم على 63 ثم على 9 4). عين $PGCD(63,60)$ 5). بين ان $(a^{63}-1)-(a^{60}-1)a^3=a^3-1$ 6). برهن ان $PGCD(a^{63}-1;a^{60}-1)=a^3-1$ 7). استنتج $PGCD(2^{63}-1;2^{60}-1)$ **الحل** 1). $k\in\mathbb{N}^*$ عدد طبيعي برهن انه من اجل x بالنشر نجد $x+x^2....x^{k-1}+x^k-1-x-x^2.....-x^{k-2}-x^{k-1}=x^k-1$ 2). $a.n.d$ اعداد طبيعية غير معدومة و d يقسم n برهن انه مهما كان a فان $(a^d-1)\|(a^n-1)$ 3). استنتاج ان $2^{2010}-1$ يقبل القسمة على 7 ثم على 63 ثم على 9 لدينا $2^{2010}-1=(2^3)^{670}-1$ 4). عين $PGCD(63,60)$ 5). بين ان $(a^{63}-1)-(a^{60}-1)a^3=a^3-1$ 6). برهن ان $PGCD(a^{63}-1;a^{60}-1)=a^3-1$ 7). استنتج $PGCD(2^{63}-1;2^{60}-1)$	- يمكن اقتراح أنشطة من النوع: إيجاد الأعداد الصحيحة a و b إذا أعطي $PGCD(a;b)$ و علاقة بين a و b. - يمكن اقتراح مشكلات من الواقع مثل تبليط أرضية مستطيلة الشكل ، رصف علب (متوازي مستطيلات) في صندوق(متوازي مستطيلات) ذو أبعاد معلومة، ...

نشاط:

يهدف هذا النشاط إلى توظيف المضاعف المشترك الأصغر و خواصه لحل مسائل من الواقع.

نريد تصفيف تلاميذ ثانوية في الساحة.

عندما ننشئ صفوفا ذات 45 تلميذا يبقى 44 و عندما ننشئ صفوفا ذات 50 تلميذا يبقى 49 و عندما ننشئ صفوفا ذات 75 تلميذا يتبقى 74.

أحسب N عدد تلاميذ الثانوية علما أن N محصور بين 1000 و1500 .

حل

نعلم أن كل عدد، يوافق بترديد n ، باقي قسمته على n .

إذن: $N \equiv 44[45]$ و $N \equiv 49[50]$ و $N \equiv 74[75]$

وبإضافة العدد 1 (خواص الموافقات) نحصل على:

$N+1 \equiv 0[45]$ و $N+1 \equiv 0[50]$ و $N+1 \equiv 0[75]$

وهذا يعني أن العدد $N+1$ يقبل القسمة على كل من الأعداد 45، 50، 75 فهو مضاعف مشترك لها،

وبالتالي مضاعف للمضاعف المشترك الأصغر لها.

لدينا : $PPCM(45;50;75) = 5 \times PPCM(9;10;15) = 5 \times (9 \times 2 \times 5)$

وبالتالي: $PPCM(45;50;75) = 450$ ومنه $N+1 = 450 \times k$ حيث k عدد طبيعي غير معدوم.

لكن $1000 < N < 1500$

إذن $999 < 450 \times k < 1499$

وبالتالي $\frac{999}{450} < k < \frac{1499}{450}$

فنجد $k \in]2,22;3,332[$ و منه $k = 3$

وبذلك نحصل على $N = 450 \times 3 - 1$ أي $N = 1349$