المؤسسة:سليماني جلول　　　الأستاذ: بلبحري كمال　　　المادة : رياضيات

المستوى و الشعبة : الثالثة علوم تجريبية

المحتوى المعرفي : الأعداد و الحساب

الكفاءات المستهدفة: - إثبات أن عددا صحيحا يقسم عددا صحيحا آخر -استعمال خواص قابلية القسمة في $\mathbb{Z}$

- سير الحصة

المراحل	التسيير (الأنشطة المرافقة لكل مرحلة)	المدة	ملاحظات
الإنطلاق:	⋆ التهيئة النفسية: **نشاط :** ✣ عين كل الثنائيات $(a;b)$ من الأعداد الصحيحة التي تحقق $ab = 6$ **قابلية القسمة في $\mathbb{Z}$:**	15 د	مناقشة النشاط من طرف التلاميذ
بناء المفاهيم:	**تعريف:** نقول عن عدد صحيح غير معدوم a إنه يقسم العدد الصحيح b إذا و فقط إذا وجد عدد صحيح k حيث : $b = ka$ نقول كذلك a قاسم للعدد b أو نقول b مضاعف للعدد a . و نكتب : $a \mid b$ و نقرأ a يقسم b . **أمثلة :** ✦ 2 يقسم 2018 لأن : $2018 = 2 \times 1009$ ✦ (-3) يقسم 1962 لأن : $1962 = (-3)(-654)$ ✦ 1 يقسم كل الأعداد الصحيحة ✦ 0 لا يقسم أي عدد صحيح غير معدوم **ملاحظة :** في $\mathbb{Z}$ للعددين a و $-a$ نفس القواسم . **خاصية «①»:** a ، b ، c ثلاثة أعداد صحيحة غير معدومة . إذا كان a يقسم b و b يقسم c فإن : a يقسم c **برهان :** إذا كان : $a \mid b$ و $b \mid c$ فإن $b = ka$ و $c = k'b$ حيث k و k' عددان صحيحان . و منه : $c = (kk')a$ و بما أن kk' عدد صحيح فإن a يقسم c . **مثال :** ✣ 4 يقسم 8 و 8 يقسم 16 فإن 4 يقسم 16	20 د	

المراحل	السير (الأنشطة المرافقة لكل مرحلة)	المدة	ملاحظات
بناء المفاهيم:	(انظر المحتوى أدناه)	25 د	

خاصية «②»:

a و b عددان صحيحان و a غير معدوم .

إذا كان a يقسم b فإنه من أجل كل عدد صحيح m : a يقسم mb

برهان :

إذا كان : $a \mid b$ فإن $b = ka$ و $c = k'b$ حيث k عدد صحيح .

و منه : $mb = mka = (mk)a$ و بما أن mk عدد صحيح فإن a يقسم mb .

مثال :

- 3 يقسم 27 و عليه 3 يقسم 4×27
- 3 يقسم 108 و عليه 3 يقسم $(-5)(108)$

خاصية «③»:

a و b عددان صحيحان و a غير معدوم .

إذا كان a يقسم b فإنه من أجل كل عدد صحيح m : ma يقسم mb

برهان :

إذا كان : $a \mid b$ فإن $b = ka$ و $c = k'b$ حيث k عدد صحيح .

و منه : $mb = mka = k(ma)$ و بما أن k عدد صحيح فإن ma يقسم mb .

مثال :

- 7 يقسم 21 و عليه 7×5 يقسم 5×21
- -11 يقسم 77 و عليه $(-2)(-11)$ يقسم $(-2)(77)$

خاصية «④»:

a ، b و c ثلاثة أعداد صحيحة و a غير معدوم .

إذا كان a يقسم العددين b و c فإنه من أجل كل عددين صحيحين m و n : a يقسم $mb + nc$

برهان :

إذا كان : a يقسم b و c فإن a يقسم mb و nc (خاصية 2) .

و منه :يوجد عددان صحيحان k و k' حيث : $mb = ka$ و $nc = k'a$ إذن : $mb + nc = ka + k'a = a(k + k')$.

و بالتالي : a يقسم $mb + nc$

مثال :

- 7 يقسم 21 و عليه 7×5 يقسم 5×21
- -11 يقسم 77 و عليه $(-2)(-11)$ يقسم $(-2)(77)$

ملاحظات عامة حول الحصة: ....

المراحل	السير (الأنشطة المرافقة لكل مرحلة)	المدة	ملاحظات
بناء المفاهيم:	**تمرين تطبيقي «①»:** ① أنشر العبارة $(x-1)(y-6)$ ② عين كل الثنائيات $(x;y)$ التي تحقق $xy=6x+y$. **حل التمرين التطبيقي «①»:** ① لدينا : $(x-1)(y-6)=xy-6x-y+6$ ② لدينا : $xy=6x+y$ و منه : $xy-6x-y=0$ يعني أن : $(x-1)(y-6)=6$ إذن : $(x;y)=\{(-5;5),(-2;4),(3;9),(7;7),(0;0),(-1;3),(4;8),(2;12)\}$ **تمرين تطبيقي «②»:** ✣ عين الأعداد الصحيحة n حيث : 12 يقسم $n+4$ **حل التمرين التطبيقي «②»:** ① 12 يقسم $n+4$ معناه : $n+4=12k$ مع : $k\in\mathbb{Z}$ و منه : $n=12k-4$ **تمرين تطبيقي «③»:** ✣ عين الأعداد الصحيحة n حيث : $2n+7$ يقسم 6 **حل التمرين التطبيقي «③»:** $2n+7$ يقسم 6 معناه : $2n+7$ يساوي أحد قواسم 6 و لدينا : $D_6=\{-6;-3;-2;-1;1;2;3;6\}$ و بالتالي : $n\in\{-5;-4;-3;-2\}$	30 د	
	تمرين تطبيقي «④»: ✣ عين الأعداد الصحيحة n حيث : $4n+1$ يقسم $n+3$ **حل التمرين التطبيقي «④»:** ليكن n عدد صحيح بحيث: $4n+1$ يقسم $n+3$ إذن : $4n+1$ يقسم $4(n+3)$ و عليه : $4n+1$ يقسم $4n+12-(4n+1)$ أي : $4n+1$ يقسم 11 لدينا : $D_{11}=\{-11;-1;1;11\}$ $4n+1$ يقسم 11 معناه : $4n+1=-11$ أو $4n+1=-1$ أو $4n+1=1$ أو $4n+1=11$ المعادلتان $4n+1=-1$ و $4n+1=11$ لا تقبلان حلولا في $\mathbb{Z}$. إذن : قيم n هي : $-3\,;0$	30 د	
تقويم	حل التمرين 02و 03 صفحة 56 حل التمرين 13و 15و 16صفحة 56		

ملاحظات عامة حول الحصة: ....

المؤسسة: سليماني جلول | الأستاذ: بلبحري كمال | المادة : رياضيات

المستوى و الشعبة : الثالثة علوم تجريبية

المحتوى المعرفي : الأعداد و الحساب

الكفاءات المستهدفة: – استعمال القسمة الإقليدية في $\mathbb{Z}$

– سير الحصة

المراحل	التسيير (الأنشطة المرافقة لكل مرحلة)	المدة	ملاحظات
الإنطلاق:	⋆ التهيئة النفسية: **القسمة الإقليدية في $\mathbb{Z}$:** ❶ القسمة الإقليدية في $\mathbb{Z}$: **مبرهنة:** a عدد صحيح و b عدد طبيعي غير معدوم . توجد ثنائية وحيدة (q,r) من الأعداد الصحيحة حيث : $a = bq + r$ و $0 \leq r < b$ ✦ تسمى عملية البحث عن الثنائية (q,r) بالقسمة الإقليدية للعدد a على العدد b . ✦ يسمى q و r بهذا الترتيب حاصل و باقي القسمة الإقليدية للعدد a على b .	15 د	
بناء المفاهيم:	**البرهان :** العدد a إما مضاعف للعدد b و إما محصور بين مضاعفين متتابعين لـ b أي : يوجد q عدد صحيح وحيد حيث $bq \leq a < bq + b$ و نستنتج من هذا أن : $0 \leq a - bq < b$ نضع : $r = a - bq$ و منه لدينا : $a = bq + r$ مع $0 \leq r < b$ **ملاحظة :** يمكن تمديد مفهوم القسمة الإقليدية لعدد صحيح a على عدد صحيح غير معدوم b و نحصل على $a = bq + r$ و $0 \leq r < \mid b \mid$ **مثال «①» :** $a = 2007$ و $b = 208$ و لدينا : $2007 = 208 \times 9 + 135$ و عليه : $q = 9$ و $r = 135$ **مثال «②» :** a عدد صحيح باقي قسمته على 10 هو 8 . ✦ لنعين باقي قسمة a على 5 : لدينا : $a = 10k + 8$ حيث $k \in \mathbb{Z}$ و منه $a = 5(2k+1) + 3$ إذن : باقي قسمة a على 5 هو 3 ✦ لنعين باقي قسمة a على 2 : لدينا : $a = 10k + 4$ حيث $k \in \mathbb{Z}$ و منه $a = 2(5k+4)$ إذن : باقي قسمة a على 2 هو 0	10 د	

المراحل | السير (الأنشطة المرافقة لكل مرحلة) | المدة | ملاحظات

بناء المفاهيم:

❷ القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين :

a عدد طبيعي غير معدوم . نرمز بـ D_a إلى مجموعة قواسم العدد a .

أمثلة :

- ✦ مجموعة قواسم 6 هي : $D_6 = \{1;2;3;6\}$
- ✦ مجموعة قواسم 0 هي : $\mathbb{N}^*$
- ✦ مجموعة قواسم 1 هي : $\{1\}$

15 د

> **تعريف :** a و b عددان طبيعيان غير معدومين . D_a و D_b مجموعتا قواسم a و b على الترتيب .
> $D_a \cap D_b$ هو مجموعة القواسم المشتركة للعددين a و b .
> يسمى أكبر عنصر من المجموعة $D_a \cap D_b$ بالقاسم المشترك الأكبر للعددين a و b .
> و نرمز له بـ : $PGCD(a;b)$

ملاحظات :

- ✣ $PGCD(a;a) = a$ و $PGCD(1;a) = 1$
- ✣ $PGCD(0;a) = a$ (a غير معدوم)
- ✣ مجموعة القواسم المشتركة لعددين طبيعيين غير معدومين هي مجموعة قواسم قاسمهما المشترك الأكبر .

تمرين تطبيقي «①»:

✦ عين $PGCD(18;30)$

الحل :

لدينا : $D_{18} = \{1;2;3;6;9;18\}$ و $D_{30} = \{1;2;3;6;10;15;30\}$

و منه : $D_{18} \cap D_{30} = \{1;2;3;6\}$ إذن : $PGCD(18;30) = 6$

تمرين تطبيقي «②»: ليكن n عددا صحيحا .

ليكن العددان الصحيحان $a = 4n - 2$ و $b = 3n + 1$

20 د

✣ أثبت أن كل قاسم مشترك للعددين a و b يقسم العدد 10

الحل :

ليكن d قاسم مشترك للعددين a و b ، نريد تعيين صيغة من الشكل $ka + lb$ مستقلة عن n .

ليكن d يقسم $4b - 3a$ أي d يقسم $4(3n+1) - 3(4n-2)$ أي d يقسم 10

تقويم

حل التمرين 18و 20و 21 صفحة 57

حل التمرين 66و 67صفحة 59

ملاحظات عامة حول الحصة: ....

المؤسسة: سليماني جلول	الأستاذ: بلبحري كمال	المادة : رياضيات
المستوى و الشعبة : الثالثة علوم تجريبية
المحتوى المعرفي : الأعداد و الحساب
الكفاءات المستهدفة: – استعمال خوارزمية إقليدس لتعيين القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين

– سير الحصة

المراحل	التسيير (الأنشطة المرافقة لكل مرحلة)	المدة	ملاحظات
الإنطلاق: بناء المفاهيم:	⋆ التهيئة النفسية: **خواص القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين :** خاصية «①»: a و b عددان طبيعيان غير معدومين حيث $b \geq a$. r باقي قسمة a على b . لدينا : $PGCD(a;b) = PGCD(b;r)$ **برهان :** نضع : $PGCD(a;b) = d$ و $PGCD(b;r) = d'$. نعلم أن $a = bq + r$ حيث q عدد طبيعي و منه: $r = a - bq$. d يقسم b وبالتالي d يقسم bq و d يقسم a إذن d يقسم $a - bq$ أي d يقسم r . d' يقسم b وبالتالي d' يقسم bq و d' يقسم r إذن d' يقسم $bq + r$ أي d' يقسم a و منه d' قاسم مشترك للعددين a و b . إذن مجموعة القواسم امشتركة للعددين a و b هي نفسها مجموعة القواسم امشتركة للعددين b و r . و بالتالي : $d = d'$ أي : $PGCD(a;b) = PGCD(b;r)$ **مثال :** ✦ لدينا : $PGCD(128;30) = PGCD(30;8)$ إذن يكفي تعيين أكبر عنصر من المجموعة $D_{30} \cap D_8$. **خوارزمية إقليدس :** a و b عددان طبيعيان غير معدومين حيث $a > b$. بقسمة a على b نحصل على $a = bq_1 + r_1$ و $0 \leq r_1 < b$ حيث q_1 و r_1 عددان طبيعيان . ✣ إذا كان $r_1 = 0$ (أي b يقسم a) فإن $PGCD(a;b) = b$ ✣ إذا كان $r_1 \neq 0$ فإن $PGCD(a;b) = PGCD(b;r_1)$. نقسم b على r_1 نحصل على $b = r_1q_2 + r_2$ و $0 \leq r_2 < r_1$ حيث q_2 و r_2 عددان طبيعيان . ✣ إذا كان $r_2 = 0$ (أي r_1 يقسم b) فإن $PGCD(a;b) = PGCD(b;r_1) = r_1$ ✣ إذا كان $r_2 \neq 0$ فإن $PGCD(a;b) = PGCD(b;r_1) = PGCD(r_1;r_2)$. نقسم r_1 على r_2 نحصل على $r_1 = r_2q_3 + r_3$ و $0 \leq r_3 < r_2$ حيث q_3 و r_3 عددان طبيعيان . ✣ نواصل هكذا حتى نجد باقيا معدوما ، و نسمي r_n آخر باقي غير معدوم و عليه : $PGCD(a;b) = PGCD(b;r_1) = PGCD(r_1;r_2) = ... = PGCD(r_n;0) = r_n$	15 د 10 د	

المراحل	السير (الأنشطة المرافقة لكل مرحلة)	المدة	ملاحظات

خاصية «①»:

القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين غير معدومين a و b هو آخر باقي غير معدوم في سلسلة قسمات خوارزمية إقليدس .

بناء المفاهيم: 10 د

مثال :

✦ تعيين : $PGCD(9150;8700)$

$9150 = 8700 \times 1 + 450$

$8700 = 450 \times 19 + 150$

$450 = 150 \times 3 + 0$

و منه : $PGCD(9150;8700) = 150$

يمكن تلخيص العمل في جدول كالتالي :

الحاصل		1	19	3
المقسوم و القاسم	9150	8700	450	150
الباقي		450	150	0

تمرين تطبيقي «①»:

✦ باستعمال خوارزمية إقليدس عين $PGCD(2017;1962)$

الحل :

الحاصل		1	35	1	2	18
المقسوم والقاسم	2017	1962	55	37	18	1
الباقي		55	37	18	1	0

آخر باقي غير معدوم هو 1 و منه : $PGCD(2017;1962) = 1$

أي أن العددين 2017 و 1962 أوليان فيما بينهما .

تمرين تطبيقي «②»: 25 د

✦ عين ثنائية $(x;y)$ من الأعداد الصحيحة حيث : $182x + 126y = 14$

الحل :

الحاصل		1	2	4
المقسوم والقاسم	182	126	56	14
الباقي		56	14	0

آخر باقي غير معدوم هو 14 و منه : $PGCD(182;126) = 14$

• لدينا : $126 = 2 \times 56 + 14$

$14 = 126 - 2 \times 56$

$14 = 126 - 2(182 - 126)$

$14 = 126 - 2 \times 182 + 2 \times 126$

$14 = (-2)182 + 3 \times 126$

إذن نأخذ : $x = -2$ و $y = 3$

تقويم:

حل التمرين 25و26و29 صفحة 57

حل التمرين 81صفحة 60

ملاحظات عامة حول الحصة: ....

المؤسسة: سليماني جلول — الأستاذ: بلبحري كمال — المادة : رياضيات

المستوى و الشعبة : الثالثة علوم تجريبية

المحتوى المعرفي : الأعداد و الحساب

الكفاءات المستهدفة: – حل مشكلات باستعمال خواص القاسم المشترك الأكبر

– سير الحصة

<table>
<tr><th>المراحل</th><th>التسيير (الأنشطة المرافقة لكل مرحلة)</th><th>المدة</th><th>ملاحظات</th></tr>
<tr><td>الإنطلاق:

بناء المفاهيم:</td><td>

⋆ التهيئة النفسية:

خواص القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين :

خاصية «③»:
a و b عددان طبيعيان غير معدومين . k عدد طبيعي غير معدوم .
لدينا : $PGCD(ka;kb) = k \times PGCD(a;b)$

برهان :
نضع : $PGCD(a;b) = d$ و $PGCD(ka;kb) = d'$.
⋆ d يقسم a ومنه kd يقسم ka . d يقسم b نه kd يقسم kb
وبالتالي : kd قاسم مشترك للعددين ka و kb إذن : kd يقسم القاسم المشترك الأكبر للعددين ka و kb أي kd يقسم d' ومنه $d' = k'(kd)$ حيث : k' عدد طبيعي .
⋆ d' يقسم ka و kb . و منه $k'kd$ يقسم ka و kb
وبالتالي : $k'd$ يقسم a و b و بالتالي $k'd$ يقسم القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b
و بالتالي : $k' = 1$ و منه : $d' = kd$
إذن : $PGCD(ka;kb) = k \times PGCD(a;b)$

مثال :
✦ لدينا : $PGCD(308;84) = 7 \times PGCD(44;12) = 7 \times 4 = 28$

تعريف : a و b عددان طبيعيان غير معدومين .
يكون العددان a و b أوليين فيما بينهما إذا و فقط إذا كان قاسمهما المشترك الأكبر يساوي 1 .

خاصية «④»:
a و b عددان طبيعيان غير معدومين . d قاسم مشترك للعددين a و b .
نضع : $a = da'$ و $b = db'$.
يكون d القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b إذا و فقط إذا كان العددان الطبيعيان a' و b' أوليين فيما بينهما .

</td><td>15 د

10 د</td><td></td></tr>
</table>

المراحل	التسيير (الأنشطة المرافقة لكل مرحلة)	المدة	ملاحظات
بناء المفاهيم	**البرهان :** a و b عددان طبيعيان غير معدومين و d قاسمهما المشترك الأكبر . ✦ نضع : $a = da'$ و $b = db'$ $d = PGCD(a;b) = PGCD(da';db') = d \times PGCD(a';b')$ بما أن d غير معدوم فإن : $PGCD(a';b') = 1$ ✦ بالعكس نعتبر $PGCD(a';b') = 1$ $PGCD(a;b) = d \times PGCD(a';b') = d$ **تحديد القاسم المشترك الأكبر لعددين صحيحين :** **تعريف :** a و b عددان صحيحان غير معدومين . القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b هو العدد الطبيعي الوحيد d حيث : $d = PGCD(\mid a \mid ; \mid b \mid)$ a و b عددان صحيحان غير معدومين . k عدد صحيح غير معدوم . **خاصية :** لدينا : $PGCD(ka;kb) = \mid k \mid \times PGCD(a;b)$ **ملاحظة :** a و b عددان صحيحان غير معدومين . ✣ إذا كان b يقسم a فإن : $PGCD(a;b) = \mid b \mid$	15 د	
	تمرين تطبيقي «①»: ✦ عين كل الثنائيات $(a;b)$ من الأعداد الطبيعية غير المعدومة حيث : $\begin{cases} a+b=55 \\ PGCD(a;b)=5 \end{cases}$ **الحل :** نضع : $a = 5a'$ و $b = 5b'$ حيث a' و b' أوليان فيما بينهما . $a+b=55$ تعني : $5a'+5b'=55$ و منه : $a'+b'=11$ $(a';b') \in \{(1;10),(2;9),(3;8),(4;7),(5;6),(6;5),(7;4),(8;3),(9;2),(10;1)\}$ و منه مجموعة الحلول هي : $\{(5;50),(10;45),(15;40),(20;35),(25;30),(30;25),(35;20),(40;15),(45;10),(50;5)\}$	20 د	
تقويم	**تمرين تطبيقي «②»:** عين القاسم المشترك الأكبر للعددين -1408 و -512 . **الحل :** $PGCD(-1408;-512) = PGCD(1408;512)$ نلاحظ أن : $1408 = 32 \times 44$ و $512 = 32 \times 16$ و منه : $PGCD(1408;512) = 32 \times PGCD(44;16) = 32 \times 4 = 128$ حل التمرين 25و 29و 36 صفحة 57 حل التمرين 80و 82و 84صفحة 60		

ملاحظات عامة حول الحصة: ....

المؤسسة:سليماني جلول الأستاذ: بلبحري كمال المادة : رياضيات

المستوى و الشعبة : الثالثة علوم تجريبية

المحتوى المعرفي : الأعداد و الحساب

الكفاءات المستهدفة: – معرفة و استعمال خواص الموافقات في $\mathbb{Z}$

– سير الحصة

المراحل	التسيير (الأنشطة المرافقة لكل مرحلة)	المدة	ملاحظات
الإنطلاق:	⋆ التهيئة النفسية: **نشاط :** ✣ عين باقي قسمة كل من العددين 128 و 86 على 7 . ماذا تلاحظ ؟ **مناقشة النشاط :** لدينا : $128 = 7 \times 18 + 2$ و $86 = 7 \times 12 + 2$ إذن : باقي قسمة كل من 128 و 86 على 7 هو 2 نلاحظ أن : للعددين نفس الباقي في القسمة على 7 .	10 د	مناقشة النشاط من طرف التلاميذ
بناء المفاهيم:	**الموافقات في $\mathbb{Z}$:** **تعريف :** n عدد طبيعي غير معدوم . القول إن عددين صحيحين a و b متوافقان بترديد n يعني أن a و b لهما نفس الباقي في القسمة على n . و نرمز : : $a \equiv b[n]$ و نقرء a يوافق b بترديد n . **مثال «①» :** ✦ لدينا : $10 \equiv 6[4]$ لأن : $10 = 4 \times 2 + 2$ ومنه : باقي قسمة 10 على 4 هو 2 كذلك : $6 = 4 \times 1 + 2$ ومنه : باقي قسمة 6 على 4 هو 2 **مثال «②» :** ✦ لدينا : $21 \equiv -11[8]$ لأن : $21 = 8 \times 2 + 5$ ومنه : باقي قسمة 21 على 8 هو 5 كذلك : $-11 = 8(-2) + 5$ ومنه : باقي قسمة -11 على 8 هو 5 **ملاحظة :** ⋆ من إجل كل عدد صحيح x : $x \equiv 0[1]$ ⋆ ترميز آخر $a \equiv b(n)$ **مبرهنة:** a و b عددان صحيحان و n عدد طبيعي غير معدوم . a و b لهما نفس الباقي في القسمة الإقليدية على n إذا و فقط إذا كان $a - b$ مضاعف لـ n .	15 د	

المراحل	التسيير (الأنشطة المرافقة لكل مرحلة)	المدة	ملاحظات
بناء المفاهيم	**البرهان :** ✦ نفرض أن a و b لهما نفس الباقي r في القسمة الإقليدية على n . نضع : $a = nq + r$ و $b = nq' + r$ حيث q و q' عددين صحيحين و $0 \leq r < n$ و منه : $a - b = nq + r - nq' - r = n(q - q')$ بما أن : $q - q'$ عدد صحيح فإن : $a - b$ مضاعف لـ n ✦ عكسيا : نفرض $a - b$ مضاعف لـ n يوجد عدد صحيح k حيث : $a - b = kn$ ليكن r باقي قسمة b على n إذن : $b = nq + r$ q عدد صحيح و $0 \leq r < n$ و منه : $a = b + kn = nq + r + kn = (q + k)n + r$ بما أن : $q + k$ عدد صحيح و $0 \leq r < n$ فإن : r هو باقي القسمة الإقليدية للعدد a على n . ومنه : a و b لهما نفس الباقي r في القسمة الإقليدية على n . **نتيجة :** a و b عددان صحيحان و n عدد طبيعي غير معدوم . a و b متوافقان بترديد n إذا و فقط إذا كان $a - b$ مضاعفا لـ n . **مثال :** $26 \equiv 11[5]$ لأن : $26 - 11 = 15$ و 15 مضاعف لـ 5 .	10 د	
تقويم	**تمرين تطبيقي :** أذكر الصحيحة و الخاطئة من الموافقات التالية : ① $13 \equiv 7[3]$ ② $39 \equiv -5[2]$ ③ $2017 \equiv 8[10]$ ④ $-41 \equiv -6[5]$ ⑤ $48^3 \equiv 38[7]$ **الحل :** ① $13 - 7 = 6$ و 6 مضاعف لـ 3 . صحيحة ② $39 + 5 = 44$ و 44 مضاعف لـ 2 . صحيحة ③ $2017 - 8 = 2009$ و 2009 ليس مضاعف لـ 10 . خاطئة ④ $-41 + 6 = -35$ و -35 مضاعف لـ 5 . صحيحة ⑤ $48^3 = 15799 \times 7 + 6$ و $38 = 5 \times 7 + 3$ لم تتحصل على نفس الباقي في القسمة على 7 . خاطئة حل التمرين 01و02و04 صفحة 78	25 د	

ملاحظات عامة حول الحصة: ....

المؤسسة: سليماني جلول — الأستاذ: بلبحري كمال — المادة : رياضيات

المستوى و الشعبة : الثالثة علوم تجريبية

المحتوى المعرفي : الأعداد و الحساب

الكفاءات المستهدفة: – تعاريف و خواص الموافقات في $\mathbb{Z}$

– سير الحصة

المراحل	التسيير (الأنشطة المرافقة لكل مرحلة)	المدة	ملاحظات
الإنطلاق:	⋆ التهيئة النفسية:		
بناء المفاهيم:	**خواص الموافقات في $\mathbb{Z}$:** **خاصية «①»:** n عدد طبيعي غير معدوم يختلف عن 1 ($n \geq 2$) . كل عدد صحيح a يوافق باقي قسمته على n ، بترديد n . **برهان :** a عدد صحيح و r باقي قسمته على n حيث $0 \leq r < n$. نعلم أن : $a = nq + r$ حيث q عدد صحيح و منه : $a - r = nq$. و بالتالي : $a - r$ مضاعف لـ n . **مثال :** ✣ باقي قسمة 45 على 7 هو 3 إذن : $45 \equiv 3[7]$ **خاصية «②»:** n عدد طبيعي غير معدوم . من أجل كل عدد صحيح a لدينا : $a \equiv a[n]$. **برهان :** a عدد صحيح . a و a لهما نفس الباقي في القسمة الإقليدية على n و منه : $a \equiv a[n]$ **مثال :** ✣ $2 \equiv 2[11]$ $\quad -5 \equiv -5[7]$ **خاصية «③»:** n عدد طبيعي غير معدوم . a و b عددان صحيحان . إذا كان : $a \equiv b[n]$ فإن : $b \equiv a[n]$.	15 د	

المراحل	التسيير (الأنشطة المرافقة لكل مرحلة)	المدة	ملاحظات
بناء المفاهيم:	**برهان :** a و b عددان صحيحان حيث $a \equiv b[n]$. $a \equiv b[n]$ يعني : $a-b=kn$ مع k عدد صحيح و منه : $b-a=-kn$ بما أن : $-k$ عدد صحيح فإن : $b \equiv a[n]$ **مثال :** ✣ لدينا : $11 \equiv 2[3]$ إذن : $2 \equiv 11[3]$ **خاصية «④»:** n عدد طبيعي غير معدوم . a ، b و c أعداد صحيحة . إذا كان : ($a \equiv b[n]$ و $b \equiv c[n]$) فإن : $a \equiv c[n]$. **برهان :** a ، b و c أعداد صحيحة حيث ($a \equiv b[n]$ و $b \equiv c[n]$) . ($a \equiv b[n]$ و $b \equiv c[n]$) يعني : $a-b=kn$ و $b-c=k'n$ مع k و k' عددان صحيحان و منه و بالجمع نحصل على : $a-c=(k+k')n$ بما أن : $k+k'$ عدد صحيح فإن : $a \equiv c[n]$ **مثال :** ($26 \equiv 11[5]$ و $11 \equiv 1[5]$) فإن : $26 \equiv 1[5]$. **خاصية «⑤»:** n عدد طبيعي غير معدوم . a ، b ، c و d أعداد صحيحة . إذا كان : ($a \equiv b[n]$ و $c \equiv d[n]$) فإن : $a+c \equiv b+d[n]$. **برهان :** a ، b ، c و d أعداد صحيحة حيث ($a \equiv b[n]$ و $c \equiv d[n]$) . ($a \equiv b[n]$ و $c \equiv d[n]$) يعني : $a-b=kn$ و $c-d=k'n$ مع k و k' عددان صحيحان و منه و بالجمع نحصل على : $(a+c)-(b+d)=(k+k')n$ بما أن : $k+k'$ عدد صحيح فإن : $a+c \equiv b+d[n]$ **مثال :** ($27 \equiv 11[4]$ و $23 \equiv 15[4]$) فإن : $27+23 \equiv 11+15[4]$. **خاصية «⑥»:** n عدد طبيعي غير معدوم . a ، b ، c و d أعداد صحيحة . إذا كان : ($a \equiv b[n]$ و $c \equiv d[n]$) فإن : $ac \equiv bd[n]$.	15 د	

ملاحظات عامة حول الحصة: ....

المراحل	التسيير (الأنشطة المرافقة لكل مرحلة)	المدة	ملاحظات
بناء المفاهيم:	**برهان :** a ، b ، c و d أعداد صحيحة حيث ($a \equiv b[n]$ و $c \equiv d[n]$) . ($a \equiv b[n]$ و $c \equiv d[n]$) يعني : $a-b=kn$ و $c-d=k'n$ مع : k و k' عددان صحيحان ، و منه : $ac-bd=ac-ad+ad-bd=a(c-d)+d(a-b)=ak'n+dkn=(ak'+dk)n$ بما أن : $a'k+dk$ عدد صحيح فإن : $ac \equiv bd[n]$ **مثال :** ($13 \equiv 5[4]$ و $7 \equiv 3[4]$) فإن : $13 \times 7 \equiv 5 \times 3[4]$. **خاصية «⑦»:** n عدد طبيعي غير معدوم . a و b عددان صحيحان . من أجل كل عدد صحيح k ، إذا كان : $a \equiv b[n]$ فإن : $ka \equiv kb[n]$. **برهان :** a و b عددان صحيحان حيث : $a \equiv b[n]$ ليكن k عددا صحيحا . لدينا : $k \equiv k[n]$ إذن بتطبيق الخاصية 6 نجد : $ka \equiv kb[n]$ **مثال :** $11 \equiv 3[4]$ فإن : $2 \times 11 \equiv 2 \times 3[4]$. **خاصية «⑧»:** n و p عددان طبيعيان غير معدومين . a و b عددان صحيحان . إذا كان : $a \equiv b[n]$ فإن : $a^p \equiv b^p[n]$. **برهان :** a و b عددان صحيحان حيث : $a \equiv b[n]$. (نستعمل البرهان بالتراجع) . من أجل $p=1$ لدينا : $a \equiv b[n]$ صحيحة من المعطيات . نفرض أن $a^k \equiv b^k[n]$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي $k \geq 1$. بتطبيق الخاصية 7 : $a^k \times a \equiv b^k \times b[n]$ أي : $a^{k+1} \equiv b^{k+1}[n]$. إذن : من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم p : إذا كان : $a \equiv b[n]$ فإن : $a^p \equiv b^p[n]$. **مثال :** $5 \equiv 1[2]$ فإن : $5^3 \equiv 1^3[2]$.	15 د	

ملاحظات عامة حول الحصة: ....

المراحل	السير (الأنشطة المرافقة لكل مرحلة)	المدة	ملاحظات
بناء المفاهيم	**تمرين تطبيقي :** ① عين حسب قيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 5 . ② استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد 1437^{2017} على 5 . ③ برهن أنه من من أجل كل عدد طبيعي n العدد $(\ 48^{4n+3} - 2\times 9^{2n+1} + 1\ )$ مضاعف للعدد 5 . ④ عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد $(\ 3^{4n} + 27^n - 4\ )$ قابلا للقسمة على 5 . **حل التمرين التطبيقي :** ① لدينا : $3^0 \equiv 1[5]$ ، $3^1 \equiv 3[5]$ ، $3^2 \equiv 4[5]$ ، $3^3 \equiv 2[5]$ ، $3^4 \equiv 1[5]$ بواقي قسمة 3^n على 5 تشكل متتالية دورية و دورها 4 و حسب الجدول التالي :	15 د	

n =	4k	4k + 1	4k + 2	4k + 3
$3^n \equiv$	1	3	4	2

② لدينا : $1437 \equiv 2[5]$ أي : $1437 \equiv (-3)[5]$ (لأن : $(-3) \equiv 2[5]$)

أي : $1437^{2017} \equiv (-3)^{2017}[5]$ لكن : $(-3)^{2017} \equiv (-1)^{2017} \times 3^{4(504)+1}[5]$

و منه : $1437^{2017} \equiv (-3)[5]$ لأن : $3^{4(504)+1} \equiv 3[5]$ و $(-1)^{2017} = -1$

إذن : $1437^{2017} \equiv (-3)[5]$ تكافيء : $1437^{2017} \equiv 2[5]$.

و بالتالي : باقي القسمة الإقليدية للعدد 1437^{2017} على 5 هو : 2 .

③ العدد $(\ 48^{4n+3} - 2\times 9^{2n+1} + 1\ )$ مضاعف للعدد 5

معناه : $(48^{4n+3} - 2\times 9^{2n+1} + 1) \equiv 0[5]$

لدينا : $48 \equiv 3[5]$ و منه : $48^{4n+3} \equiv 3^{4n+3}[5]$

أي : $48^{4n+3} \equiv 2[5]$ (حسب الجدول)

و لدينا : $9^{2n+1} \equiv 3^{4n+2}[5]$ (حسب الجدول)

و عليه : $(48^{4n+3} - 2\times 9^{2n+1} + 1) \equiv 2 - 2\times 4 + 1[5]$

أي : $(48^{4n+3} - 2\times 9^{2n+1} + 1) \equiv -5[5]$

لكن : $-5 \equiv 0[5]$ إذن : $(48^{4n+3} - 2\times 9^{2n+1} + 1) \equiv 0[5]$

④ العدد $(\ 3^{4n} + 27^n - 4\ )$ قابلا للقسمة على 5

معناه : $(3^{4n} + 27^n - 4) \equiv 0[5]$

لدينا : $27^n \equiv 3^{3n}[5]$ و لدينا : $3^{4n} \equiv 1[5]$

و منه : $(3^{4n} + 27^n - 4) \equiv 0[5]$ تكافيء : $3^{3n} \equiv 3[5]$

من الجدول نستنتج أن : $3n \equiv 1[4]$ أي : $n \equiv 3[4]$

إذن : $n = 4p + 3$ حيث : $p \in \mathbb{N}$.

تقويم

حل التمرين 17و 21و 31و 32 صفحة 79

حل التمرين 69و 70و 71 صفحة 81

ملاحظات عامة حول الحصة: ....