نهائي رياضيات وتقني

2015 الموافقات في Z

المحور الثالث

الكفاءة المستهدفة

- معرفة واستعمال خواص الموافقات في $\mathbb{Z}$.
- نشر عدد طبيعي وفق أساس .
- الانتقال من نظام أساسه α إلى نظام أساسه β.

المكتسبات القبلية

- القسمة الاقليدية
- الاعداد الاولية
- حل معادلات

يعتبر ميدان الحساب من أكثر حقول الرياضيات خصوبة لكثرة تطبيقاته وتنوعها في شتى ميادين الحياة. فهو ميدان "مواده الأولية" بسيطة وسهلة المنال؛ تقود إلى استدلالات ضرورية لتكوين الفكر ومثيرة للفضول والذكاء. وهو موضوع مفضل للتدريب على الخوارزميات والدقة و الوضوح في الاستدلال الذي يستدعي صرامة وذكاء متميزين.

ســـــــــــــير الدرس	التوقيت
نشاط	
1: الموافقات تعاريف وخواص	2 سا
2: حل معادلات من الشكل ax+b=c	1 سا
3: التعداد	2 سا
4: نشر عدد طبيعي وفق أساس .	2 سا
5: الانتقال من نظام أساسه α إلى نظام أساسه β.	

وثائق التحضير	الوسائل البيداغوجية	نقد ذاتي
• دليل الأستاذ • الكتاب المدرسي • المنهاج • الوثيقة المرافقة	• السبورة •	

المؤسســــــــة:		المستـــــــــوى:	الثالثة رياضيات
السنة الدراسية:		ميــدان التعلم:	الاعداد والحساب
التاريــــــــــخ:		الوحدة التعلمية:	الموافقات في Z
توقيت الحـصة :		موضوع الحصة :	الموافقات في $\mathbb{Z}$, تعريف وخواص

المكتسبات المستهدفة: معرفة واستعمال خواص الموافقات في $\mathbb{Z}$.

الأنشطة المقترحة وطبيعتها	الإنجاز (ســير الحصة)	التعليمات والتوجيهات
نشاط1: n عدد طبيعي غير معدوم. a و b عددان صحيحان. بين أنه إذا كان لـ a و b نفس باقي القسمة على n فإن a - b مضاعف لـ n.(حل: أنظر)	**1. النشاط** **1.** عين باقي قسمة كل من العددين 660 و 366 على 7 . ماذا تلاحظ ؟ نقول عن العددين 660 و 366 أنهما متوافقان بترديد 7 و نكتب $660 \equiv 366[7]$. • هل العددان 153 و 2008 متوافقان بترديد 5 ؟ • هل العددان 274 و 69 متوافقان بترديد 3 ؟ • بين أن العددين $a = 234$ و $b = 146$ متوافقان بترديد $n = 11$. ما هو باقي قسمة $a - b$ على n ؟ • بين أن العددين $a = 174$ و $b = 109$ متوافقان بترديد $n = 13$. ما هو باقي قسمة $a - b$ على n ؟ ضع تخمينا. **2. الحــل** **تمرين تمهيدي:** **1.أوجد باقي قسمة العدد 27 على 5 وباقي قسمة العدد 92 على 5 .ماذا تلاحظ؟** **2.هل العدد (27−92) من مضاعفات العدد 5 ؟** **الحل:** **1. باقي قسمة العدد 27 على 5 هو 2 وباقي قسمة العدد 92 على 5 هو 2 .** **2...65=27−92 اذا العدد (27−92) من مضاعفات العدد 5**	تبرهن الخواص المتعلقة بتلاؤم الموافقة مع العمليتين + و ×. تقترح أنشطة متنوعة مثل: إيجاد باق قسمة، حيث يمكن إبراز محدودية الحاسبة. حل معادلات من الشكل: $ax + by = c$ في $\mathbb{Z}$. تقترح أنشطة متنوعة حول قابلية القسمة توظف فيها الموافقات.

1/الموافقات في $\mathbb{Z}$

1.1 تعريف

n عدد طبيعي غير معدوم. القول أن عددين صحيحين a و b متوافقان بترديد n يعني أن للعددين a و b نفس الباقي في القسمة الإقليدية على n. نرمز $a \equiv b \ n$ أو $a \equiv b \ n$ و نقرأ a يوافق b بترديد n.

أمثلة:

$27 \equiv 92 \ 5$ ، $12 \equiv 34 \ 11$ ، $24 \equiv 3 \ 7$ ، $-20 \equiv 1 \ 7$ ، $-59 \equiv -3 \ 8$.

ملاحظة: من أجل كل عدد صحيح x ، $x \equiv 0 \ 1$.

مبرهنة

a و b عددان صحيحان و n عدد طبيعي غير معدوم. $a \equiv b \ n$ يعني ان $a-b$ مضاعف للعدد n.

البرهان: نفرض أن a و b لهما نفس الباقي r في القسمة الإقليدية على n.

و منه نضع $a = nq + r$ و $b = nq' + r$ حيث q و q' عددين صحيحين و $0 \le r < n$.

و منه

$$a - b = nq + r - nq' - r$$
$$= n \ q - q'$$

بما أن $q - q'$ عدد صحيح فإن $a-b$ مضاعف لـ n.

عكسيا : نفرض $a-b$ مضاعف لـ n. يوجد عدد صحيح k حيث أن $a - b = kn$.

ليكن r باقي قسمة b على n.

لدينا $b = nq + r$. حيث q عدد صحيح و $0 \le r < n$.

و منه $a = b + kn = nq + r + kn = \ q + k \ n + r$.

بما أن $q + k$ عدد صحيح و $0 \le r < n$ فإن r هو باقي القسمة الإقليدية للعدد a على n.

ومنه a و b لهما نفس الباقي في القسمة الإقليدية على n.

مثال: $27 \equiv 92 \ 5$ ومنه $92 - 27 = 65$ اي ان 65 مضاعف ل 5

خاصية1: n عدد طبيعي غير معدوم يختلف عن 1 $n \ge 2$.

كل عدد صحيح a يوافق، بترديد n، باقي قسمته على n. ونكتب $a \equiv a \ n$

البرهان: a عدد صحيح و r باقي قسمته على n.

نعلم أن $a = nq + r$ حيث q عدد صحيح و $0 \le r < n$. و منه $a - r = nq$.

و بالتالي $a - r$ مضاعف لِـ n.

كذلك $a - a = 0 \times n$ ومنه $a - a$ مضاعف للعدد n

ملاحظة:

نقول أن r هو الباقي إلا إذا كان $0 \le r < n$. فمثلا $16 \equiv 6 \ 5$ و 6 ليس باقي قسمة 16 على 5 لأن $6 \ge 5$. أما الباقي فهو 1 لأن $16 \equiv 1 \ 5$ و $0 \le 1 < 5$.

تمرين: من بين الموافقات الآتية أذكر الصحيحة و الخاطئة:

1) $26 \equiv 11 \ 5$ ؛ 2) $-32 \equiv 18 \ 10$ ؛ 3) $478 \equiv 32 \ 5$ ؛ 4) $58 \equiv -5 \ 7$

5) $63^2 \equiv 14 \ 5$ ؛ 6) $144 \equiv 11 \ 19$ ؛ 7) $131^2 \equiv 25 \ 12$ ؛ 8) $48^3 \equiv 36 \ 7$

طريقة:

للبرهان على أن $a \equiv b \ n$ يمكن البرهان على أن $a-b$ مضاعف لِـ n أو البرهان على أن لِـ a و b نفس الباقي في القسمة الإقليدية على n.

الحل:

1) $15 = 26 - 11$ و $15 = 3\times 5$. إذن $26 \equiv 11\ 5$ صحيحة.

2) $-50 = -32 - 18$ و $-5 \times 10 = -50$. إذن $-32 \equiv 18\ 10$ صحيحة.

3) $446 = 478 - 32$ و $446 = 89\times 5 + 1$. إذن $478 \equiv 32\ 5$ خاطئةنكتب $478 \not\equiv 32\ [5$.

4) $63 = 58 + 5$ و $63 = 9\times 7$. إذن $58 \equiv -5\ 7$ صحيحة.

5) $63^2 = 3969$. باقي قسمة 63^2 على 5 هو إذن 4 وبما أن باقي قسمة العدد 14 على 5 هو كذلك 4 فإن $63^2 \equiv 14\ 5$ صحيحة.

6) $144 = 19\times 7 + 11$ و بما أن العدد 144 يوافق بترديد 19 باقي قسمته على 19 نستنتج أن $144 \equiv 11\ 19$ صحيحة.

7) $131^2 = 1430\times 12 + 1$ و $25 = 2\times 12 + 1$ تحصلنا على نفس الباقي في القسمة على 12 إذن $131^2 \equiv 25\ 12$ صحيحة.

8) $48^3 = 15799\times 7 + 6$ و $36 = 5\times 7 + 1$ لم نحصل على نفس الباقي في القسمة على 7 إذن $48^3 \equiv 36\ 7$ خاطئة. و نكتب $48^3 \not\equiv 36\ [7$.

تمرين

عين بواقي قسمة العدد 3^n على 7 من اجل $n : 0.1.2.3.4.5.6.7.8$ ـماذا تستنتج

تمرين

برر صحة العبارات التالية :

أ. $45 \equiv 3[7]$. ب. $152 \equiv 2[3]$.

جـ. $29 \equiv -1[6]$. د. $137 \equiv -3[5]$.

و. $-13 \equiv 2[5]$. هـ. $-17 \equiv -7[10]$

تمرين

n عدد طبيعي أكبر من أو يساوي 2 .

في كل حالة من الحالات التالية ، عين قيم العدد n التي تحقق الموافقة المقترحة .

أ. $46 \equiv 0[n]$ ؛

ب. $10 \equiv 1[n]$ ؛

جـ. $27 \equiv 5[n]$.

خواص:

a ، b ، c و d أعداد صحيحة n عدد طبيعي غير معدوم

1. $a \equiv a\ n$
2. اذا كان $a \equiv b\ n$ فان $b \equiv a\ n$.
3. اذا كان $a \equiv b\ n$ و $b \equiv c\ n$ فان. $a \equiv c\ n$
4. اذا كان $a \equiv b\ n$ و $c \equiv d\ n$ فان $a + c \equiv b + d\ n$
5. اذا كان $a \equiv b\ n$ و $c \equiv d\ n$ فان $ac \equiv bd\ n$
6. p عدد طبيعي غير معدوم اذا كان $a \equiv b\ n$ فان

الخاصية1:

n عدد طبيعي غير معدوم يختلف عن 1 $n \geq 2$.

كل عدد صحيح a يوافق، بترديد n، باقي قسمته على n. ونكتب $a \equiv a\ n$

البرهان:

a عدد صحيح و r باقي قسمته على n.

نعلم أن $a=nq+r$ حيث q عدد صحيح و $0\le r<n$. و منه $a-r=nq$.

و بالتالي $a-r$ مضاعف لِ n.

كذلك $a-a=0\times n$ ومنه $a-a$ مضاعف للعدد

الخاصية2:

a ، b عددان صحيحان n عدد طبيعي غير معدوم

اذا كان $a\equiv b\ [n]$ فان $b\equiv a\ [n]$

البرهان:

اذا كان ل a و b نفس الباقي في القسمة الاقليدية على n فان للعدد b و a نفس الباقي في القسمة الاقليدية على n.

الخاصية3 (خاصية التعدي) :

البرهان: a ، b و c أعداد صحيحة حيث ($a\equiv b\ [n]$ و $b\equiv c\ [n]$).

($a\equiv b\ [n]$ و $b\equiv c\ [n]$) يعني ($a-b=kn$ و $b-c=k'n$)(k و k' عددان صحيحان)

و منه و بالجمع نحصل على $a-c=(k+k')n$. بما أن $k+k'$ عدد صحيح فإن $a\equiv c\ [n]$.

الخاصية4 (خاصية التلاؤم مع الجمع):

البرهان: a ، b ، c و d أعداد صحيحة حيث ($a\equiv b\ [n]$ و $c\equiv d\ [n]$).

($a\equiv b\ [n]$ و $c\equiv d\ [n]$) يعني ($a-b=kn$ و $c-d=k'n$)(k و k' عددان صحيحان)

ومنه و بالجمع نحصل على $(a+c)-(b+d)=(k+k')n$. بما أن $k+k'$ عدد صحيح فإن

$a+c\equiv b+d\ [n]$.

الخاصية5 (خاصية التلاؤم مع الضرب) :

البرهان: a ، b ، c و d أعداد صحيحة حيث أن($a\equiv b\ [n]$ و $c\equiv d\ [n]$).

($a\equiv b\ [n]$ و $c\equiv d\ [n]$) يعني ($a-b=kn$ و $c-d=k'n$)(k و k' عددان صحيحان)

لدينا

$$\begin{aligned} ac-bd &= ac-ad+ad-bd=a(c-d)+d(a-b) \\ &= ak'n+dkn=(ak'+dk)n \end{aligned}$$

بما أن $ak'+dk$ عدد صحيح فإن $ac\equiv bd\ [n]$.

تمرين1: عين باقي قسمة -5817 على 251.

طريقة: لإيجاد باقي قسمة عدد صحيح سالب a على عدد طبيعي غير معدوم n نبحث عن b باقي قسمة $-a$

على n ثم نضرب الطرفين في -1 ثم نضيف الترديد إلى $-b$.

الحل:

بقسمة العدد 5817 على 251 نحصل على $5817\equiv 44\ [251]$.

نضرب الطرفين في -1 نحصل على $-5817\equiv -44\ [251]$ (الخاصية 7).

نعلم أن $251\equiv 0\ [251]$ و منه $251\equiv 0\ [251]$ (الخاصية 3).

($-5817\equiv -44\ [251]$ و $251\equiv 0\ [251]$) إذن من الخاصية 5 نحصل على

$-5817\equiv 207\ [251]$.

إذن باقي قسمة -5817 على 251 هو 207 لأن $0\le 207<251$.

تمرين 2: 1) عين المجموعة L مجموعة الأعداد الصحيحة x حيث أن $x+4\equiv 2\ [7]$.

2) عين المجموعة L' مجموعة الأعداد الصحيحة x حيث أن $5x\equiv 3\ [7]$.

طريقة: في السؤال الثاني ندرس كل البواقي الممكن الحصول عليها في القسمة على 7

الحل:

1) في $x+4\equiv 2\ [7]$ نطبق الخاصية 5 و منه $x+4-4\equiv 2-4\ [7]$ و بالتالي

$x\equiv -2\ [7]$

وبما أن $-2\equiv 5\ [7]$ فإن $x\equiv 5\ [7]$ (الخاصية 4).

عكسيا فأن $7k+5+4\equiv 2\ [7]$ لأن $7\equiv 0\ [7]$ و $9\equiv 2\ [7]$.

إذن المجموعة L هي مجموعة الأعداد الصحيحة من الشكل $7k+5$ حيث k عدد صحيح

لأن $7\equiv 0\ [7]$ و $9\equiv 2\ [7]$.

إذن المجموعة L هي مجموعة الأعداد الصحيحة من الشكل $7k+5$ حيث k عدد صحيح

2) x عدد صحيح يمكن أن يوافق كل بواقي القسمة على 7 ، ثم نطبق الخاصية 7.

نلخص النتائج في جدول .

$x\equiv$	0	1	2	3	4	5	6
$5x\equiv$	0	5	3	1	6	4	2

عكسيا فأن $5(7k+2)\equiv 3\ [7]$ لأن $35\equiv 0\ [7]$ و $10\equiv 3\ [7]$.

إذن المجموعة L' هي مجموعة الأعداد الصحيحة من الشكل $7k+2$ حيث k عدد صحيح .

تمرين 3: عين تبعا لقيم العدد الطبيعي n باقي قسمة 3^n على 5. استنتج باقي قسمة 3^{4039} على 5.

طريقة: في مثل هذه التمارين نحاول إيجاد عدد طبيعي $k\neq 0$ حيث $a^k\equiv 1\ [p]$ (هذا يستحيل في بعض الحالات

الحل:

نعين بواقي القوى المتتابعة للعدد 3^n على 5 .

$3^0\equiv 1\ [5]$ ، $3^1\equiv 3\ [5]$ ، $3^2\equiv 4\ [5]$ ، $3^3\equiv 2\ [5]$ ، $3^4\equiv 1\ [5]$.

$3^4\equiv 1\ [5]$ من الخاصية 8 $3^{4k}\equiv 1^k\ [5]$ أي $3^{4k}\equiv 1\ [5]$ ، k عدد طبيعي .

بتطبيق الخاصية 4 ، $3^{4k+1}\equiv 3\ [5]$ ($3^{4k}\equiv 1\ [5]$ و $3^1\equiv 3\ [5]$) ، $3^{4k+2}\equiv 4\ [5]$ و

$3^{4k+3}\equiv 2\ [5]$.

$4039=4\times 1009+3$ من الشكل $4k+3$ إذن $3^{4039}\equiv 2\ [5]$

تمرين 1: لتكن الأعداد الصحيحة التالية : $a=255$ ، $b=837$ و $c=3691$.

1. عين باقي قسمة الأعداد a ، b و c على العدد 11 .

2. باستعمال الموافقات عين باقي قسمة كل من $a+b$ ، $a\times c$ ، $a+b+c$ ، a^2 ، $a\times b\times c$.

الحل:

1. باستعمال حاسبة نجد أن بواقي الأعداد a ، b و c على العدد11 هي 2 ، 1 ، 6 على الترتيب.

2. لدينا: $\begin{cases} a\equiv 2\ [11] \\ b\equiv 1\ [11] \end{cases}$ و بتطبيق خاصية الجمع نجد $a+b\equiv 3\ [11]$ و منه الباقي هو3.

لدينا $a\equiv 2\ [11]$ و $c\equiv 6\ [11]$. بتطبيق خاصية الضرب نجد $ac\equiv 12\ [11]$ و بما أن $12\equiv 1\ [11]$

فإنه بالتعدي $ac\equiv 1\ [11]$ و منه الباقي هو1.

لدينا: $\begin{cases} a\equiv 2\ [11] \\ b\equiv 1\ [11] \\ c\equiv 6\ [11] \end{cases}$ و بتطبيق خاصية الجمع نجد $a+b+c\equiv 9\ [11]$ و الباقي هو 9.

لدينا: $a \equiv 2\ 11$ و بتطبيق الخاصية 6 نجد $a^2 \equiv 2^2\ 11$ أي $a^2 \equiv 4\ 11$ و الباقي هو 4.

$\begin{cases} a \equiv 2\ 11 \\ b \equiv 1\ 11 \\ c \equiv 6\ 11 \end{cases}$ و بتطبيق خاصية الضرب نجد $a \times b \times c \equiv 1 \times 2 \times 6\ 11$ أي

$a \times b \times c \equiv 12\ 11$

و $12 \equiv 1\ 11$ و بتطبيق خاصية التعدي نجد $a \times b \times c \equiv 1\ 11$ و الباقي هو 1.

تمرين 2: a و b عددان صحيحان حيث $a \equiv 3\ [5]$ و $b \equiv 4\ [5]$.

1. بين أن العدد $2a+b$ يقبل القسمة على 5.
2. عين باقي قسمة العدد $2a^2+b^2$ على 5.
3. تحقق أن $b \equiv -1\ [5]$. استنتج باقي قسمة b^{2007} و b^{1428} على 5.

الحل:

1. لدينا $\begin{cases} a \equiv 3\ \ 5 \\ b \equiv 4\ \ 5 \end{cases}$ و منه $\begin{cases} 2a \equiv 6\ \ 5 \\ b \equiv 4\ \ 5 \end{cases}$ أي $\begin{cases} 2a \equiv 1\ \ 5 \\ b \equiv 4\ \ 5 \end{cases}$ لأن $6 \equiv 1\ [5]$. بتطبيق خاصية الجمع نحصل على: $2a+b \equiv 5\ [5]$ و بما أن $5 \equiv 0\ [5]$ فإن $2a+b \equiv 0\ [5]$. باقي قسمة $2a+b$ على 5 هو 0. نستنتج هكذا أن العدد $2a+b$ يقبل القسمة على 5.

2. لدينا $\begin{cases} a \equiv 3\ 5 \\ b \equiv 4\ 5 \end{cases}$ و منه $\begin{cases} 2a^2 \equiv 2\times 9\ \ [5] \\ b^2 \equiv 16\ \ [5] \end{cases}$ أي $\begin{cases} 2a^2 \equiv 3\ [5] \\ b^2 \equiv 1\ [5] \end{cases}$ لأن $18 \equiv 3\ [5]$ و $16 \equiv 1\ [5]$

بتطبيق خاصية الجمع نحصل على: $2a^2+b^2 \equiv 4\ [5]$. باقي قسمة العدد $2a^2+b^2$ على 5 هو إذن 4.

3. من الواضح أن $4 \equiv -1\ [5]$ و منه باستعمال خاصية التعدي نحصل على $b \equiv -1\ [5]$.

بتطبيق الخاصية6 نحصل على $b^{2007} \equiv (-1)^{2007}\ [5]$ و $b^{1428} \equiv 1^{1428}\ [5]$ أي $b^{2007} \equiv -1[5]$ و $b^{1428} \equiv 1[5]$.

و بما أن $-1 \equiv 4\ [5]$ فإن $b^{2007} \equiv 4[5]$. نستنتج أن باقي قسمة b^{2007} على 5 هو 4 و باقي قسمة b^{1428} على 5 هو 1.

تمرين: n عدد صحيح يحقق $n \equiv 140[12]$ ، عين باقي قسمة العدد n على 12 ..

تمرين : نضع $a \equiv 30757[10]$ ؛ $b \equiv 15163[10]$ و $c \equiv 12924[10]$.

1) عيّن باقي قسمة الأعداد a ، b و c على 10 .

2) استنتج باقي القسمة الأقليدية على 10 لكل من الأعداد المقترحة أدناه .

أ . $a+b+c$ ؛ ب . $a-b+c$ ؛ جـ . $a+b-c$ ؛ د . abc ؛ هـ . $ab+ac+bc$ ؛ و . $a^2+b^2+c^2$.

تطبيق عام

1) أوجد العدد الصحيح x في كل حالة :

$2x-1 \equiv 3[8]$ $\quad 5x \equiv 15[17]$ $\quad 7x+23 \equiv 0[11]$ $\quad x \equiv 1[3]$ $\quad x \equiv 2[5]$

$x^2-3x+1 \equiv 0[5]$ $\quad 6x \equiv 8[10]$ $\quad -23 \equiv x[5]$ $\quad 4x \equiv 14[9]$ 4 س ≡ 14 [9]

2) : باستعمال خواص الموافقة بترديد أثبت مايلي :

من أجل كل عدد طبيعي n $\quad 10^n - 1 \equiv 0[9]$

برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n العدد $3n^3+6n$ مضاعف للعدد 9 ثم استنتج أنه إذا كان a, b, c ثلاثة أعداد طبيعية متتابعة فإن : $a^3+b^3+c^3$ يقبل القسمة على 9

3) : أوجد باقي قسمة الإقليدية للعدد الطبيعي $38^{100} \times 77^{53}$ على 3

4) : كيف يمكن أن نختار العدد الطبيعي n لكي يقبل العدد 7^n+1 القسمة على 8

5) : أدرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 3^n على 5 ثم استنتج بواقي قسمة الأعداد

3^{10}, 3^{2005}, 3^{2008} على 5

ما هو باقي قسمة كل من $18^{320}, 43^{6783}$ على 5 ثم استنتج أن المجموع يقبل القسمة على 5

6) أدرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 7^n على 8

عين العدد الطبيعي n بحيث : $7^n \times n + 4n + 1 \equiv 0[8]$

7) : n عدد طبيعي نضع : $S_n = 1+2+2^2+....+2^n$ هل من أجل كل عدد طبيعي n ؟ : $S_n^3 \equiv 0[7]$

تمرين رقم 90 ص 83

1) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الأقليدية للعدد 3^n على 13 .

2) عيّن قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد $4\left(3^{n+1}-1\right)$ مضاعفا للعدد 13 .

تمرين رقم 91 ص 83

عيّن ، حسب قيم العدد الطبيعي n ، باقي القسمة الأقليدية للعدد $15\left(16^{n+1}-1\right)$ على 7 .

تمرين رقم 92 ص 83

1) أ . أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الأقليدية للعدد 3^n على 10 .

ب . استنتج باقي القسمة الأقليدية على 10 للعدد $\left(63\times 9^{2001} - 7^{1422}\right)$.

2) أ . برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون :

$3n\times 9^n + 7^{2n+1} \equiv (n-1)3^{2n+1}[10]$.

ب . عيّن قيم العدد الطبيعي ن حتى يكون :

$3n\times 9^n + 7^{2n+1} \equiv 0[10]$

تمرين1: عين باقي قسمة -5817 على 251 .

طريقة: لإيجاد باقي قسمة عدد صحيح سالب a على عدد طبيعي غير معدوم n نبحث عن b باقي قسمة $-a$

على n ثم نضرب الطرفين في -1 ثم نضيف الترديد إلى $-b$.

الحل:

بقسمة العدد 5817 على 251 نحصل على $5817 \equiv 44\ 251$.

نضرب الطرفين في -1 نحصل على $-5817 \equiv -44\ 251$ (الخاصية 7) .

نعلم أن $251 \equiv 0\ 251$ و منه $251 \equiv 0\ 251$ (الخاصية 3) .

($-5817 \equiv -44\ 251$ و $251 \equiv 0\ 251$) إذن من الخاصية 5 نحصل على

$-5817 \equiv 207\ 251$.

إذن باقي قسمة -5817 على 251 هو 207 لأن $0 \le 207 < 251$.

تمرين 2: 1) عين المجموعة L مجموعة الأعداد الصحيحة x حيث أن $x+4 \equiv 2\ 7$.

2) عين المجموعة L' مجموعة الأعداد الصحيحة x حيث أن $5x \equiv 3\ 7$.

طريقة: في السؤال الثاني ندرس كل البواقي الممكن الحصول عليها في القسمة على7

الحل

1) في $x+4 \equiv 2\ 7$ نطبق الخاصية 5 و منه $x+4-4 \equiv 2-4\ 7$ و بالتالي

$x \equiv -2\ 7$

وبما أن $-2 \equiv 5\ 7$ فإن $x \equiv 5\ 7$ (الخاصية 4) .

عكسيا فأن $7k+5\ +4 \equiv 2\ 7$ لأن $7 \equiv 0\ 7$ و $9 \equiv 2\ 7$.

إذن المجموعة L هي مجموعة الأعداد الصحيحة من الشكل $7k+5$ حيث k عدد صحيح

2) x عدد صحيح يمكن أن يوافق كل بواقي القسمة على 7 ، ثم نطبق الخاصية 7 .

نلخص النتائج في جدول

$x\equiv$	0	1	2	3	4	5	6
$5x\equiv$	0	5	3	1	6	4	2

عكسيا فأن $7k+2 \equiv 3\ 7$ لأن $35 \equiv 0\ 7$ و $10 \equiv 3\ 7$.

إذن المجموعة L' هي مجموعة الأعداد الصحيحة من الشكل $7k+2$ حيث k عدد صحيح.

تمرين 3: عين تبعا لقيم العدد الطبيعي n باقي قسمة 3^n على 5. استنتج باقي قسمة 3^{4039} على 5.

طريقة: في مثل هذه التمارين نحاول إيجاد عدد طبيعي $k \neq 0$ حيث $a^k \equiv 1\ p$ (هذا يستحيل في بعض الحالات

الحل:

نعين بواقي القوى المتتابعة للعدد 3^n على 5.

$3^0 \equiv 1\ 5$ ، $3^1 \equiv 3\ 5$ ، $3^2 \equiv 4\ 5$ ، $3^3 \equiv 2\ 5$ ، $3^4 \equiv 1\ 5$.

$3^4 \equiv 1\ 5$ من الخاصية 8 $3^{4k} \equiv 1^k\ 5$ أي $3^{4k} \equiv 1\ 5$ ، k عدد طبيعي.

بتطبيق الخاصية 4 ، $3^{4k+1} \equiv 3\ 5$ ($3^{4k} \equiv 1\ 5$ و $3^1 \equiv 3\ 5$) ، $3^{4k+2} \equiv 4\ 5$ و $3^{4k+3} \equiv 2\ 5$.

$4039 = 4\times1009+3$ من الشكل $4k+3$ إذن $3^{4039} \equiv 2\ 5$

تمرين 2 ما هو باقي القسمة الاقليدية على 7 لكل من الأعداد الآتية :

2018^{645} , $(19)^{522}\times(23)^{987}$, $863^{1800}\times8030^{1260}$

الحل:

تعيين بواقي القسمة على 7:

- لدينا $2018 \equiv 2[7]$ و عليه : $2018^{645} \equiv 2[7]$: إذن $2018^{645} \equiv \left(2^3\right)^{216}[7]$ أي $(2018)^{645} \equiv 8^{216}[7]$

لكن : $8 \equiv 1[7]$ و عليه : $(2018)^{645} \equiv 1[7]$

- لدينا $19 \equiv (-2)[7]$ و عليه : $(19)^{522} \equiv (-2)^{522}[7]$ أي أن $(19)^{522} \equiv 8^{174}[7]$ لكن : $8 \equiv 1[7]$

و عليه : $(19)^{522} \equiv 1[7]$ ...(1)

و لدينا : $23 \equiv 2[7]$ و عليه : $(23)^{987} \equiv 2^{987}[7]$ ومنه : $(23)^{987} \equiv \left(2^3\right)^{329}[7]$ و عليه :

$(23)^{987} \equiv 8^{329}[7]$ لكن : $8 \equiv 1[7]$ و عليه : $(23)^{987} \equiv 1[7]$ ...(2)

من (1) و (2) : $(19)^{522}\times(23)^{987} \equiv 1[7]$

- لدينا : $8030 \equiv 1[7]$ و منه : $(8030)^{1260} \equiv 1[7]$

و $863 \equiv 2[7]$ و منه : $(863)^{1800} \equiv 2^{1800}[7]$ إذن : $(863)^{1800} \equiv \left(2^3\right)^{600}[7]$ أي :

$(863)^{1800} \equiv 8^{600}[7]$ و عليه : $(863)^{1800} \equiv 1[7]$ لأن : $8 \equiv 1[7]$

و بالتالي: $(863)^{1800}\times(8030)^{1260} \equiv 1[7]$

تمرين 3 أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون : $10^{3n} \equiv 1[37]$

ثم استنتج باقي قسمة العدد : $10^{10}+10^{20}+10^{30}$ على 37.

الحل:

– إثبات أن $10^{3n} \equiv 1[37]$:

لدينا : $10^{3n} \equiv \left(10^3\right)^n[37]$ أي : $10^{3n} \equiv (1000)^n[37]$

لكن : $1000 \equiv 1[37]$ و منه : $10^{3n} \equiv 1^n[37]$

أي : $10^{3n} \equiv 1[37]$

استنتاج باقي قسمة $10^{10}+10^{20}+10^{30}$ على 37 $10^{10}+10^{20}+10^{30}=10^{10}\left(1+10^{2}+10^{3}\right)$

لدينا : $10^{3}\equiv 1[37]$ و $10^{10}\equiv 10^{3\times 3+1}[37]$ و منه : $10^{10}\equiv 10^{3\times 3}\times 10[37]$ و عليه : $10^{10}\equiv 10[37]$

و منه : $10^{10}+10^{20}+10^{30}\equiv 10\left(1+10^{2}+1\right)[37]$ أي : $10^{10}+10^{20}+10^{30}\equiv 10\left(1+10^{3}+10\right)[37]$

و بالتالي: $10^{10}+10^{20}+10^{30}\equiv 21[37]$ لأن : $10^{3}\equiv 1[37]$

تمرين 4 برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : 1) $n^{7}\equiv n[7]$ 2) $n\left(n^{2}-1\right)\equiv 0[3]$

3) $3\times 5^{2n+1}+2^{3n+1}\equiv 0[17]$ 4) $3^{2n+2}-2^{n+1}\equiv 0[7]$

الحل:

1) نبرهن أن : $n^{7}\equiv n[7]$

- من أجل $n\equiv 0[7]$ فإن : $n^{7}\equiv 0[7]$ و عليه : $n^{7}\equiv n[7]$
- من أجل $n\equiv 1[7]$ فإن : $n^{7}\equiv 1[7]$ و عليه : $n^{7}\equiv n[7]$
- من أجل $n\equiv 2[7]$ فإن : $n^{7}\equiv 2^{7}[7]$ و عليه : $n^{7}\equiv n[7]$
- من أجل $n\equiv 3[7]$ فإن : $n^{7}\equiv 3^{7}[7]$ و عليه : $n^{7}\equiv n[7]$
- من أجل $n\equiv 4[7]$ فإن : $n^{7}\equiv 4^{7}[7]$ و عليه :

$n^{7}\equiv 16384[7]$ أي أن : $n^{7}\equiv 4[7]$ إذن : $n^{7}\equiv n[7]$

- من أجل $n\equiv 5[7]$ فإن : $n^{7}\equiv 5^{7}[7]$ و عليه : $n^{7}\equiv 78125[7]$ و منه : $n^{7}\equiv 5[7]$

و عليه : $n^{7}\equiv n[7]$

- من أجل $n\equiv 6[7]$ فإن : $n^{7}\equiv 6^{7}[7]$ و عليه : $n^{7}\equiv 279936[7]$ و منه : $n^{7}\equiv 6[7]$

و عليه : $n^{7}\equiv n[7]$ و منه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $n^{7}\equiv n[7]$

2) نبرهن أن : $n\left(n^{2}-1\right)\equiv 0[3]$:

- من أجل $n\equiv 0[3]$: $n^{2}\equiv 0[3]$ و منه : $n^{2}-1\equiv -1[3]$

و عليه : $n\left(n^{2}-1\right)\equiv 0[3]$

- من أجل $n\equiv 1[3]$: $n^{2}\equiv 1[3]$ و منه : $n^{2}-1\equiv 0[3]$ و عليه : $n\left(n^{2}-1\right)\equiv 0[3]$
- من أجل $n\equiv 2[3]$: $n^{2}\equiv 1[3]$ و منه : $n^{2}-1\equiv 0[3]$ و عليه : $n\left(n^{2}-1\right)\equiv 0[3]$

و بالتالي من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $n\left(n^{2}-1\right)\equiv 0[3]$

3) نبرهن أن : $3\times 5^{2n+1}+2^{3n+1}\equiv 0[17]$

لدينا : $2^{3n+1}=2^{3n}.2$ و عليه : $2^{3n+1}=\left(2^{3}\right)^{n}\times 2$ إذن : $2^{3n+1}=8^{n}\times 2$ و عليه :

$2^{3n+1}\equiv 2\times 8^{n}[17]$...(1) و لدينا : $3\times 5^{2n+1}=3\times 5^{2n}\times 5$ $=15\times\left(5^{2}\right)^{n}=15\times(25)^{n}$

بما أن : $15\equiv -2[17]$ و $25\equiv 8[17]$ فإن : $3\times 5^{2n+1}\equiv -2\times 8^{n}[17]$...(2)

من (1) و (2) : $3\times 5^{2n+1}+2^{3n+1}\equiv 0[17]$

4) نبرهن أن : $3^{2n+2}-2^{n+1}\equiv 0[7]$

لدينا : $3^{2n+2}=3^{2n}\times 3^{2}$ و منه : $3^{2n+2}=\left(3^{2}\right)^{n}\times 9$ إذن : $3^{2n+2}=9^{n}\times 9$ أي :

$3^{2n+2}=9^{n+1}$ لكن : $9\equiv 2[7]$ و عليه : $3^{2n+2}\equiv 2^{n+1}[7]$ و منه : $3^{2n+2}-2^{n+1}\equiv 0[7]$

تمرين 6 ادرس ، حسب قيم العدد الطبيعي n ، باقي القسمة الإقليدية لكل من العددين 5^{n} و 3^{n} على 11 ثم استنتج باقي قسمة العدد $5^{n}-3^{n}$ على 11. عين الأعداد الطبيعية n التي يكون من أجلها $5^{n}-3^{n}-16\equiv 0[11]$

الحل:

بواقي قسمة 5^n على 11:

$$5^0 \equiv 1[11]\ ;\ 5^1 \equiv 5[11]\ ;\ 5^2 \equiv 3[11]\ ;\ 5^3 \equiv 4[11]$$
$$5^4 \equiv 9[11]\ ;\ 5^5 \equiv 1[11]$$

لدينا : $5^5 \equiv 1[11]$ و عليه : $5^{5k} \equiv 1[11]$ حيث : $k \in \mathbb{N}$

و بالتالي : $5^{5k+1} \equiv 5[11]$ ، $5^{5k+2} \equiv 3[11]$ ، $5^{5k+3} \equiv 4[11]$ ، $5^{5k+4} \equiv 9[11]$.

إذن البواقي هي : 1،5،3،4،9 حسب قيم n و هي :

$5k$ ، $5k+1$ ، $5k+2$ ، $5k+3$ ، $5k+4$ على الترتيب .

- بواقي قسمة 3^n على 11:

$$3^0 \equiv 1[11]\ ;\ 3^1 \equiv 3[11]\ ;\ 3^2 \equiv 9[11]\ ;\ 3^3 \equiv 5[11]$$
$$3^4 \equiv 4[11]\ ;\ 3^5 \equiv 1[11]$$

لدينا : $3^5 \equiv 1[11]$ و عليه : $3^{5k} \equiv 1[11]$ حيث : $k \in \mathbb{N}$

و بالتالي : $3^{5k+1} \equiv 3[11]$ ، $3^{5k+2} \equiv 9[11]$ ، $5^{5k+3} \equiv 5[11]$ ، $5^{5k+4} \equiv 4[11]$. إذن البواقي هي: 1 ، 3 ، 9 ، 5 ، 4 حسب قيم n و هي: $5k$ ، $5k+1$ ، $5k+2$ ، $5k+3$ ، $5k+4$

- استنتاج باقي قسمة $5^n - 3^n$ على 11:

* من أجل $n = 5k$: $5^n - 3^n \equiv 0[11]$ * من أجل $n = 5k+1$: $5^n - 3^n \equiv 2[11]$

* من أجل $n = 5k+2$: $5^n - 3^n \equiv -6[11]$ أي: $5^n - 3^n \equiv 5[11]$

* من أجل $n = 5k+3$: $5^n - 3^n \equiv -1[11]$ و عليه : $5^n - 3^n \equiv 10[11]$

* من أجل $n = 5k+4$: $5^n - 3^n \equiv 5[11]$

- تعيين n بحيث : $5^n - 3^n - 16 \equiv 0[11]$ أي : $5^n - 3^n \equiv 16[11]$ و عليه : $5^n - 3^n \equiv 5[11]$

مما سبق : $n \equiv 5k+2$ ، $k \in \mathbb{N}$

<u>تمرين 7</u> عين قيم العدد الصحيح x في كل حالة مما يلي :

(1 $3x \equiv 4[7]$ (2 $x^2 - 3x + 4 \equiv 0[7]$ (3 $\begin{cases} x \equiv 3[5] \\ x \equiv 1[6] \end{cases}$

الحل:

(1 تعيين x بحيث : $3x \equiv 4[7]$

لدينا : $4 \equiv -3[7]$ و عليه : $3x \equiv -3[7]$ و منه $3x + 3 \equiv 0[7]$ و بالتالي : $3(x+1) \equiv 0[7]$

و منه : $x + 1 \equiv 0[7]$ لأن: 3 و 7 أوليان فيما بينهما .إذن : $x \equiv -1[7]$ أي : $x \equiv 6[7]$

و عليه : $x \equiv 7\alpha + 6$ مع $\alpha \in \mathbb{Z}$.

2)لدينا : $x^2 - 3x + 4 \equiv 0[7]$ لكن : $-3 \equiv 4[7]$ و عليه : $x^2 - 3x + 4 \equiv 0[7]$ تكافئ :

$x^2 + 4x + 4 \equiv 0[7]$ و منه : $(x+2)^2 \equiv 0[7]$ و بالتالي : $x + 2 \equiv 0[7]$

إذن : $x \equiv -2[7]$ و عليه : $x \equiv 5[7]$ إذن : $x = 7\alpha + 5$ و $\alpha \in \mathbb{Z}$.

3) لدينا : $\begin{cases} x \equiv 3[5] \ldots(1) \\ x \equiv 1[6] \ldots(2) \end{cases}$

من (1) : $x = 5\alpha + 3$ وَ $\alpha \in \mathbb{Z}$ بالتعويض في (2) نجد : $5\alpha + 3 \equiv 1[6]$ و عليه : $5\alpha \equiv -2[6]$

لكن : $5 \equiv -1[7]$ و منه : $5\alpha \equiv -\alpha[6]$ و عليه : $-\alpha \equiv -2[6]$ أي أن : $\alpha \equiv 2[6]$

و منه : $\alpha = 6\beta + 2$ و بالتالي : $x = 5(6\beta + 2) + 3$ إذن: $x = 30\beta + 13$ ، $\beta \in \mathbb{Z}$

<u>تمرين 8</u> عين قيم العدد الطبيعي n بحيث : $n^2 - 3n + 12 \equiv 0[n-2]$

الحل:

تعيين n بحيث : $n^2-3n+12\equiv 0[n-2]$

لدينا : $n^2-3n+12=n^2-2n-n+12=n(n-2)-n+2+10$

$=n(n-2)-(n-2)+10=(n-1)(n-2)+10$

لكن : $(n-1)(n-2)\equiv 0[n-2]$ و عليه : $n^2-3n+12\equiv 10[n-2]$

لكن : $n^2-3n+12\equiv 0[n-2]$ و عليه : $10\equiv 0[n-2]$

إذن : $n-2$ تقسم 10. و عليه : $n-2\in\{1\ ;\ 2\ ;\ 5\ ;\ 10\}$ إذن: $n\in\{3\ ;\ 4\ ;\ 7\ ;\ 12\}$

تمرين 9 1) ادرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n باقي القسمة لكل من 2^n و 3^n على 7.

2) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $3^{2n}-2^n\equiv 0[7]$

3) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n

فإن : $9^{2p+1}-2^{2p+1}\equiv 0[7]$

4) حدد قيم n بحيث : $3^n\equiv 2^n\ [7]$

تمرين 10 ص 59 نضع : $a\equiv 30757[10]$ ؛ $b\equiv 15163[10]$ و $c\equiv 12924[10]$.

1) بسط الموافقات المعطاة .

2) استنتج العدد المحصور بين 0 و 9 ، والتي تكون الأعداد المقترحة أدناه توافقه بالترديد 10 .

أ. $a+b+c$ ؛ ب. $a-b+c$ ؛

جـ. $a+b-c$ ؛ د. abc ؛

هـ. $ab+ac+bc$ ؛ و. $a^2+b^2+c^2$.

تمرين 11 ص 59كم كانت تشير الساعة حيث :

أ. بعد 112 الساعة أشارت الثالثة ؟

ب. قبل 153 الساعة أشارت الثالثة ؟

(مع ذكر صباحا أم مساء)

تمرين 18 ص 59 برّر أنّه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، يكون : $7254^n\equiv 0[9]$ ؛

$3532^n\equiv 0[2]$ ؛

$1785^n\equiv 0[5]$ ؛ $51502^n\equiv 0[11]$.

تمرين 19 ص 26

n عدد طبيعي ، نصع: $\alpha=(9n-1)10^n+1$. برهن أن العدد α مضاعف للعدد 9

تمرين 26 ص 59 . x عدد صحيح . أتمم الجدول التالي :

$x\equiv$	0	1	2	3	4	$[5]$
$2x\equiv$						$[5]$

ب. استنتج مجموعة قيم العدد الصحيح x حيث :

$2x\equiv 3[5]$.

تمرين 18 ص 59 من أجل كل عدد طبيعي n ، نضع r_n باقي القسمة الأقليدية للعدد 2^n على 9.

1) أتمم الجدول التالي:

n	0	1	2	3	4	5	6
r_n							

2) استنتج r_n من أجل كل عدد طبيعي n .

3) عين ، حسب قيم العدد الطبيعي n ، باقي القسمة الأقليدية للعدد 65^n على 9 .

4) استنتج باقي قسمة 65^{2011} على 9 .

المؤسســــــة:	المستـــــــوى: الثالثة رياضيات
السنة الدراسية:	ميــدان التعلم: الاعداد والحساب
التاريــــــخ:	الوحدة التعلمية: الموافقات في Z
توقيت الحصة :	موضوع الحصة : المعادلات من الشكل $ax+by=c$

المكتسبات المستهدفة: استعمال خواص الموافقات في $\mathbb{Z}$.

الأنشطة المقترحة وطبيعتها	الإنجاز (ســير الحصة)	التعليمات والتوجيهات
		حل معادلات من الشكل: $ax+by=c$ في $\mathbb{Z}$. تقترح أنشطة متنوعة حول قابلية القسمة توظف فيها الموافقات.

1. النشاط

a) نعتبر المعادلة $ax+by=c$ في $\mathbb{Z}^2$ حيث a,b,c اعداد حقيقية

بين انه اذا كان c لا يقبل القسمة على $PGCD\left(a,b\right)$ فان المعادلة لا تقبل حلول

b) نعتبر المعادلة $5x-8y=3$

1. بين ان المعادلة تقبل حلول
2. هل $\left(7,4\right)$ حل للمعادلة
3. اذا كانت $\left(x,y\right)$ حلا للمعادلة بين ان $5\left(x-7\right)\equiv 0\left[8\right]$

نقبل ان $\left(x-7\right)\equiv 0\left[8\right]$ حلا للمعادلة

2. الحـــل

a) المجهول هو $\left(x,y\right)$ حيث $PGCD\left(x,y\right)=1$ و x,y اوليان فيما بينهما

إذا كان a/b و a/c فإن $a/ax+by$ مع x ، y من $\mathbb{Z}$

وبالتالي يجب ان يكون $PGCD\ \ a,b\ \big|c$

b) المعادلة $5x-8y=3$

- المعادلة تقبل حلول يعني انه بما ان $PGCD\left(5,8\right)=1$ و $1\big|3$ فهي تقبل حلول
- $\left(7,4\right)$ حل للمعادلة يعني ان $PGCD\ \ 7,4\ \big|3$ وبمان $PGCD\left(7,4\right)=1$ فان $1\big|3$

اذن $\left(7,4\right)$ حل للمعادلة للتحقق $5\times 7-8\times 4=3$

- $\left(x,y\right)$ حلا للمعادلة لدينا $3\equiv 3\left[8\right]$ ومنه $5x-8y\equiv 3\left[8\right]$ بما ان $8y\equiv 0\left[8\right]$

فان $5x\equiv 3\left[8\right]....\left(1\right)$ ولدينا $-35\equiv 5\left[8\right]....\left(2\right)$

نستعمل خاصية التجميع بين $\left(1\right)$ و $\left(2\right)$ نجد $\left(5x-35\right)\equiv 8\left[8\right]$ أي ان $5\left(x-7\right)\equiv 0\left[8\right]$

لان $8\equiv 0\left[8\right]$

$\left(x-7\right)\equiv 0\left[8\right]$ حلا للمعادلة يعني ان $5\left(x-7\right)\equiv 0\left[8\right]$

مبرهنة

نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول $x;y$: $ax+by=c$ حيث. a ، b ، و c أعداد طبيعية . المعادلة تقبل حلول إذا وفقط إذا كان a و b أوليين فيما بينهما أو c يقبل القسمة على $PGCD\ \ a;b$.

2/حل معادلات من الشكل $ax+by=c$

1.2 دراسة مثال

نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول $(x;y)$: (1) ... $5x-8y=3$.

- تأكد أن $(7;4)$ حل للمعادلة .
- أثبت أنه إذا كان $(x;y)$ حلا للمعادلة (1) فإن $5x\equiv 3[8]$.
- عين الأعداد الصحيحة x حيث : $5x\equiv 3[8]$.
- أثبت أن كل حلول المعادلة (1) هي من الشكل $(8k+7;5k+4)$ حيث k عدد صحيح.

الحـــل

المعادلة $5x-8y=3$

المعادلة تقبل حلول يعني انه بما ان $PGCD(5,8)=1$ و $1|3$ فهي تقبل حلول

- $(7,4)$ حل للمعادلة يعني ان $PGCD(7,4)|3$ وبمان $PGCD(7,4)=1$ فان $1|3$

اذن $(7,4)$ حل للمعادلة للتحقق $5\times 7-8\times 4=3$

- (x,y) حلا للمعادلة لدينا $3\equiv 3[8]$ ومنه $5x-8y\equiv 3[8]$ بما ان $8y\equiv 0[8]$

فان $5x\equiv 3[8]....(1)$

- $5x\equiv 3[8]$.يعني ان $5x+5\equiv 0[8]$ لان $5\equiv 5[8]$ و $3\equiv 3[8]$

اي $5x+5\equiv 3+5[8]$ اذن $5x+5\equiv 0[8]$ وبالتالي $5(x+1)\equiv 0[8]$ اذن

- $x+1\equiv 0[8]$ اي $x\equiv -1[8]$ ومنه $x\equiv 7[8]$ اذن $x=8k+7$ حيث k عدد صحيح.

$(8k+7;5k+4)$ حل للمعادلة $5x-8y=3$ يعني ان $40k+35-40k-32=3$

2.2 دراسة الحالة العامة

نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول $(x;y)$: $ax+by=c$.حيث a ، b ، و c أعداد طبيعية .

- أثبت أن المعادلة تقبل حلول إذا وفقط إذا كان a و b أوليين فيما بينهما أو c يقبل القسمة على $PGCD(a;b)$.
- أثبت أنه إذا كان $(x;y)$ حلا للمعادلة فإن $ax\equiv c[b]$.
- أثبت أنه إذا كان $(x;y)$ حلا للمعادلة فإن $by\equiv c[a]$.

الحـــل

المجهول هو (x,y) حيث $PGCD(x,y)=1$

إذا كان a/b و a/c فإن $a/ax+by$ مع x ، y من $\mathbb{Z}$ ومنه $c/ax+by$

وبالتالي يجب ان يكون $PGCD(a,b)|c$

$ax+by=c$ ومنه $c\equiv c[b]$ و $ax+by\equiv c[b]$ بما ان $by\equiv 0[b]$ فان $ax\equiv c[b]$

$ax+by=c$ ومنه $c\equiv c[a]$ و $ax+by\equiv c[a]$ بما ان $ax\equiv 0[a]$ فان $by\equiv c[a]$

تطبيق .

- حل في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول $(x;y)$: $7x+12y=5$.
- حل في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول $(x;y)$: $20x-45y=5$.
- حل في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول $(x;y)$: $6x-8y=9$.

الحل $7x+12y=5$ ومنه $7x\equiv 5[12]$ اي $7x+7\equiv 0[12]$ ومنه $x+1\equiv 0[12]$

اذن $x\equiv 11[12]$ وبالتالي $x=12k+11$ حيث k عدد صحيح.

ومنه $84k+77+12y=5$ اي $12y=-84k-72$ اذن $y=-7k-6$

الحلول هي $(x,y)=(12k+11,-7k-6)$

الهدف هو توظيف الترديدات والمعادلات من الشكل ax+b y= c

لاحظ فلكي جسمين A و B في الفضاء الخارجي يظهران بشكل دوري؛ حيث يظهر الجسم A كل 105أيام بينما يظهر الجسم B كل 81 يوما .

في اليوم J_0 ظهر للفلكي الجسم A ثم ظهر له الجسم B بعد ستة أيام.

يريد الفلكي حساب (توقع) اليوم J_1 الذي يظهر فيه الجسمان معا.

1. ليكن u وv عدد الدورات التامة في الفترة $\left[J_0 ; J_1\right]$ للجسمين A وB على الترتيب.بين أن الثنائية (u ،v) حل للمعادلة(E_1) حيث : $35x-27y=2$ (E_1)

2.

أ) عين ثنائية $\left(X_0, Y_0\right)$ من الأعداد الصحيحة النسبية بحيث تكون حلا للمعادلة:

$$35X - 27Y = 1$$

ب) استنتج حلا خاصا للمعادلة (E_1).

ت) عين كل الحلول (u,v) للمعادلة (E_1).

3.

أ) ما هو عدد أيام الفترة $\left[J_0 ; J_1\right]$ ؟

ب) إذا كان اليوم J_0 هو يوم الخميس 9 ديسمبر 1999، فما هو بالضبط تاريخ اليوم J_1 علما أنّ السنة 2000 هي سنة كبيسة.

ج) إذا تعذر على الفلكي الملاحظة في هذا الموعد، فما هو عدد الأيام التي سينتظرها حتى يحدث الاقتران الموالي للجسمين A و B؟

الحل

1- كل دورة للجسم A تمثل 105 يوما إذن عدد أيام الفترة $\left]J_0 ; J_1\right]$ هو 105u.

وكل دورة للجسم B تمثل 81 يوما إذن عدد أيام الفترة $]J_0+6; J_1]$ هو 81v.

نستنتج أن: $105u=81v+6$ وبالقسمة على 3 نجد: $35u-27v=2$

2- أ) باستخدام خوارزمية إقليدس نجد $(x_0,y_0)= (-10 ;-13)$

ومنه $(u_0,v_0)=(-20 ;-26)$

ب) باستخدام نظرية غوص نجد: $(u;v)=(27k-20;35k-26)$ مع $k \in \mathbb{N}^*$

3-أ) من أجل $k = 1$ أي أول اقتران نجد $u = 7$ ومنه نجد طول الفترة $[J_0 ;J_1]$ هو $105\times 7+1$ وهذا يساوي 736يوما.

ب) لدينا $J_1-J_0 =735$ و $735 \equiv 0[7]$ إذن اليوم J_1 هو يوم ثلاثاء.

وبما أن $735 = 366 + 365 + 4$ فإن تاريخ J_1 هو سنتين كاملتين وأربعة أيام بعد J_0 أي J_1 هو الخميس 13 ديسمبر 2001.

ج) حتى نجد عدد أيام الانتظار للاقتران الموالي نحل المعادلة $105u=81v+0$ لأن هذه المرة لا يوجد فرق في الأيام وبالتالي نحل المعادلة $35u = 27v$ ومنه عدد الأيام هو: $105\times 27 = 81\times 35 = 2835$

المؤسسة:		المستوى:	الثالثة رياضيات
السنة الدراسية:		ميدان التعلم:	الاعداد والحساب
التاريخ:		الوحدة التعلمية:	الموافقات في Z
توقيت الحصة :		موضوع الحصة :	التعداد

المكتسبات المستهدفة: نشر عدد طبيعي وفق أساس .- الانتقال من نظام أساسه α إلى نظام أساسه β.

الأنشطة المقترحة وطبيعتها	الإنجاز (سير الحصة)	التعليمات والتوجيهات

3/ التعداد

1.3 تعريف

مبرهنة

x عدد طبيعي غير معدوم أكبر تماما من 1. كل عدد طبيعي a أكبر من أو يساوي x يكتب بطريقة وحيدة على الشكل $a = qx^n + r_{n-1}x^{n-1} + r_{n-2}x^{n-2} + ... + r_2x^2 + r_1x + r_0$ حيث $0 < q < x$ و $0 \le r_\alpha < x$ مع $\alpha \in \{0;1;2;.....;n-1\}$

البرهان: a عدد طبيعي أكبر من أو يساوي العدد الطبيعي x غير المعدوم و الأكبر تماما من 1 .

ليكن r_0 باقي قسمة a على x. لدينا $a = c_0x + r_0$ حيث c_0 عدد صحيح و $0 \le r_0 < x$.

* إذا كان $c_0 < x$ المبرهنة محققة.

إذا كان $c_0 \ge x$ توجد ثنائية وحيدة $c_1; r_1$ من الأعداد الطبيعية حيث $c_0 = c_1x + r_1$ مع $0 \le r_1 < x$ و $0 < c_1 < c_0$.

* إذا كان $c_1 < x$ لدينا $a = c_1x^2 + r_1x + r_0$ المبرهنة محققة.

إذا كان $c_1 \ge x$ توجد ثنائية وحيدة $c_2; r_2$ من الأعداد الطبيعية حيث $c_1 = c_2x + r_2$ مع $0 \le r_2 < x$ و $0 < c_2 < c_1$.

* نواصل حتى يصبح حاصل القسمة q على x أصغر تماما من x .

نحصل تباعا على ما يلي :

1 ... $a = c_0x + r_0$ مع $0 \le r_0 < x$ و $0 < c_0 < a$.

2 ... $c_0 = c_1x + r_1$ مع $0 \le r_1 < x$ و $0 < c_1 < c_0$.

3 ... $c_1 = c_2x + r_2$ مع $0 \le r_2 < x$ و $0 < c_2 < c_1$.

....

$n-1$ ... $c_{n-3} = c_{n-2}x + r_{n-2}$ مع $0 \le r_{n-2} < x$ و $0 < c_{n-2} < c_{n-3}$.

n ... $c_{n-2} = c_{n-1}x + r_{n-1}$ مع $0 \le r_{n-1} < x$ و $0 < c_{n-1} < c_{n-2}$.

نضرب المساواة 1 ، 2 ، 3 ،، $n-1$ ، n في 1 ، x ، x^2 ، ... ، x^{n-2} ، x^{n-1} على الترتيب و بجمع

النتائج المحصل عليها طرف بطرف نحصل على :

$a = qx^n + r_{n-1}x^{n-1} + r_{n-2}x^{n-2} + ... + r_2x^2 + r_1x + r_0$ (مع وضع $c_{n-1} = q$) و منه المبرهنة محققة.

مثال 1:

العدد 1954 المكتوب في النظام العشري يمكن أن يكتب : $954 = 1.10^3 + 9.10^2 + 5.10^1 + 4$

$1954 = 4 + 5.10^1 + 9.10^2 + 1.10^3$ و عليه : $x = 10$.

مثال 2:

اكتب العدد 47 في نظام التعداد الذي أساسه 2:

الحل : $47 = 23 \times 2 + 1$ $\quad 23 = 11 \times 2 + 1$ $\quad 11 = 5 \times 2 + 1$ $\quad 5 = 2 \times 2 + 1$

$2 = 1 \times 2 + 0$ $\quad 1 = 0 \times 2 + 1$ و منه العدد 47 يكتب في النظام الثنائي هكذا $\overline{101111}^2$

و يقرأ واحد صفر واحد .

يبرهن وجود ووحدانية نشر عدد طبيعي N وفق أساس x من الشكل.

$N = a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + ... + a_nx^n$

مثال3 :

اكتب العدد 2007 في نظام التعداد الذي أساسه 8

الحل : $2007=250\times8+7$ $250=31\times8+2$ $31=3\times8+7$ $3=0\times8+3$

و عليه العدد 2007 يكتب في النظام الذي أساسه 8

على الشكل : $\overline{3727}^8$

تمرين 1: a عدد طبيعي يكتب $\overline{365}$ في النظام ذي الأساس 7 . أكتب a في النظام العشري .

الحل: $a=3\times7^2+6\times7+5=194$ و منه a يكتب 194 في النظام العشري .

تمرين 2: a عدد طبيعي يكتب 2517 في النظام العشري . أكتب a في النظام ذي الأساس 8.

الحل:

$4=8\times0+4$ $39=4\times8+7$ $314=39\times8+2$ $2517=314\times8+5$

ومنه $2517=4\times8^3+7\times8^2+2\times8+5$

و منه a يكتب $\overline{4725}$ في النظام ذي الأساس 8 .

2.3 التعداد ذو الأساس x

x عدد طبيعي غير معدوم أكبر تماما من 1. يعتمد التعداد ذو الأساس x على الاصطلاحين التاليين :

1) إذا كان $x>a$ (a عدد طبيعي) a يمثل برمز وحيد يسمى رقما.

2) إذا كان $x\le a$ (a عدد طبيعي) من المبرهنة a ينشر بطريقة وحيدة وفق العدد x :

$a=qx^n+r_{n-1}x^{n-1}+r_{n-2}x^{n-2}+.....+r_2x^2+r_1x+r_0$ حيث

$0<q<x$ و $0\le r_\alpha<x$ مع $\alpha\in\{0;1;2;.....;n-1\}$

يمثل العدد a كما يلي $a=\overline{q\,r_{n-1}\,r_{n-2}...r_1\,r_0}$.

الكتابة $a=\overline{q\,r_{n-1}\,r_{n-2}...r_1\,r_0}$ هي كتابة العدد a في النظام ذي الأساس x. إذا كان $x=10$ ، نكتب : $a=q\,r_{n-1}\,r_{n-2}...r_1\,r_0$

قاعدة

تمرين 3: a عدد طبيعي يكتب 643 في النظام ذي الأساس 8.

1) أكتب a في النظام ذي الأساس 2 بطريقتين.

- بالمرور عبر النظام العشري .
- مباشرة .

2) أكتب a في النظام ذي الأساس 4 مباشرة .

الحل:

1) • $a=6\times8^2+4\times8+3=419$ و منه a يكتب 419 في النظام العشري .

$52=26\times2+0$ $104=52\times2+0$ $209=104\times2+1$ $419=209\times2+1$

$1=0\times2+1$ $3=1\times2+1$ $6=3\times2+0$ $13=6\times2+1$ $26=13\times2+0$

$419=1\times2^8+1\times2^7+0\times2^6+1\times2^5+0\times2^4+0\times2^3+0\times2^2+1\times2+1$.

إذن a يكتب $\overline{110100011}$ في النظام ذي الأساس 2.

• $a=6\times8^2+4\times8+3$

$a=3\times2\times8^2+2^2\times8+3$.

$a=3\times2^7+2^5+2+1$.

$a=(2+1)\times2^7+2^5+2+1$

$a=2^8+2^7+2^5+2+1$

و منه

. $a=1\times2^8+1\times2^7+0\times2^6+1\times2^5+0\times2^4+0\times2^3+0\times2^2+1\times2+1$

إذن a يكتب $\overline{110100011}$ في النظام ذي الأساس 2.

2) $a=6\times8^2+4\times8+3$

$$a=6\times2^2\times4^2+4\times2\times4+3$$
$$a=6\times4^3+2\times4^2+3$$
$$a=(2+4)4^3+2\times4^2+3$$
$$a=4^4+2\times4^3+2\times4^2+3$$
$$a=1\times4^4+2\times4^3+2\times4^2+0\times4+3$$.

إذن a يكتب $\overline{12204}$ في النظام ذي الأساس 4.

ملاحظة:

إذا كان N مكتوب في النظام الذي أساسه 10 على الشكل :

$$N=a_0+a_1+10+a_2.10^2+\ldots+a_n10^n$$

فإن N يكتب على الشكل : $N=a_na_{n-1}\ldots a_1a_0$

3.3 الانتقال من النظام الذي أساسه x إلى النظام العشري

مثال:

نعتبر العدد N المكتوب في النظام الذي أساسه 3

كما يلي : $N=\overline{2002012}^3$. اكتب N في النظام العشري .

الحل:

$$N=2.3^0+1.3^1+0.3^2+2.3^3+0.3^4+0.3^5+2.3^6$$
$$N=2+3+0+45+0+0+1458$$
$$N=1517$$

4.3 الانتقال من النظام الذي أساسه α إلى النظام أساسه β

نعلم أن نظام التعداد الذي أساسه **10** سهل الاستعمال و العمليات الحسابية فيه سهلة و لهذا :

إذا كان N عدد طبيعي مكتوب في نظام تعداد ذو الأساس α و نريد أن نكتب N في نظام تعداد أساسه β فنقوم بما يلي :

- نكتب N في نظام التعداد ذو الأساس **10** (كما سبق)
- نكتب N في نظام التعداد ذو الأساس β

قاعدة

مثال:

عدد N مكتوب في نظام التعداد ذو الأساس **2**

كما يلي : $\overline{11101101}^2$. اكتب N في نظام التعداد ذو الأساس **5**.

الحل:

- نكتب N في نظام التعداد ذو الأساس **10** :

$$N=1.2^0+0.2^1+1.2^2+1.2^3+0.2^4+1.2^5+1.2^6+1.2^7$$
$$N=1+4+8+32+64+128$$
$$N=237$$

- نكتب N في نظام التعداد ذو الأساس **5** :

$$237=47\times5+2\quad 47=9\times5+2\quad 9=1\times5+4\quad 1=0\times5+1$$

و منه N يكتب : $\overline{1422}^5$

ملاحظات :

– النظام العشري هو النظام المستعمل لدى البشر و أساسه عشرة ،
أما أرقامه فهي : $0، 1، 2، 3، 4، 5، 6، 7، 8، 9$.

- النظام الثنائي هو النظام المستعمل لدى الآلات و أرقامه هي $0، 1$.

– النظام ذو الأساس **8** ، أرقامه : $0، 1، 2، 3، 4، 5، 6، 7$

– النظام ذو الأساس 11 ، أرقامه :
$9، 8، 0، 1، 2، 3، 4، 5، 6، 7$ ، α (حيث : $\alpha = 10$).

- النظام ذو الأساس 12 ، أرقامه :
$9، 8، 0، 1، 2، 3، 4، 5، 6، 7$، α ، β حيث : $\alpha = 10$ و $\beta = 11$.

مثال :

اكتب العدد 1954 في نظام التعداد ذو الأساس 12 .

الحل :

$$1954 = 162 \times 12 + 10 \quad 162 = 13 \times 12 + 6 \quad 13 = 1 \times 12 + 1 \quad 1 = 0 \times 12 + 1$$

و عليه العدد 1954 يكتب في نظام التعداد الذي أساسه **12** هكذا :

$\overline{116\alpha}^{12}$ حيث : $\alpha = 10$

تمرين 33ص 79 أنشر الأعداد الطبيعية التالية المكتوبة في النظام ذي الأساس العشري .

$a = 12734$ ؛ $b = 5723$ ؛ $c = 503019$.

تمرين 34ص 79 أنشر الأعداد الطبيعية التالية المكتوبة في النظام ذي الأساس 6 .

$a = \overline{234}$ ؛ $b = \overline{1523}$ ؛ $c = \overline{503012}$.

تمرين 35ص 79 أكتب في النظام ذي الأساس 7 كل من الأعداد الطبيعية التالية :

$a = 7^3 + 2 \times 7^2 + 3 \times 7 + 5$ ؛

تمرين 42 ص 79 أ . في أي أساس تعداد x يكون $\overline{162} = \overline{77} + \overline{63}$ ؟

ب . أحسب في النظام العشري الجداء $\overline{77} \times \overline{63}$ علما أن $\overline{63}$ و $\overline{77}$ مكتوبان في النظام ذي الأساس x المحصل عليه في السؤال السابق .

ج . أكتب الجداء $\overline{77} \times \overline{63}$ في النظام 8 .

تمرين 43ص 79 في كل حالة من الحالتين المقترحتين أدناه ، عين الأساس a ، إن أمكن ، بحيث تكون الكتابة في النظام ذي الأساس a . أ . $\overline{12} \times \overline{23} = \overline{276}$. ب . $\overline{541} = \overline{22} \times \overline{32}$

تمرين 55ص 79 أنجز ، في النظام ذي الأساس 5 ، العمليات التالية .

$$\begin{array}{r} 3421 \\ +\ 230 \\ \hline \end{array} \quad ، \quad \begin{array}{r} 431 \\ -132 \\ \hline \end{array} \quad ، \quad \begin{array}{r} 213 \\ \times\ 14 \\ \hline \end{array}$$

تمرين 1: اكتب الأعداد الآتية و المكتوبة في النظام العشري في النظام ذو الأساس **4** .

$1961 \ , \ 1989 \ , 1418$ ثم استنتج كتابتها في النظام الثنائي

الحل: - كتابة الأعداد في النظام ذي الأساس **4** :

* العدد **1961** :

$$1961 = 490 \times 4 + 1, 490 = 122 \times 4 + 2, 122 = 30 \times 4 + 2, 7 = 1 \times 4 + 3, 1 = 0 \times 4 + 1$$

إذن **1961** يكتب : $\overline{132221}^4$

* العدد **1989** : $1989 = 497 \times 4 + 1, 497 = 124 \times 4 + 1, 124 = 31 \times 4 + 0$

$31 = 7 \times 4 + 3, 7 = 1 \times 4 + 3, 1 = 0 \times 4 + 1$ إذن **1989** يكتب : $\overline{133011}^4$

* العدد **1418** :

$$1418 = 202 \times 7 + 4, 202 = 28 \times 7 + 6, 28 = 4 \times 7 + 0, 4 = 0 \times 7 + 4$$

إذن 1418 يكتب : $\overline{4064}^{4}$

– استنتاج الكتابة في النظام الثنائي :

$$1961 = 1\times 4^{0} + 2.4^{1} + 2.4^{2} + 2.4^{3} + 3.4^{4} + 1.4^{5}$$
$$= 1 + 2\left(2^{2}\right)^{1} + 2\left(2^{2}\right)^{2} + 2\left(2^{2}\right)^{3} + (1+2)\left(2^{2}\right)^{4} + 1.\left(2^{2}\right)^{5}$$
$$= 2^{0} + 2^{3} + 2^{5} + 2^{7} + 2^{8} + 2^{9} + 2^{10}$$
$$= 1.2^{0} + 1.2^{3} + 1.2^{5} + 1.2^{7} + 1.2^{8} + 1.2^{9} + 1.2^{10}$$

و عليه 1961 يكتب : $\overline{11110101001}^{2}$

$$1418 = 4.4^{0} + 6.4^{1} + 0.4^{2} + 4.4^{3} = 2^{2} + \left(2+2^{2}\right).2^{2} + 2^{2}.\left(2^{2}\right)^{3}$$
$$= 2^{2} + 2^{3} + 2^{4} + 2^{8} = 1.2^{2} + 1.2^{3} + 1.2^{4} + 1.2^{8}$$

و عليه : 1418 يكتب : $\overline{100011100}^{2}$

تمرين2: نعتبر العدد A الذي يكتب في نظام التعداد الذي أساسه 7 على الشكل:

$A = \overline{63x4}$

الحل: تعيين x : $A = \overline{63x4}^{7}$ و منه : $0 \le x \le 6$

و بالتالي A يكتب : $A = 4.7^{0} + x.7^{1} + 3.7^{2} + 6.7^{3}$

و عليه : $A = 4 + x.7 + 3.7^{2} + 6.7^{2}$ لدينا : $7 \equiv 1[6]$ و منه : $7^{2} \equiv 1[6]$ و $7^{3} \equiv 1[6]$

و بالتالي : $A \equiv 4 + x + 3 + 6[6]$ أي : $A \equiv 1 + x\,[6]$ بما أن: $A \equiv 0[6]$ فإن :

$1 + x \equiv 0[6]$ و عليه : $x \equiv -1[6]$ أي : $x \equiv 5[6]$ لأن : $-1 \equiv 5[6]$

و عليه : $x = 5$ لأن : $0 \le x \le 6$.

تمرين 3:عين العدد الطبيعي x بحيث يكون A قابلا للقسمة على 6

1 – ادرس بواقي قسمة 4^{n} على 7.

2 – يكتب العدد N على الشكل : $\overline{13321}$ في نظام التعداد

الذي أساسه 4 . ما هو باقي قسمة N على 7

الحل:

1- دراسة بواقي قسمة 4^{n} على 7:

$4^{3} \equiv 1[7]$; $4^{2} \equiv 2[7]$; $4^{1} \equiv 4[7]$; $4^{0} \equiv 1[7]$ و منه: $4^{3\alpha} \equiv 1[7]$ و عليه :

$4^{3\alpha+1} \equiv 4[7]$ و $4^{3\alpha+2} \equiv 2[7]$

2 – تعيين باقي قسمة N على 7:

لدينا : $N = 1.4^{0} + 2.4^{1} + 3.4^{2} + 3.4^{3} + 1.4^{4}$ ومنه : $N \equiv 1 + 2(4) + 3(2) + 3(1) + (4)[7]$

أي : $N \equiv 22[7]$ إذن : $N \equiv 1[7]$ و منه باقي القسمة هو 1.

تمرين19: أنجز العمليات التالية في نظام التعداد الذي أساسه 2 :

$\overline{11110} + \overline{11111}$, $\overline{101011} + \overline{100111}$

$\overline{10001} \times \overline{11100}$, $\overline{1111} \times \overline{1101}$

الحل:

انجاز العمليات :

$$\begin{array}{lr} & {}^{2}\overline{11110} \\ + & {}^{2}\overline{11111} \\ \hline = & {}^{2}\overline{111101} \end{array} \qquad \begin{array}{lr} & {}^{2}\overline{101011} \\ + & {}^{2}\overline{100111} \\ \hline = & {}^{2}\overline{1010010} \end{array}$$

$$\begin{array}{lr} & {}^{2}\overline{10001} \\ \times & {}^{2}\overline{11100} \\ \hline & 00000 \\ & 00000\,. \\ & 10001\,. \\ & 10001\,. \\ & 10001\,. \\ \hline & {}^{2}\overline{111011100} \end{array} \qquad \begin{array}{lr} & {}^{2}\overline{1111} \\ \times & {}^{2}\overline{1101} \\ \hline & 1111 \\ & 0000\,. \\ & 1111\,. \\ & 1111\,. \\ \hline & {}^{2}\overline{11000011} \end{array}$$

تمرين20: a,b,c أعداد طبيعية حيث $1<a\le b\le c$ عين a,b,c و الجداء abc علماأن في نظام التعداد الذي أساسه a لدينا :

$b+c=\overline{46}$ و $bc=\overline{555}$.

الحل: تعيين a,b,c ثم الجداء abc :

لدينا : $bc=\overline{555}$ ، $b+c=\overline{46}$

و عليه : $\begin{cases} b+c=6+4a \\ b.c=5+5a+5a^2 \end{cases}\dots(1)$ و منه b و c حلين لمعادلة في $\mathbb{N}$ من الشكل :

$$x^2-(6+4a)x+5a^2+5a+5=0$$

أي : $x^2-2(3+2a)x+5a^2+5a+5=0 \quad \dots(2)$

لدينا : $\Delta'=(3+2a)^2-(5a^2+5a+5)$ و منه : $\Delta'=-a^2+7a+4$

حتى تقبل هذه المعادلة حل يجب أن يكون $\Delta'\ge 0$

مميز Δ' هو : $\Delta_a=49+16=65$

إذن Δ' له جذرين : $a_2=\dfrac{-7+\sqrt{65}}{-2}$ ، $a_1=\dfrac{-7-\sqrt{65}}{-2}$

a	$-\infty$	a_2		a_1	$+\infty$
Δ'	$-$	0	$+$	0	$-$

حيث : $a_1\simeq 7,5$ ، $a_2\simeq -0,53$

إذن من أجل $a_2<a<a_1$ فإن : $\Delta'>0$

و عليه المعادلة (2) تقبل حلا . لكن : $a\ge 7$

و عليه $a=7$ هو حل للجملة (1) .

و المعادلة (2) تصبح : $x^2-34x+285=0$ ؛ $\Delta'=4$

للمعادلة حلين : $x_1=\dfrac{17-2}{1}=15$ ؛ $x_2=\dfrac{17+2}{1}=19$

و منه : $b=15$ وَ $c=19$ لأن : $b<c$

و منه : $abc=7\times15\times19$ أي : $abc=1995$.