الرقم:14/01

المؤسســـــة:	المستــــوى: 3 رياضي، 3 ت رياضي
السنة الدراسية:2015 / 2016.	ميدان التعلم: الأعداد و الحساب
التاريـــــــخ:	الوحدة: القسمة الإقليدية في z .
توقيت الحصـة:.	موضوع الحصة: قابلية القسمة في z

المكتسبات القبلية:

الكفاءات القاعدية: إثبات أن عددا صحيحا يقسم عددا صحيحا آخر.

مؤشرات الكفـاءة:

الأنشطة المقترحة وطبيعتها	الإنجاز (سير الحصة)	توجيهات و تعاليق و أنشطة
نشاط: أذكر قواسم كل عدد مما يلي: 8، 6، 4، -4 ، 7، 1، 0.	**I/ تمهيد:** **II/ العرض:** **قابلية القسمة في Z :** **تعريف:** a و b عددان صحيحان و a غير معدوم. القول إن العدد a يقسم العدد b يعني وجود عدد صحيح k حيث: $b = ak$. نقول كذلك a قاسم للعدد b أو نقول كذلك b مضاعف للعدد a . ونكتب a / b ونقرأ a يقسم b. أمثلة: $6 \times 8 = 48$ و منه $6/48$. وكذلك: $(-6) \times (-8) = 48$ ومنه $(-6)/48$ $(-13) \times 5 = (-65)$ ومنه $5/(-65)$. وكذلك: $5 \times (-13) = (-65)$ ومنه $(-13)/(-65)$. **ملاحظة:** 1/ في z للعددين a و a - نفس القواسم. 2/ مجموعة قواسم 0 هي Z^* . **خواص القواسم:** c،b،a ثلاثة أعداد صحيحة غير معدومة. **خاصية1:** إذا كان a يقسم b و b يقسم c فإن a يقسم c. البرهان:(سهل) **خاصية2:** إذا كان a يقسم b فإنه من أجل كل عدد صحيح m ، a يقسم mb. البرهان:(أسهل) **خاصية3:** إذا كان a يقسم b فإنه من أجل كل عدد صحيح غير معدوم m ،ma يقسم mb.البرهان:(سهل) **خاصية4:** إذا كان a يقسم العددين b و c فإنه من أجل كل عددين صحيحين m و n ، a يقسم $mb + nc$. البرهان:(سهل) **III/ تطبيق:ت1)** من رقم 1 إلى 17 ص56. **ت2)** نفرض أن أول جانفي 2008 وافق يوم الثلاثاء. 1- أحسب عدد الأيام من هذا التاريخ إلى يومنا هذا. واستنتج عدد الأسابيع. 2- نفس السؤال بين هذا التاريخ ويوم 2000/01/01. استنتج اليوم من الأسبوع الذي وافقه 2000/01/01. **ت2)** n يحقق $2n+3$ يقسم 8. عيّنه. (سهل) **ت3)** عين 10 أعداد صحيحة n تحقق $7/n+5$.(سهل) **ت4)** عين كل الأعداد الصحيحة n التي تحقق $3n+8$ يقسم $n+6$.(لاحظ أنه يكون يقسم أيضا $3n+8$ و $3n+18$ وبالتالي يقسم فرقهما (10) ومنه $3n+18$ ينتمي إلى ...)	يتعلق الأمر بالخواص التالية، التي يتعين إثباتها: إذا كان a يقسم b و b يقسم c فإن a يقسم c . إذا كان a يقسم b فإنه من أجل كل عدد صحيح k، a يقسم kb و ka يقسم kb. إذا كان a يقسم b و c فإنه من أجل كل x و y من z ، لدينا a يقسم $ax+by$. نجد هنا فرصا لممارسة بعض أنماط البرهان. تعديل 2009/2008: ...... ويحذف أيضا مبرهنة فيرما الصغيرة.

الرقم:14/02

المؤسسـ ــــة:	المستـ ــوى: 3 رياضي، 3 ت رياضي
السنة الدراسية:2015 / 2016.	ميدان التعلم: الأعداد والحساب
التاريـ ـــــخ:	الوحدة: القسمة الإقليدية في z .
توقيت الحصـة:.	موضوع الحصة: خواص قابلية القسمة في z

المكتسبات القبلية:

الكفاءات القاعدية: استعمال خواص قابلية القسمة في z ، استعمال خوارزمية إقليدس لتعيين القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين.

مؤشرات الكفـاءة:

الأنشطة المقترحة وطبيعتها	الإنجاز (سير الحصة)	توجيهات و تعاليق و أنشطة
نشاط1: نعتبر الثنائية (a,b) حيث $a=-47$ ، $b=4$. ما هي الثنائية (q,r) التي تحقق $a=bq+r$ و $0\le r<b$ ؟ **نشاط2:** نرمز بـ D_x لمجموعة قواسم العدد الطبيعي x . 1- جد D_8 ، D_{24} ، $D_8\cap D_{24}$. 2- ما هو أكبر عنصر في $D_8\cap D_{24}$ ؟ وماذا نسميه؟ **نشاط3:** a و b عددان طبيعيان غير معدومين حيث $a\ge b$. r باقي قسمة a على b. نضع $PGCD(a,b)=d$ و $PGCD(b,r)=d'$. و $a=bq+r$. 1/ بين أن d يقسم r. وأن d' يقسم a. 2/ ماذا تستنتج فيما يخص القواسم المشتركة لـa و b والقواسم المشتركة لـb وr. 3/ استنتج أن $PGCD(a,b)=PGCD(b,r)$.	**I/ تمهيد:** **II/ العرض:** **القسمة الإقليدية في z:** **مبرهنة:** a عدد صحيح و b عدد طبيعي غير معدوم. توجد ثنائية وحيدة (q,r) من الأعداد الصحيحة حيث $a=bq+r$ و $0\le r<b$. نسمي عملية البحث عن الثنائية (q,r) القسمة الإقليدية للعدد a على العدد b. يسمى q و r بهذا الترتيب حاصل وباقي القسمة الإقليدية للعدد a على العدد b. (البرهان: العدد a إما مضاعف لـ b وإما محصور بين مضاعفين متتابعين لـ b أي يوجد q عدد صحيح وحيد حيث $qb\le a<(q+1)b$ و نستنتج من هذا أن $0\le a-qb<b$. نضع $r=a-qb$ ومنه لدينا $a=bq+r$ مع $0\le r<b$). **ملاحظة:** يمكن تمديد مفهوم القسمة الإقليدية لعدد صحيح a على عدد صحيح غير معدوم b. ونحصل على $a=bq+r$ و $0\le r<\|b\|$. **القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين:** **تعريف:** a و b عددان طبيعيان غير معدومين. D_a و D_b مجموعتا قواسمهما على الترتيب. $D_a\cap D_b$ هي مجموعة القواسم المشتركة لهما. يسمى أكبر عنصر من $D_a\cap D_b$ القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b . ونرمز له بـ $PGCD(a,b)$. **ملاحظات:** $PGCD(a,a)=a$ و $PGCD(1,a)=1$ و $PGCD(0,a)=a$ (a غير معدوم) . مجموعة القواسم المشتركة لعددين طبيعيين غير معدومين هي مجموعة قواسم قاسمهما الأكبر. **خواص القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين:** **خاصية1:** a و b عددان طبيعيان غير معدومين حيث $a\ge b$. r باقي قسمة a على b . $PGCD(a,b)=PGCD(b,r)$.(البرهان: نشاط2). **خوارزمية إقليدس:** a و b عددان طبيعيان غير معدومين حيث $a>b$. بقسمة a على b نحصل على $a=bq_1+r_1$ و $0\le r_1<b$ حيث q_1 و r_1 عددان طبيعيان. إذا كان $r_1=0$ (أي b يقسم a) فإن $PGCD(a,b)=b$. إذا كان $r_1\ne 0$ فإن $PGCD(a,b)=PGCD(b,r_1)$. نقسم b على r_1 نحصل على $b=r_1q_2+r_2$ و $0\le r_2<r_1$ حيث q_2 و r_2 عددان طبيعيان. إذا كان r2=0 (أي r1 يقسمb) فإن PGCD(a ;b)=PGCD(b ;r1)=r1. إذا كان r2≠0 فإن PGCD(a ;b)= PGCD(b ;r1)=PGCD(r1 ;r2). نقسم r1 على r2 نحصل على r1=r2q3+r3 و 0≤r3<r2 حيث q3 و r3 عددان طبيعيان. نواصل هكذا حتى نجد باقيا معدوما . ونسمي r_n آخر باقي غير معدوم وعليه: $PGCD(a;b)=PGCD(b;r1)=PGCD(r1;r2)=\ldots=PGCD(rn;0)=r_n$ هذه الطريقة لإيجاد القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين تسمى خوارزمية إقليدس. **III/ تطبيق: ت1)** أرقام 33، 34، 35 ص57. ثم من66 إلى 71 ص 59.(حل، أنظر يسارا) **ت2)** a عدد صحيح باقي قسمته على 10 هو 6. ما هو باقي قسمته على 5؟ ثم على2؟	تبرهن الخاصية : من أجل $a\in z$ و $b\in z_+^*$. توجد ثنائية وحيدة (q,r) (q و r عددان صحيحان) حيث $a=bq+r$ و $0\le r<b$ كما تبرهن المساواة: $PGCD(a,b)=PGCD(b,r)$ تعديل 2008/2009: يحذف "برهان الوجود والوحدانية في القسمة الإقليدية" ويقتصر على توظيف القسمة الإقليدية. ويحذف أيضا مبرهنة فيرما الصغيرة. (رقم70: تعيين الأعداد الطبيعية n غير المعدومة التي يكون باقي قسمتها على 43 مساويا لمربع حاصلها: حل: نجد: $n=43b+b^2$ مع $0\le b^2<43$ ، فيكون $0\le b\le 6$. ولكن نلاحظ أن $b\ne 0$ لأن n غير معدوم ... أكمل)

الرقم:14/03

المؤسســـــة:	**المستـــوى:** 3 رياضي، 3 ت رياضي
السنة الدراسية:2015 / 2016.	**ميدان التعلم:** الأعداد والحساب
التاريـــــخ:	**الوحدة:** القسمة الإقليدية في z .
توقيت الحصـة:.	**موضوع الحصة:** العددان الأوليان فيما بينهما

المكتسبات القبلية:

الكفاءات القاعدية: استعمال خواص قابلية القسمة في z

مؤشرات الكفـاءة:

الأنشطة المقترحة وطبيعتها	الإنجاز (سير الحصة)	توجيهات و تعاليق و أنشطة

نشاط:

a و b عددان من N^* و d قاسم مشترك لهما. نضع $a = da'$ و $b = db'$.

1/ نفرض أن $PGCD(a,b) = d$

بين باستخدام الخاصية 3 أن a' و b' أوليان فيما بينهما.

2/ نفرض أن a' و b' أوليان فيما بينهما. بين أن $PGCD(a,b) = d$.

I/ تمهيد:

II/ العرض:

خاصية2: القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين غير معدومين a و b هو آخر باقي غير معدوم في سلسلة قسمات خوارزمية إقليدس.

مثال: تعيين PGCD(1631 ,932) :

القواسم	1631	932	699	233			
البواقي		699	233	0			

PGCD(1631 ,932) = 233

خاصية3: a، b و k أعداد طبيعية غير معدومة. $PGCD(ka,kb) = k \times PGCD(a,b)$.

(البرهان: نضع $PGCD(a,b) = d$ و $PGCD(ka,kb) = d'$. d و d’ عددان طبيعيان غير معدومين.
d يقسم a و منه kd يقسم ka. d يقسم b و منه kd يقسم kb وبالتالي kd قاسم مشترك للعددين ka و kb إذن kd يقسم القاسم المشترك الأكبر للعددين ka و kb أي kd يقسم d’ ومنه يمكن كتابة $d' = k'(kd)$ حيث k’ عدد طبيعي. كذلك d’ يقسم ka و kb . ومنه $k'kd$ يقسم ka و kb وبالتالي k’d يقسم a و b وبالتالي k’d يقسم القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b وبالتالي k’=1 . ومنه $d' = kd$. إذن $PGCD(ka,kb) = k \times PGCD(a,b)$).

العددان الأوليان فيما بينهما:

تعريف: a و b عددان طبيعيان غير معدومين .

يكون العددان a و b أوليين فيما بينهما إذا وفقط إذا كان $PGCD(a,b) = 1$.

خاصية4: a و b عددان من N^* . d قاسم مشترك لهما. نضع $a = da'$ و $b = db'$.

يكون d القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b إذا و فقط إذا كان a' و b' أوليين فيما بينهما.

(البرهان: النشاط)

III/ تطبيق:

نضع $a = 1440$ ، $b = 448$.

باستخدام خوارزمية اقليدس جد القاسم المشترك الأكبر لهما. (جواب: 32)

نبرهن أن:
$PGCD(ka,kb) = k \times PGCD(b,r)$

و نبرهن أن:
$PGCD(a,b) = d$
يكافئ: $a = da'$ و $b = db'$
مع a' و b' أوليان فيما بينهما.

الرقم:14/04

المستـــوى: 3 رياضي، 3 ت رياضي	المؤسســـــة:
ميدان التعلم: الأعداد والحساب	السنة الدراسية: 2015 / 2016.
الوحدة: القسمة الإقليدية في z .	التاريـــــخ: ....
موضوع الحصة: القاسم المشترك الأكبر	توقيت الحصـة:.

المكتسبات القبلية:

الكفاءات القاعدية: استعمال خوارزمية إقليدس لتعيين القواسم المشتركة لعددين طبيعيين.

مؤشرات الكفـاءة:

الأنشطة المقترحة وطبيعتها	الإنجاز (سير الحصة)	توجيهات و تعاليق و أنشطة
نشاط1: (حل تطبيق الحصة السابقة) نضع $a = 1440$، $b = 448$. باستخدام خوارزمية اقليدس جد القاسم المشترك الأكبر لهما. (جواب: 32) **نشاط2:** جد كل القواسم الصحيحة المشتركة للعددين 24-، 36-. ثم جد القاسم المشترك الأكبر لهما.	**I/ تمهيد:** **II/ العرض:** **تمديد مفهوم القاسم المشترك الأكبر لعددين صحيحين:** **تعريف:** a و b عددان صحيحان غير معدومين. القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b هو العدد الطبيعي $PGCD(\|a\|,\|b\|)$. **خاصية5:** a و b عددان صحيحان غير معدومين . k عدد صحيح غير معدوم. $PGCD(ka,kb) = \|k\|PGCD(a,b)$ **ملاحظة6:** a و b عددان صحيحان غير معدومين. إذا كان b يقسم a فإن $PGCD(a, b) = \|b\|$. **III/ تطبيق:** ت1) من رقم إلى ص . ت2) عين $PGCD(a,b)$ في كل حالة مما يلي: 1/ $a = 8700$ ، $b = 9150$. 2/ $a = -2007$ ، $b = -691$. 3/ $a = 1500$ ، $b = 250$.	توسيع مفهوم القاسم المشترك الأكبر إلى z .

الرقم: 14/05

المؤسســـــة:	**المستــــوى:** 3 رياضي، 3 ت رياضي
السنة الدراسية: 2015 / 2016.	**ميدان التعلم:** الأعداد والحساب
التاريـــــــخ:	**الوحدة:** القسمة الإقليدية في z .
توقيت الحصـة:.	**موضوع الحصة:** حل مشكلات

المكتسبات القبلية:

الكفاءات القاعدية: - حل مشكلات بتوظيف خواص القاسم المشترك الأكبر.

مؤشرات الكفـاءة:

الأنشطة المقترحة وطبيعتها	الإنجاز (سير الحصة)	توجيهات و تعاليق و أنشطة
كل الحصة عبارة عن أنشطة	**I/ تمهيد:** **II/ العرض:** **III/ تطبيق:** ت1) **(مسألة)** 1- x عدد طبيعي. برهن أنه من أجل كل k من N^* : $(x-1)(1+x+x^2+x^3+...+x^{k-2}+x^{k-1})=x^k-1$. 2- d ، n ، a أعداد طبيعية غير معدومة، و d يقسم n . برهن أن (a^d-1) يقسم (a^n-1). 3- استنتج أن $2^{2010}-1$ يقبل القسمة على7، ثم على63، ثم على9. 4- عين $p\gcd(63,60)$. 5- بين أن: $(a^{63}-1)-(a^{60}-1)a^3=a^3-1$. 6- برهن أن: $p\gcd(a^{63}-1,a^{60}-1)=a^3-1$. 7- استنتج $p\gcd(2^{63}-1,2^{60}-1)$. (<u>حل مختصر</u>: 1- أنشر الجداء 2- لاحظ أن $a^n-1=(a^d)^l-1$ وطبق الجواب السابق 3- لاحظ أن $2^{2010}-1=(2^3)^{670}-1=(2^6)^{335}-1$ وأما فيما يخص 9 فلدينا 9 يقسم 63 و 63 يقسم $2^{2010}-1$ ... 4- سهل 5- أنشر وبسط الطرف الأيسر 6- أولا: a^3-1 يقسم كلا من $a^{60}-1$ ، $a^{63}-1$ حسب2- فكل قاسم له قاسم لهما. ثانيا: كل قاسم لهما قاسم له حسب 5- ...7- تع: ضع $a=2$) ت2) مصنع يعلب منتجاته في صناديق متماثلة على شكل مكعب طول حرفه عدد صحيح x بالديسمتر. أما مقطورة الشاحنة التي تحمل هذه البضائع فعبارة عن متوازي مستطيلات عرضه 2.4 متر، وطوله6 متر، وارتفاعه 3.6 متر. يراد استغلال المقطورة بشكل تام، دون ترك فراغات. 1/ عين أكبر قيمة يمكن أن يأخذها x . 2/ ما هي كل القيم الممكنة لـ x ؟	يمكن اقتراح مشكلات من الواقع مثل تبليط أرضية مستطيلة الشكل ، رصف علب (متوازي مستطيلات) في صندوق(متوازي مستطيلات) ذو أبعاد معلومة، ...

الرقم:14/06

المؤسســـــة:	**المستـــوى:** 3 رياضي، 3 ت رياضي
السنة الدراسية: 2015 / 2016.	**ميدان التعلم:** الأعداد والحساب
التاريــــــخ:	**الوحدة:** الموافقات في z
توقيت الحصـة:.	**موضوع الحصة:** الموافقات في z

المكتسبات القبلية:

الكفاءات القاعدية: - معرفة واستعمال خواص الموافقات في z .

مؤشرات الكفـاءة:

الأنشطة المقترحة وطبيعتها	الإنجاز (سير الحصة)	توجيهات و تعاليق و أنشطة

الأنشطة المقترحة وطبيعتها

نشاط1: n عدد طبيعي غير معدوم. a و b عددان صحيحان. بين أنه إذا كان لـ a و b نفس باقي القسمة على n فإن a - b مضاعف لـ n.(حل: أنظر المبرهنة في عمود الإنجاز)

نشاط2: n عدد طبيعي غير معدوم. a و b ، c و d أعداد صحيحة. بين أن:

1/ $a \equiv a[n]$.

2/ إذا كان $a \equiv b[n]$ فإن $b \equiv a[n]$.

3/ إذا كان $a \equiv b[n]$ و $b \equiv c[n]$ فإن $a \equiv c[n]$.

4/ إذا كان $a \equiv b[n]$ و $c \equiv d[n]$ فإن $a + c \equiv b + d[n]$ و $ac \equiv bd[n]$. (للبرهان: مع **الجمع** استخدم المبرهنة أعلاه ومع **الضرب**: أنظر "الملحق")

5/ إذا كان $a \equiv b[n]$ فإن $ca \equiv cb[n]$. (للبرهان: لاحظ أن $a \equiv b[n]$ و $c \equiv c[n]$ وطبق الخاصية السابقة).

الإنجاز (سير الحصة)

I/ تمهيد:

II/ العرض:

الموافقات في z :

تعريف: n عدد طبيعي غير معدوم. القول إن عددين صحيحين a و b متوافقان بترديد n يعني أن a و b لهما نفس الباقي في القسمة على n. ونكتب $a \equiv b[n]$ أو $a \equiv b(n)$ و نقرأ a يوافق b بترديد n.

أمثلة: $27 \equiv 92[5]$ ، $-59 \equiv -3[8]$ ، $-20 \equiv 1[7]$ ، $24 \equiv 3[7]$ ، $12 \equiv 34[11]$.

ملاحظة: من أجل كل عدد صحيح x ، نجد: $x \equiv 0[1]$.

مبرهنة: a و b عددان صحيحان و n عدد طبيعي غير معدوم.

$\boxed{a \equiv b[n] \text{ تكافئ } a - b \text{ مضاعف لـ } n \text{ تكافئ } a - b \equiv 0[n]}$.

(**البرهان:** نفرض و b أن لهما نفس الباقي r في القسمة الإقليدية على n. ومنه نضع $a = nq + r$ و $b = nq' + r$ حيث q و q' عددان صحيحان و $0 \le r < n$. ونجد $a - b = nq + r - nq' - r$ ومنه $a - b = n(q - q')$ بما أن $q - q'$ عدد صحيح فإن مضاعف لـ n . **عكسيا**: نفرض $a - b$ مضاعف لـ n . يوجد عدد صحيح k حيث أن $a - b = kn$. ليكن r باقي قسمة b على n . لدينا $b = nq + r$ حيث q عدد صحيح و $0 \le r < n$. و منه $a = b + kn = nq + r + kn = (q + k)n + r$. بما أن $q + k$ عدد صحيح و $0 \le r < n$ فإن r هو باقي القسمة الإقليدية للعدد a على n . ومنه a و b لهما نفس الباقي في القسمة الإقليدية على n)

خواص: n عدد طبيعي غير معدوم. a ، b ، c و d أعداد صحيحة.

1/ a يوافق باقي قسمته على n ، بترديد n.(للبرهان $0 \le r < n$ و $a = nq + r$ و $a - r$).

2/ $a \equiv a[n]$. 3/ $0 \equiv n[n]$ 4/ إذا كان $a \equiv b[n]$ فإن $b \equiv a[n]$.

5/ إذا كان $a \equiv b[n]$ و $b \equiv c[n]$ فإن $a \equiv c[n]$.

6/ إذا كان $a \equiv b[n]$ و $c \equiv d[n]$ فإن $a + c \equiv b + d[n]$ و $ac \equiv bd[n]$.

7/ من أجل كل عدد صحيح k، إذا كان $a \equiv b[n]$ فإن $ka \equiv kb[n]$.

8/ p عدد طبيعي غير معدوم. إذا كان $a \equiv b[n]$ فإن $a^p \equiv b^p[n]$.

(للبرهان: استخدم الاستدلال بالتراجع)

III/ تطبيق: ت1) من رقم 01 إلى رقم29ص78 و 79.

ت2) a و b حدان كيفيان من متتالية حسابية أساسها عدد طبيعي l غير معدوم. بين أن $a \equiv b[l]$.

ت3) 1/ ما هو باقي قسمة -7814 على 251؟

2/ عين كل الأعداد الصحيحة x التي تحقق: $x + 4 \equiv 2[7]$.

3/ ما هي L مجموعة الأعداد الصحيحة x حيث: $5x \equiv 3[7]$؟ ثم نفس السؤال من أجل $5x \equiv 2[7]$؟

4/ عين حسب قيم العدد الطبيعي n باقي قسمة 3^n على 5. واستنتج باقي قسمة 3^{4039} على 5.

ملحق: نجد $a - b = kn$ و $c - d = k'n$ و

$(ac - bd = ac - ad + ad - bd = a(c - d) + d(a - b) = ak'n + dkn = (ak + dk)n$

توجيهات و تعاليق و أنشطة

- تبرهن الخواص المتعلقة بتلاؤم الموافقة مع العمليتين + و ×. تقترح أنشطة متنوعة مثل:
- إيجاد باقي قسمة، حيث يمكن إبراز محدودية الحاسبة.

الرقم: 14/07

المؤسســـــة:	**المستـــوى:** 3 رياضي، 3 ت رياضي
السنة الدراسية: 2015 / 2016.	**ميدان التعلم:** الأعداد والحساب
التاريــــــخ:	**الوحدة:** الموافقات في z
توقيت الحصـة:.	**موضوع الحصة:** المعادلات من الشكل: $ax+by=c$ في z.

المكتسبات القبلية:

الكفاءات القاعدية: استعمال خواص الموافقات في z.

مؤشرات الكفـاءة:

الأنشطة المقترحة وطبيعتها	الإنجاز (سير الحصة)	توجيهات و تعاليق و أنشطة
نشاط1: نعتبر المعادلة $ax+by=c...(1)$ في z^2 (المجهول هو (x,y)) و a، b و c أعداد طبيعية. بين أنه إذا كان c لا يقبل القسمة على $p\gcd(a,b)$ فإن (1) لا تقبل حلولا. **نشاط2:** نعتبر في z^2 المعادلة $5x-8y=3...(1)$ 1/ بين أن (1) تقبل حلولا. 2/ هل $(7,4)$ حل لـ(1)؟ 3/ إذا كان (x,y) حلا لـ(1) بين أن $5(x-7)\equiv 0[8]$. 4/ نقبل أن $(x-7)\equiv 0[8]$، حل(1).	**I/ تمهيد:** **II/ العرض:** **حل معادلات من الشكل: $ax+by=c$ في z :** **نتيجة:** a، b و c أعداد طبيعية. نقبل أن المعادلة $ax+by=c...(1)$ في z^2 تقبل حلولا إذا وفقط إذا كان c يقبل القسمة على $p\gcd(a,b)$. **III/ تطبيق: ت1)** من رقم 30 إلى رقم32 ص 79. **ت2)** حل في z^2 كل معادلة مما يلي: $7x+12y=5...(1)$، $20x-45y=5...(2)$، $6x-8y=9...(3)$.	حل معادلات من الشكل: $ax+by=c$ في z. تقترح أنشطة متنوعة حول قابلية القسمة توظف فيها الموافقات.

الرقم:14/08

المؤسســـة:	**المستـــوى:** 3 رياضي، 3 ت رياضي
السنة الدراسية: 2015 / 2016.	**ميدان التعلم:** الأعداد والحساب
التاريـــــخ:	**الوحدة:** التعداد
توقيت الحصـة:.	**موضوع الحصة:** أنظمة التعداد

المكتسبات القبلية:

الكفاءات القاعدية: نشر عدد طبيعي وفق أساس . الانتقال من نظام أساسه a إلى نظام أساسه b.

مؤشرات الكفـاءة:

الأنشطة المقترحة وطبيعتها	الإنجاز (سير الحصة)	توجيهات و تعاليق و أنشطة
نشاط: نعتبر $a = 719$ و $x = 5$.		

الأنشطة المقترحة وطبيعتها

نشاط:

نعتبر $a = 719$ و $x = 5$.

1/ جد a_0، b_1 باقي وحاصل قسمة a على x.

لدينا $\boxed{a = b_1x + a_0 ...(1)}$ حيث $0 \le a_0 < x$.

2/ إذا كان $b_1 \ge x$ جد a_1، b_2 باقي وحاصل قسمة b_1 على x.

لدينا $\boxed{b_1 = b_2x + a_1 ...(2)}$

3/ واصل العمل لتحصل على مساويات أخرى $\boxed{b_2 = b_3x + a_2 ...(3)}$ حتى يصبح حاصل القسمة أصغر تماما من x.

4/ بين أن: $a = a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + ...$ ثم عبر عن 719 بدلالة 5^0، 5^1، 5^2، ...

الإنجاز (سير الحصة)

I/ تمهيد:

II/ العرض:

التعداد:

مبرهنة: x عدد طبيعي أكبر تماما من 1. كل عدد طبيعي a أكبر من أو يساوي x يكتب بطريقة وحيدة على الشكل $a = a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + ... + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$

حيث $0 < a_i < x$ مع $i \in \{0, 1, 2, ..., n\}$.

(البرهان: a و x عددان طبيعيان حيث $a \ge x$ و $x \ge 2$. عند قسمة a على x ثم قسمة الحاصل على x ومواصلة العمل إلى غاية الحصول على حاصل القسمة أصغر تماما من x، وتسجيل البواقي، مع المساواة المحققة من القاسم والمقسوم الحاصل والباقي في كل مرة نحصل على المطلوب).

التعداد ذو الأساس x:

قاعدة: x عدد طبيعي غير معدوم أكبر تماما من 1. a عدد طبيعي.

لكتابة a في نظام التعداد ذي الأساس x نميز الحالتين التاليين:

1/ إذا كان $a < x$ يمثل a برمز واحد يسمى رقما، فنكتب: $a = \overline{a}^x$.

2/ إذا كان $a \ge x$، نكتب: $a = \overline{a_na_{n-1}....a_2a_1a_0}^x$ والأعداد a_i هي الواردة في المبرهنة أعلاه، ونسميها أرقاما.

ملاحظة: إذا كان $x = 10$ نكتب $a = a_na_{n-1}....a_2a_1a_0$.

أمثلة:

1/ نعتبر في النظام العشري $a = 57$، ونجد: $a = 0 \times 3^0 + 1 \times 3 + 0 \times 3^2 + 2 \times 3^3$، ومنه....

2/ أكتب57 في النظام ذي الأساس5.

3/ نعتبر $a = \overline{1026}^7$، أكتب a في التعداد العشري.

III/ تطبيق: ت1) رقم 33 وما بعده ص79 وما بعدها.

ت2) a عدد طبيعي يكتب في النظام الذي أساسه 4 كما يلي: $\overline{332}^4$. أكتبه في النظام الثنائي بطريقتين.

ت3) (**مسألة** ـ قواعد قابلية القسمة) a عدد طبيعي يكتب في النظام العشري . $a = a_na_{n-1}....a_2a_1a_0$.

1/ أكتب كل ما تحققه الأرقام a_0، a_1، ...، a_n. (جواب: محصورة بين 0 و 9 و $a_n \ne 0$ و $a = a_0 + a_1 \times 10 + a_2 \times 10^2 + ... + a_n \times 10^n$)

2/ أذكر الشرط حتى يقبل a القسمة على10. ثم على5. ثم على2.

3/ بين أن: $a \equiv (10a_1 + a_0)[4]$، واستنتج شرط قابلية القسمة على4.

4/ لاحظ أن: $10 \equiv 1[3]$ وأن: $10 \equiv 1[9]$ واستنتج أن: $a \equiv (a_n + ... + a_1 + a_0)[3]$ وأن: $a \equiv (a_n + ... + a_1 + a_0)[9]$ ثم جد شرطي قابلية القسمة على3 و 9.

ت4) **1/** جد القيم الممكنة للعدد الطبيعي x الذي يحقق: $\overline{2x31}^4 = \overline{xx}^{41}$.

2/ حل في N المعادلة التالية ذات المجهول x: $\overline{12(x-1)}^5 = \overline{21(x-2)}^x$.

توجيهات و تعاليق و أنشطة

يبرهن وجود ووحدانية نشر عدد طبيعي N وفق أساس x من الشكل $N = a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + ... + a_nx^n$

الرقم: 14/09

المؤسســـــة:	**المستــــوى:** 3 رياضي، 3 ت رياضي
السنة الدراسية: 2015 / 2016.	**ميدان التعلم:** الأعداد والحساب
التاريـــــــخ:	**الوحدة:** الأعداد الأولية ـ المضاعف المشترك الأصغر
توقيت الحصـة:.	**موضوع الحصة:** الأعداد الأولية

المكتسبات القبلية:

الكفاءات القاعدية: التعرف على أولية عدد طبيعي.

مؤشرات الكفـاءة:

الأنشطة المقترحة وطبيعتها	الإنجاز (سير الحصة)	توجيهات و تعاليق و أنشطة
نشاط1: أذكر مجموعة قواسم كل عدد مما يلي: 8، 10، 5، 3، 7، 2، 1، 0. **نشاط2:** n عدد طبيعي غير أولي أكبر من 1، ولتكن A مجموعة قواسمه باستثناء 1 و n. وليكن p أصغر عنصر في A. بين أن p أولي. (استعمل البرهان بالخلف)	انظر النص أدناه	يبرهن وجود تحليل عدد طبيعي إلى جداء عوامل أولية و نقبل، دون برهان، وحدانية هذا التحليل.

I/ تمهيد:

II/ العرض:

الأعداد الأولية:

تعريف: القول إن العدد الطبيعي n أولي معناه أن n يقبل قاسمين بالضبط في N : 1 و n نفسه.

ملاحظات ونتائج:

1، 0 غير أولين. و2 هو العدد الزوجي الأولي الوحيد.

2، 3، 5، 7، 11، 13، 17، 19، 23 هي كل الأعداد الأولية الأصغر من 25.

خواص:

خاصية1: كل عدد طبيعي n أكبر تماما من 1 يقبل على الأقل قاسما أوليا. (البرهان: ليكن n عددا طبيعيا أكبر تماما من 1. إذا كان n أوليا فإن n يقسم n والخاصية محققة. إذا كان n غير أولي فانظر النشاط2)

خاصية2: كل عدد طبيعي n غير أولي أكبر تماما من 1 يقبل قاسما أوليا a حيث $a \le \sqrt{n}$.

(البرهان: ليكن n عددا طبيعيا غير أولي أكبر تماما من 1. n يقبل قاسما d يختلف عن 1 وعن n ومنه $n=d\times d'$ حيث d' عدد طبيعي غير معدوم. $d'\geq 2$ (لأنه لا يمكن أن يكون $d=n$) نفرض $d\leq d'$ ومنه $d^2 < d\times d'$ أي $d^2 \le n$ وبالتالي $d \le \sqrt{n}$. إذا لم يكن d أوليا فمن الخاصية1 يتضح المطلوب).

خاصية3: مجموعة الأعداد الأولية غير منتهية .

(البرهان بالخلف. نفرضها منتهية. و p أكبرها. نضع N جداء كل الأعداد الأولية $N = 2\times 3\times 5\times 7\times \ldots\times p$. ليكن $N' = N+1$. واضح أن N' غير قابل للقسمة على كل الأعداد الأولية. إذا كان N' غير أولي فإن N' يقبل قاسما أوليا أكبر من p (الخاصية1) وهذا تناقض. إذن هو أولي. ولكن $N' > N$! إذن مجموعة الأعداد الأولية غير منتهية).

تحليل عدد طبيعي إلى جداء عوامل أولية:

مبرهنة: كل عدد طبيعي غير أولي n حيث $n \ge 2$ يمكن تحليله إلى جداء عوامل أولية.

البرهان: من الخاصية1، n يقبل القسمة على عدد أولي p_1 ($p_1 \ge 2$) على الأقل ومنه: $n = p_1 \times n_1$ حيث $1<n_1<n$. إذا كان n_1 أوليا فإن المبرهنة محققة. وإلا فإن n_1 يقبل القسمة على عدد أولي p_2 ($p_2 \ge 2$) على الأقل ومنه: $n_1 = p_2 \times n_2$ حيث $1<n_2<n_1$. ومنه $n = p_1\times p_2\times n_2$. بما أن الأعداد n_1، n_2، n_3،... متناقصة سنحصل على $n_i = 1$ بعد أقل من n عملية. ويكون $n = p_1\times p_2\times \ldots\times p_k$. وهو تحليل n إلى جداء عوامل أولية. نقول إن n محلل إلى جداء عوامل أولية. يمكن للأعداد p_1، p_2، ...، p_k أن تتكرر في التحليل.

ملاحظة: نقبل دون برهان أن التحليل السابق وحيدا.

خاصية: a و b عددان طبيعيان كلاهما أكبر تماما من 1.

يكون b قاسما لـ a إذا وفقط إذا كان كل عامل أولي في تحليل b موجودا في تحليل a وبأُسٍّ إما مساوٍ وإما أصغر من أسه في تحليل a. (برهان مختصر: نعتبر $a = p_1^{d_1}\times p_2^{d_2}\times\ldots\times p_k^{d_k}$ و b قاسما لـ a إذن $a = b\times b'$ حيث b' طبيعي. إذن كل قاسم أولي لـ b هو قاسم أولي لـ a وبالتالي ....

عكسيا نعتبر $b = p_1^{d'_1}\times p_2^{d'_2}\times\ldots\times p_k^{d'_k}$ حيث $d'_i \le d_i$. يمكن اختزال الكسر $\frac{a}{b}$ ...)

III/ تطبيق: **ت1)** من رقم 01 إلى 27 ص106، 107.

ت2) هل الأعداد التالية أولية 349، 341، 841؟

ت3) ما هي قيم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد n^2-2n-8 طبيعيا أوليا؟ (أنشر (n+2)(n-4) أكمل).

ت4) حلل إلى جداء عوامل أولية العدد 9604، ثم استنتج كل قواسمه. (جواب $2^2\times 7^4$ ... أكمل).

المؤسســـــة:	**المستـــوى:** 3 رياضي، 3 ت رياضي
السنة الدراسية: 2015 / 2016.	**ميدان التعلم:** الأعداد و الحساب
التاريــــــخ:	**الوحدة:** الأعداد الأولية ـ المضاعف المشترك الأصغر
توقيت الحصـة:.	**موضوع الحصة:** المضاعف المشترك الأصغر

المكتسبات القبلية:

الكفاءات القاعدية: استعمال تحليل عدد طبيعي إلى جداء عوامل أولية لتعيين مضاعفات عدد طبيعي وقاسمه.

مؤشرات الكفـاءة:

الأنشطة المقترحة وطبيعتها	الإنجاز (سير الحصة)	توجيهات و تعاليق و أنشطة

نشاط: $\mathrm{M_a}$ مجموعة مضاعفات العدد الطبيعي a.

1/ جد M_8، M_6، $M_8 \cap M_6$.

2/ ما هو أصغر عنصر غير معدوم في $M_8 \cap M_6$؟

I/ تمهيد:

II/ العرض:

المضاعف المشترك الأصغر لعددين:

ترميز: نرمز بـ $\mathrm{M_a}$ إلى مجموعة مضاعفات العدد الطبيعي غير المعدوم a.

مثال: $\mathrm{M_6} = \{0,6,12,18,24,..\}$، $\mathrm{M_{20}} = \{0,20,40,60,...\}$، $\mathrm{M_0} = \{0\}$.

تعريف: a و b عددان طبيعيان غير معدومين.

أصغر عنصر غير معدوم من المجموعة $M_a \cap M_b$ يسمى المضاعف المشترك الأصغر للعددين a و b. ونرمز له بـ $\mathrm{PPCM(a, b)}$.

ملاحظات: 1/ $\mathrm{PPCM(a, a) = a}$، $\mathrm{PPCM(1, a) = a}$، $\mathrm{PPCM(a, b) = PPCM(b, a)}$.

2/ مجموعة المضاعفات المشتركة لعددين طبيعيين غير معدومين هي مجموعة مضاعفات المضاعف المشترك الأصغر لهما.

مثال: $\mathrm{M_6} = \{0,6,12,18,24,30,36,...\}$، $\mathrm{M_8} = \{0,8,16,24,40,48,...\}$، $\mathrm{PPCM(8,6)} = 24$

، $\mathrm{M_{24}} = \{0,24,48,...\}$، $\mathrm{M_{6,8}} = \{0,24,48,...\}$

تمديد المضاعف المشترك الأصغر لعددين صحيحين:

تعريف: a و b عددان صحيحان غير معدومين.

المضاعف المشترك الأصغر لـ a و b هو m حيث $\mathrm{m = PPCM(|a|,|b|)}$.

خاصية للمضاعف المشترك الأصغر لعددين طبيعيين:

خاصية: a وb عددان طبيعيان غير معدومين. k عدد صحيح غير معدوم.

$$\mathrm{PPCM(ka,kb)} = |k|\mathrm{PPCM(a,b)}$$

(البرهان بفصل الحالات: a و b عددان طبيعيان غير معدومين. أـ إذا كان k طبيعيا لدينا **أولا:** نضع $\mathrm{m = PPCM(a, b)}$ ومنه يوجد عددان صحيحان p و p' حيث $m = pa$ و $m = p'b$ ومنه $km = kpa$ و $km = kp'b$ و بالتالي km مضاعف مشترك لـ ka، kb ومنه: $\mathrm{PPCM(ka, kb) \leq km...(1)}$. **ثانيا:** نضع $\mathrm{M = PPCM(ka, kb)}$ فيوجد عددان صحيحان d و d' حيث $M = dka$ و $M = d'kb$ ومنه a يقسم $\frac{M}{k}$ و b يقسم $\frac{M}{k}$. ومنه $\frac{M}{k}$ مضاعف مشترك لـ a و b و بالتالي $\mathrm{PPCM(a,b)} \leq \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{k}}$. ومنه: $\mathrm{kPPCM(a, b)} \leq M...(2)$

تأمل جيدا (1) و (2) تجد $\mathrm{PPCM(ka, kb)} = |k|\mathrm{PPCM(a, b)}$ بـ إذا كان k صحيحا، نجد حسب التعريف السابق

$\mathrm{PPCM(ka, kb) = PPCM(|ka|, |kb|)} = \mathrm{PPCM}(|k|a, |k|b)$ ولكن $|k|$ عدد طبيعي فحسب أـ نجد

$\mathrm{PPCM(ka,kb)} = |\mathrm{k}|\mathrm{PPCM}(a,b)$ ومنه الخلاصة...)

III/ تطبيق:

ت1) من رقم28 إلى45 ص107، 108.

ت2) جد $PPCM\,(12,18)$، $PPCM(3^n(11^{n+2}-11^n),11^n(3^{n+1}-3^n))$ حيث $n \in N^*$.

ت3) نريد تعيين القيم الممكنة للعدد a حيث $PPCM\,(a,28) = 140$.

1/ حلل العددين140، 28 إلى جداء عوامل أولية.(جواب $140 = 2^2.5.7$، $28 = 2^2.7$)

2/ بين أن a قاسم لعدد x ولن يكون قاسما لعدد y يطلب تعيينهما. (جواب140، 56)

3/ استنتج أن التحليل الأولي لـ a يظهر فيه حتماً، واذكر الصيغة العامة لهذا التحليل، ثم استنتج المطلوب.

(جواب $2^\alpha.5.7^\beta$ حيث $0 \leq \alpha \leq 2$، $0 \leq \beta \leq 1$ "الخاصية الأخيرة في المذكرة السابقة" ... أكمل).

تبرهن الخاصية:

$ppcm\,(ka, kb)$

$= |k| \times$

$ppcm\,(a,b)$

حيث k عدد صحيح غير منعدم.

المؤسســـــة:	**المستـــوى:** 3 رياضي، 3 ت رياضي
السنة الدراسية: 2015 / 2016.	**ميدان التعلم:** الأعداد و الحساب
التاريـــــخ:	**الوحدة:** الأعداد الأولية ـ المضاعف المشترك الأصغر
توقيت الحصـة:.	**موضوع الحصة:** استعمال تحليل عدد طبيعي

المكتسبات القبلية:

الكفاءات القاعدية: استعمال تحليل عدد طبيعي إلى جداء عوامل أولية لتعيين المضاعف المشترك الأصغر و القاسم المشترك الأكبر.

مؤشرات الكفـاءة:

الأنشطة المقترحة وطبيعتها	الإنجاز (سير الحصة)	توجيهات و تعاليق و أنشطة
نشاط: حلل إلى جداء عوامل أولية العددين168، 1440، واستنتج $p\gcd(168,1440)$ ، $ppcm(168,1440)$.	**I/ تمهيد:** **II/ العرض:** **حساب القاسم المشترك الأكبر باستعمال التحليل إلى جداء عوامل أولية:** **خاصية:** القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين a و b كلاهما أكبر تماما من 1 هو جداء العوامل الأولية المشتركة في تحليليهما بحيث يؤخذ كل عامل من هذه العوامل مرة واحدة و بأصغر أس. (برهان **يمكن عدم ذكره**: p_1،p_2، ... ،p_n كل الأعداد الأولية الموجودة في تحليلي a و b. نضع $a = p_1^{a_1} \times p_2^{a_2} \times ... \times p_n^{a_n}$ و $b = p_1^{b_1} \times p_2^{b_2} \times ... \times p_n^{b_n}$. حيث a_1 ، a_2 ، ... ، a_n ، b_1 ، b_2 ، ... ، b_n أعداد طبيعية. كل قاسم مشترك d للعددين a و b له تحليل على الشكل: $d = p_1^{g_1} \times p_2^{g_2} \times ... \times p_n^{g_n}$ حيث g_1 ، g_2 ، ... ، g_n أعداد طبيعية و $0 \le g_i \le a_i$ و $0 \le g_i \le b_i$. إذا كان d_1 أصغر العددين a_1 و b_1 فإن $0 \le g_1 \le d_1$ بنفس الطريقة $0 \le g_2 \le d_2$، ... ، $0 \le g_n \le d_n$. d_2 أصغر العددين a_2 و b_2، ... ، و d_n أصغر العددين a_n و b_n. يكون d هو القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b إذا كان $g_1 = d_1$ ، $g_2 = d_2$ ، ... ، $g_n = d_n$. إذن $p\gcd(a,b) = p_1^{g_1} \times p_2^{g_2} \times ... \times p_n^{g_n}$) **حساب المضاعف المشترك الأصغر باستعمال التحليل إلى جداء عوامل أولية:** **خاصية:** المضاعف المشترك الأصغر لعددين طبيعيين a و b كلاهما أكبر تماما من 1 هو جداء العوامل الأولية المشتركة وغير المشتركة في تحليليهما بحيث يؤخذ كل عامل من هذه العوامل مرة واحدة و بأكبر أس. (برهان **يمكن عدم ذكره**: p_1،p_2، ... ،p_n كل الأعداد الأولية الموجودة في تحليلي a و b. نضع $a = p_1^{a_1} \times p_2^{a_2} \times ... \times p_n^{a_n}$ و $b = p_1^{b_1} \times p_2^{b_2} \times ... \times p_n^{b_n}$. حيث a_1 ، a_2 ، ... ، a_n ، b_1 ، b_2 ، ... ، b_n أعداد طبيعية. كل مضاعف مشترك m للعددين a و b له تحليل على الشكل: $m = p_1^{l_1} \times p_2^{l_2} \times ... \times p_n^{l_n}$. حيث l_1 ، l_2 ، ... ، ln أعداد طبيعية و $0 \le a_i \le l_i$ و $0 \le b_i \le l_i$. إذا كان w_1 أكبر العددين a_1 و b_1 فإن $0 \le w_1 \le l_1$ بنفس الطريقة $0 \le w_2 \le l_2$ ، ... ، $0 \le wn \le ln$. w2 أكبر العددين a2 و b2 ، ... ، و wn أكبر العددين an و bn. يكون m هو المضاعف المشترك الأصغر للعددين a و b إذا كان $l_1 = w_1$ ، $l_2 = w_2$ ، ... ، $l_n = w_n$. إذن $ppcm(a,b) = p_1^{l_1} \times p_2^{l_2} \times ... \times p_n^{l_n}$. **III/ تطبيق:** ت1) من رقم28 إلى رقم32 ص107. ت2)باستخدام التحليل إلى جداء عوامل أولية أحسب $p\gcd(5600,28800)$ ، $ppcm(5600,28800)$.	تقترح أنشطة متنوعة يوظف فيها تحليل عدد طبيعي إلى جداء أعداد أولية لتعيين قواسمه (أو عددها) ومضاعفاته.

الرقم: 14/12

المؤسســـة:	**المستـــوى:** 3 رياضي، 3 ت رياضي
السنة الدراسية: 2015 / 2016	**ميدان التعلم:** الأعداد والحساب
التاريـــــخ:	**الوحدة:** الأعداد الأولية ـ المضاعف المشترك الأصغر
توقيت الحصـة:.	**موضوع الحصة:**

المكتسبات القبلية:

الكفاءات القاعدية: استعمال العلاقة بين المضاعف المشترك الأصغر والقاسم المشترك الأكبر ـ استعمال خواص المضاعف المشترك الأصغر.

مؤشرات الكفـاءة:

الأنشطة المقترحة وطبيعتها	الإنجاز (سير الحصة)	توجيهات و تعاليق و أنشطة
نشاط: نضع $d = p\gcd(a,b)$ $m = ppcm(a,b)$ أحسب في كل مرة مما يلي العدد $\frac{dm}{a}$. 1/ $a = 28$، $b = 40$. 2/ $a = 108$، $b = 180$. 3/ $a = 48$، $b = 32$.	**I/ تمهيد:** **II/ العرض:** **العلاقة بين المضاعف المشترك الأصغر والقاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين:** **خاصية:** a و b عددان طبيعيان كلاهما أكبر تماما من 1. $PGCD(a,b) \times PPCM(a,b) = a \times b$ (البرهان: باستعمال نفس الترميز السابق نجد: $p\gcd(a,b) \times ppcm(a,b) = p_1^{l_1+g_1} \times p_2^{l_2+g_2} \times \ldots \times p_n^{l_n+g_n}$ و بما أن g_n هو الأصغر من بين a_n، b_n. و l_n هو الأكبر من بين a_n و b_n فإن $g_n+l_n = a_n+b_n$ ومنه $p\gcd(a,b) \times ppcm(a,b) = p_1^{a_1+b_1} \times p_2^{a_2+b_2} \times \ldots \times p_n^{a_n+b_n} = a \times b$). مثال: أحسب $p\gcd(39,52)$، ثم استنتج $ppcm(39,52)$. **III/ تطبيق:** ت1) من رقم33 إلى رقم45 ص107، 108. ت2) باستخدام العلاقة بين القاسم المشترك الأكبر والمضاعف المشترك الأصغر عين $ppcm(480,4530)$. ت3) أذكر قواسم الـ20، ثم عين كل الأزواج (x,y) من الأعداد الطبيعية التي تحقق: $\begin{cases} x \times y = 18000 \\ ppcm(x,y) = 600 \end{cases}$.	إثبات الخاصية: $PGCD(a,b) \times PPCM(a,b) = a \times b$ يمكن اقتراح أنشطة حول: إيجاد الأعداد الصحيحة a و b إذا أعطي $p\gcd(a,b)$ أو $ppcm(a,b)$ أو علاقة بين a و b.

المؤسســـة:	**المستـــوى:** 3 رياضي، 3 ت رياضي
السنة الدراسية: 2015 / 2016.	**ميدان التعلم:** الأعداد و الحساب
التاريــــــخ:	**الوحدة:** الأعداد الأولية ـ المضاعف المشترك الأصغر
توقيت الحصـة:.	**موضوع الحصة:** مبرهنة بيزو

المكتسبات القبلية:

الكفاءات القاعدية: استعمال مبرهنة بيزو.

مؤشرات الكفـاءة:

الأنشطة المقترحة وطبيعتها	الإنجاز (سير الحصة)	توجيهات و تعاليق و أنشطة
نشاط: a و b عددان صحيحان غير معدومين أوليان فيما بينهما أي $PGCD(a, b)=1$ ولتكن E مجموعة الأعداد الصحيحة من الشكل $au+bv$ حيث u و v عددان صحيحان. 1/ بين أن: $a\in E$، $-a\in E$، واستنتج أن E تحتوي أعدادا موجبة تماما. 2/ ليكن $m=au_0+bv_0$ أصغر الأعداد الموجبة تماما في E. أكتب ما يحققه r، q باقي وحاصل قسمة a على m. 3/ أنشر وبسط $a(1-qu_0)+b(-qv_0)$ واستنتج أن $r\in E$. 4/ اعتمادا على ما يحققه m و r بين أن $r=0$ واذكر العلاقة بين m و a. 5/ هل m يقسم b؟ 6/ بين أن $m=1$.	**I/ تمهيد:** **II/ العرض:** **مبرهنة بيزو:** **مبرهنة:** يكون عددان صحيحان a و b أوليين فيما بينهما إذا وفقط إذا وجد عددان صحيحان u و v حيث: $au+bv=1$. (البرهان: نفرض أن a و b أوليان فيما بينهما =أنظر النشاط= عكسيا: نفرض $au+bv=1$ (a ، b ، u ، v أعداد صحيحة) نضع $d=PGCD(a;b)$. d يقسم a و b ومنه d يقسم au+bv وبالتالي d يقسم 1 أي $d=1$ ، ومنه a و b أوليان فيما بينهما). **ملاحظة:** الثنائية $(u;v)$ ليست وحيدة. **مثال:** من أجل $a=3$ و $b=2$. $1\times3-1\times2=1$ و $-1\cdot3+2\cdot2=1$ **خواص:** **خاصية1:** إذا كان d القاسم المشترك الأكبر لعددين صحيحين a و b فإنه يوجد عددان صحيحان u و v حيث: $au+bv=d$ (البرهان: سهل). **خاصية2:** إذا كان a عددا أوليا فإن a أولي مع كل الأعداد التي لا يقسمها. (البرهان: ليكن a عددا أوليا و p عددا طبيعيا لا يقبل القسمة على a، نضع $PGCD(a,p)=d$. بما أن a أولي فإن d=1 أو d=a و a لا يقسم p إذن $d=1$، ومنه a أولي مع p). **خاصية3:** إذا كان a عددا أوليا مع كل من العددين الصحيحين b و c فإن a أولي مع $b\times c$. (البرهان: حسب مبرهنة بيزو: $au+bv=1$ و $au'+cv'=1$. بالضرب نجد: $a(auu'+cuv'+bu'v)+bc(vv')=1$ فحسب مبرهنة بيزو a و bc أوليان فيما بينهما). **III/ تطبيق:** ت1) من رقم46 إلى رقم55 ص108، 109. ت2) n عدد طبيعي. نضع $a=4n-3$، $b=5n-4$. أحسب وبسط العدد $5a-4b$، ماذا تستنتج؟ ت3) n عدد طبيعي. بين أن $n+1$ أولي مع كل من: $2n+3$، $3n+4$، $6n^2+17n+12$. (حل مختصر: أ ـ استعمل بيزو بالثنائية $(-2,1)$ ب ـ استعمل بيزو بالثنائية $(1,-3)$ جـ ـ استعمل الخاصية3).	تقترح أنشطة حول مبرهنة "بيزو"

الرقم:14 والأخيرة

المؤسسـة:	المستـوى: 3 رياضي، 3 ت رياضي
السنة الدراسية:2015 / 2016.	ميدان التعلم: الأعداد والحساب
التاريـخ:	الوحدة: الأعداد الأولية ـ المضاعف المشترك الأصغر
توقيت الحصـة:.	موضوع الحصة: مبرهنة غوص

المكتسبات القبلية:

الكفاءات القاعدية: استعمال مبرهنة غوص ونتائجها.

مؤشرات الكفـاءة:

الأنشطة المقترحة وطبيعتها	الإنجاز (سير الحصة)	توجيهات و تعاليق و أنشطة
نشاط: a، b و c أعداد صحيحة غير معدومة. حيث a أولي مع b، و a يقسم الجداء bc. 1/ بين أنه يوجد عددان صحيحان u و v حيث: $cau+cbv=c$. 2/ بين أن a يقسم c.	**I/ تمهيد:** **II/ العرض:** **مبرهنة غوص:** **مبرهنة:** a، b و c أعداد صحيحة غير معدومة. إذا كان a يقسم الجداء bc وكان a أوليا مع b، فإن a يقسم c. (البرهان: أنظر النشاط). **خواص:** **خاصية1:** a و b عددان طبيعيان غير معدومين و p عدد أولي. إذا كان p يقسم الجداء ab، فإن p يقسم a أو p يقسم b. (البرهان: إذا كان p يقسم a الخاصية محققة. إذا كان p لا يقسم a فإن $pgcd(a,p)=1$ لأن p عدد أولي وقاسماه هما 1 و p . إذن a و p أوليان فيما بينهما. نجد شروط غوص محققة ومنه p يقسم b . ومنه صحة الخاصية). **خاصية2:** a، b و c أعداد طبيعية غير معدومة. إذا كان a مضاعفا لـ b و c وكان b و c أوليين فيما بينهما فإن a مضاعف للجداء bc. (البرهان: a مضاعف للعدد b نكتب $a=bd$، a مضاعف للعدد c نكتب $a=cd'$. إذن $db=d'c$ إذا c يقسم bd . وهو أولي مع b فحسب غوص c يقسم d . إذن يوجد عدد طبيعي d'' حيث $d=d''c$. بالتعويض في $a=bd$ نجد $a=d''cb$ ومنه a مضاعف لـ bc .) مثال: العدد 116916 مضاعف لـ 3 لأن (1+1+6+9+1+6=24 و 24 مضاعف لـ 3) العدد 116916 مضاعف لـ 4 لأن 16 يقبل القسمة على 4) و 3 و 4 أوليان فيما بينهما ومنه 116916 مضاعف لـ 3×4 أي مضاعف لـ 12. **III/ تطبيق: ت1)** من رقم56 وما بعده إلا من 66 إلى 72 ص109 فما بعدها. **ت2)** حل في z^2 المعادلة $9x-16y=0$، والمعادلة $6x+8y=0$. **ت3)** تحقق أن $(4,2)$ حلّ للمعادلة $9x-16y=4$ ثم جد كل حلولها في z^2. **ت4)** n عدد طبيعي. 1/ أذكر القيم الممكنة لباقي قسمة n على3. 2/ بين أن العدد $n(5n+1)(13n+1)$ مضاعف لـ6.	تقترح أنشطة حول مبرهنة "غوص" . نقصد بنتائج مبرهنة غوص،ما يلي: - $a\in N^*$، $b\in N^*$ و p عدد أولي. إذا كان p يقسم ab فإن p يقسم a أو p يقسم b. - a، b، c أعداد طبيعية غير منعدمة. إذا كان: a مضاعفا لـ b و c و $PGCD(a,b)=1$ فإن: a مضاعف bc. ـ يمكن استعمال مبرهنة غوص لحل المعادلة $ax+by=c$ في z .