المحور السادس مذكرة رقم: 5 الأحتمالات

أستعد للباكالوريا

السنة الدراسية		اعداد الاستاذ
2016/2015	Yousfi Math Yousfisifou804@yahoo.fr	يوسفي عبد الرحمن

المحور السادس الإحتمالات

المستوى : الثالثة تقني ورياضيـــــــــــــات علوم تجريبية

الموضوع: الاحتمالات proba

كفاءات المحور

الكفاءة المستهدفة

- إيجاد قانون احتمال لمتغير عشوائي .
- حل مسائل في الاحتمالات توظف المتغيرات العشوائية . قانون الاحتمال . الأمل الرياضياتي . التباين و الإنحراف المعياري .
- تنظيم معطيات من أجل عدها باستعمال المبدأ الأساسي للعد .
- التعرف على استقلال أو ارتباط حادثتين .
- توظيف دستور الاحتمالات الكلية لحل مسائل في الاحتمالات تتعلق بالسحب من أكثر من كيس .
- نمذجة وضعيات بالاعتماد على التجارب المرجعية للسحب أو الإلقاء .

المكتسبات القبلية

- الاحتمالات و الاحصاء

مخطط الدرس	التوقيت	التوقيت
الأحتمالات	5 سا	
المتساوية على مجموعة منتهية	1سا	
العد(المبدأ الأساسي،القوائم ، الترتيبات،التوفيقات)	2سا	
دستور ثنائي الحد.	2 سا	
الأحتمالات	5 سا	
الاحتمالات الشرطية (شجرة الاحتمالات)	2 سا	
الحوادث المستقلة.	2 سا	
دستور الاحتمالات الكلية.	1 سا	

وثائق التحضير	الوسائل البيداغوجية	نقد ذاتي
• دليل الأستاذ • الكتاب المدرسي • المنهاج	• السبورة • جهاز داتاشو	

المؤسســــــــة:	المستــــــــوى: الثالثة رياضيات
السنة الدراسية:	ميــدان التعلم: الاحتمالات
التاريــــــــخ:	الوحدة التعلمية: الاحتمالات
توقيت الحصة :	موضوع الحصة : انشطة

المكتسبات المستهدفة:

الأنشطة المقترحة	الإنجاز(سـير الحصة)	المنهاج

1/ انشطة الاحتمالات

نشاط رقم 1

نشاط1 ص368 (كتاب السنة 2):

نعتبر التجربة التالية : نرمي p مرة زهرة نرد مكعبة وغير مزيفة ذات ستة أوجه مرقمة من 1 إلى 6 . ونهتم بثلاثة وسائط .

- ✓ التواتر f_n لظهور الرقم 6 على الوجه العلوي من أجل n رمية الأولى.
- ✓ الوسط الحسابي m_n لـ n رقما الأولى التي تظهر على الوجه العلوي .
- ✓ التباين لهذه الأرقام (n الأولى ظهورا). $(n \leq p)$

نشاط رقم 1 الحل

المرحلة الأولى : القيام بالتجربة جماعيا.

1. كل تلميذ يرمي زهرة النرد 30 مرة ويسجل في كل مرة الرقم الظاهر على الوجه العلوي.
2. يحسب التلميذ الوسط الحسابي للأرقام.
3. توضع كل النتائج (لكل تلاميذ القسم) في جدول مشترك واحد حسب النموذج التالي (n تأخذ القيم 30 ثم 60 و هكذا ... حتى التلميذ الأخير).

N	30	60	90	....
عدد مرات ظهور الرقم 6				
f_n تواتر الرقم6				
الوسط الحسابي للأرقام m_n				

ملاحظة : لحساب m_{60} يمكن استعمال معدلي التلميذين الأولين......

4. نمثل النقط (n, f_n) بيانيا ، ماذا تلاحظ ؟
5. نفس السؤال بالنسبة إلى النقط (n, m_n).

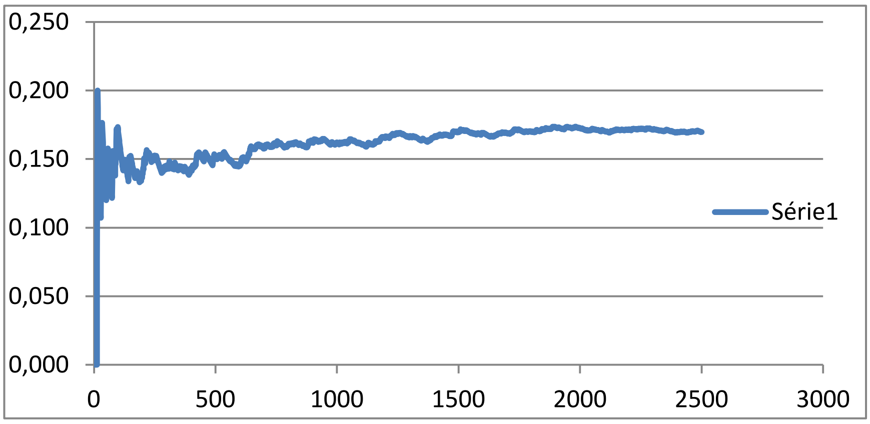
يشير المنحنى في السؤال 4. إلى أن المتتالية (f_n) تؤول إلى عدد قريب من $0{,}17$ (توازن زهرة النرد يؤكد أن للرقم 6 حظا من بين ستة حظوط للظهور) ، نقول عندئذ إن احتمال ظهور الرقم 6 يساوي $\frac{1}{6}$ ($\frac{1}{6} \simeq 0{,}17$).

المرحلة الثانية : استعمال مجدول Excel.

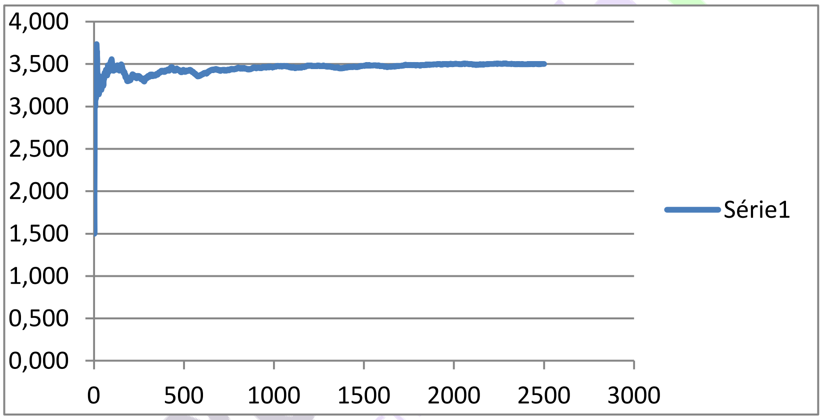
1. أدخل أرقام الرميات من $A1$ إلى $A2500$.
2. باستعمال الطلبية $=ENT(ALEA()*6+1)$ في الخلية $B1$ ثم استعمال الزالق إلى $B2500$ نحاكي التجربة السابقة (2500 رمية لزهرة نرد).
3. نحسب f_n تواتر الرقم 6 (في الخانة $C1$) باستعمال الطلبية =NB.SI($B$1:B1;6)/A1 ثم النسخ إلى $C2500$.
4. نمثل بيانيا النقط (n, f_n) بيانيا ، ماذا تلاحظ ؟

5. في الخانة $D1$ نحسب الوسط الحسابي m_n باستعمال الطلبية =MOYENNE($B$1:B1) ثم النسخ إلى $D2500$.
6. نمثل بيانيا النقط (n, m_n) بيانيا ، ماذا تلاحظ ؟
7. نفس السؤال بالنسبة للتباينات في العمود E باستعمال الطلبية =VAR.P ($B$1:B1) ثم النسخ إلى $E2500$.
8. باستعمال اللمسة $F9$ ، كرر المحاكاة ولاحظ.

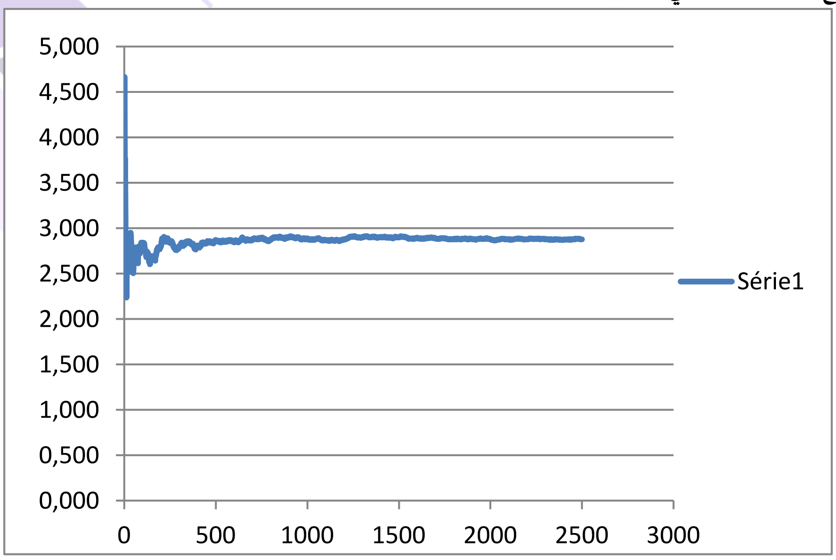
أ- التمثيل البياني للتواترات :



ب- التمثيل البياني للأوساط الحسابية :



ج- التمثيل البياني للتباينات :



نشاط رقم 2

Ω هي مجموعة الأعداد الطبيعية من 0 إلى 49.

1. أ- عين الأجزاء من Ω التالية :

A : عناصر A هي مضاعفات العدد 3.

B : عناصر B هي مضاعفات العدد 4.

C : عناصر C هي مضاعفات العدد 3 ومضاعفات العدد 4.

D : عناصر C هي مضاعفات العدد 3 أو مضاعفات العدد 4.

ب- احسب النسبة المئوية (التواتر الموافق) لكل جزء منها في Ω.

ج- عبر عن النسب السابقة بكسر ناطق غير قابل للاختزال.

2. نختار عشوائيا عددا من Ω و نسمي الأعداد السابقة احتمالات الحوادث A ، B ، C و D على الترتيب.

احسب احتمالي الحادثتين التاليتين.

E : الحصول على عدد أولي ، F : الحصول على عدد ذي رقمين متساويين.

نشاط رقم 2 الحل

1. أ- $A=\{0;3;6;9;12;15;18;21;24;27;30;33;36;39;42;45;48\}$

$B=\{0;4;8;12;16;20;24;28;32;36;40;44;48\}$.

$C=A\cap B=\{0;12;24;36;48\}$.

$$D=A\cup B=\left\{\begin{matrix}0;3;4;6;8;9;12;15;16;18;20;21;24;27;\\ 28;30;32;33;36;39;40;42;44;45;48\end{matrix}\right\}$$

ب- $p(A)=\frac{17}{100}\times 50=34\ \%$ ، $p(B)=\frac{13}{100}\times 50=26\%$ ، %

$p(C)=\frac{5}{100}\times 50=10$ ،

$p(D)=\frac{25}{100}\times 50=50\ \%$.

ج- $p(A)=\frac{34}{100}=\frac{17}{50}$ ، $p(B)=\frac{26}{100}=\frac{13}{50}$ ، $p(C)=\frac{5}{50}=\frac{1}{10}$ ،

$p(D)=\frac{25}{50}=\frac{1}{2}$.

2. احتمالا الحادثتين E ، F.

لدينا : $E=\{2;3;5;7;11;13;17;19;23;29;31;37;41;43;47\}$.

$F=\{11;22;33;44\}$.

احتمال E هو $p(E)=\frac{15}{50}=\frac{3}{10}$.

احتمال $p(F)=\frac{4}{50}=\frac{2}{25}$.

نشاط 3 :(رقم 2 ص200 كتاب السنة3):

يحتوي كيس على 37 قريصة لا نميز بينها باللمس، منها 18 قريصة حمراء .

نعتبر اللعبتين التاليتين :

اللعبة الأولى : يدفع اللاعب 10دنانير ويسحب قريصة واحدة عشوائيا . إذا كانت القريصة المسحوبة حمراء يربح 10 دنانير و إلا خسر ما دفعه.

اللعبة الثانية : يدفع اللاعب 10دنانير ويحدد رقما قبل السحب ثم يسحب قريصة واحدة عشوائيا و يربح 350 دينارا إذا الرقم المسحوب هو المحدد سابقا و إلا خسر ما دفعه.

قارن بين اللعبتين (الربح المتوسط).

حل :

اللعبة الأولى :

x	10	-10
$p(X=x)$	$\frac{18}{37}$	$\frac{19}{37}$

الربح المتوسط هو : $B_m = 10\times\frac{18}{37} - 10\times\frac{19}{37} = -\frac{10}{37}$.

اللعبة الثانية :

x	350	-10
$p(X=x)$	$\frac{1}{37}$	$\frac{36}{37}$

الربح المتوسط هو : $B_m = 350\times\frac{1}{37} - 10\times\frac{36}{37} = -\frac{10}{37}$.

نشاط 4 :(رقم 4 ص201 كتاب السنة3):

ماهو عدد الأعداد التي يمكن تشكيلها باستعمال الأرقام من 1 إلى 6 إذا كانت هذه الأعداد تتكون من :

أ- 3 أرقام ؟

ب- 3 أرقام مختلفة ؟

ج- 6 أرقام مختلفة ؟

حل :

أ- عدد الأعداد التي يمكن تشكيلها باستعمال الأرقام من 1 إلى 6 و التي تتكون من 3 أرقام هو :

$6\times6\times6=216$ أي $6^3=216$

ب- عدد الأعداد التي يمكن تشكيلها باستعمال الأرقام من 1 إلى 6 و التي تتكون من 3 أرقام مختلفة هو :

$6\times5\times4=120$.

نرمز إلى العدد $6\times5\times4$ بـ A_6^3 أي : $A_6^3=6\times5\times4$.

ج- عدد الأعداد التي يمكن تشكيلها باستعمال الأرقام من 1 إلى 6 و التي تتكون من 6 أرقام مختلفة هو : $A_6^6=720$.

نرمز إلى العدد A_6^6 بـ $6!$ أي : $6!=6\times5\times4\times3\times2\times1$ و يقرأ : عاملي 6.

4

نشاط 5 :(رقم 5 ص201 كتاب السنة3):

يتكون قسم من 20 تلميذا ، احمد تلميذ من هذا القسم .

1. نريد اختيار تلميذين من القسم (أي عدد اللجان ذات تلميذين والتي يمكن تشكيلها من بين تلاميذ القسم كلهم).

احسب a عدد الطرائق الممكنة .

2. نريد اختيار تلميذين من القسم شريطة ألا يكون أحدهما أحمد.
احسب b عدد الطرائق الممكنة في هذه الحالة.
3. نريد اختيار تلميذين من القسم شريطة أن يكون أحدهما أحمد.
احسب c عدد الطرائق الممكنة في هذه الحالة.
4. جد علاقة بين الأعداد a ، b و c.

حل :

1. عدد الطرائق الممكنة لاختيار تلميذين من القسم (عشوائيا)هو : $a=\dfrac{20\times19}{2}=190$
لأن : هناك 20 طريقة لاختيار التلميذ الأول ومقابل كل اختيار للتلميذ الأول هناك 19 طريقة لاختيار التلميذ الثاني و كل اختيار لتلميذين بهذه الكيفية يتكرر مرتين .
نرمز إلى هذا العدد ب C_{20}^{2} أي : $C_{20}^{2}=\dfrac{20\times19}{2}$.
2. عدد الطرائق الممكنة لاختيار تلميذين من القسم شريطة ألا يكون أحدهما أحمد هو :
$b=C_{19}^{2}=\dfrac{19\times18}{2}=171$.
3. عدد الطرائق الممكنة لاختيار تلميذين من القسم شريطة أن يكون أحدهما أحمد هو :
$c=1\times19=19$.
4. نلاحظ أن : $a=b+c$ أي : $C_{20}^{2}=C_{19}^{2}+C_{19}^{1}$.

نشاط 6 :(رقم 6 ص201 كتاب السنة3) :

يتوزع 400 تلميذ من الأقسام النهائية في ثانوية ما إلى فوجين A و B و ذلك حسب اللغة الحية (الأجنبية الثانية) التي يدرسونها (إنجليزية أو ألمانية).
يوضح الجدول التالي هذا التوزيع بالنسبة إلى البنين (G) أو البنات (F).

اللغة الحية	إنجليزية (A)	ألمانية (B)
بنون (G)	130	50
بنات (F)	140	80

تم اختيار تلميذ عشوائيا من بين قوائم تلاميذ السنة النهائية .
1. احسب احتمال أن يكون التلميذ المختار بنتا (نرمز إليه ب $p(F)$).
2. احسب احتمال أن يكون التلميذ المختار يدرس اللغة الألمانية (نرمز إليه ب $p(B)$).
3. علما أن التلميذ المختار بنت ، ماهو احتمال أن تكون تدرس الألمانية(نرمز إليه ب $p_F(B)$)؟.
4. قارن النتيجة السابقة مع $\dfrac{p(B\cap F)}{p(F)}$ حيث $p(B\cap F)$ هو احتمال أن يكون التلميذ المختار بنتا تدرس الألمانية.

حل:

اللغة الحية	إنجليزية (A)	ألمانية (B)	المجموع
بنون (G)	130	50	180
بنات (F)	140	80	220
المجموع	270	130	400

	1. احتمال أن يكون التلميذ المختار بنتا هو: $p(F)=\frac{220}{400}=\frac{11}{20}$. 2. احتمال أن يكون التلميذ المختار يدرس الألمانية هو: $p(B)=\frac{130}{400}=\frac{13}{40}$. 3. احتمال أن يكون التلميذ المختار يدرس الألمانية علما أنه بنت هو: $p_F(B)=\frac{80}{220}=\frac{4}{11}$. 4. حساب $\frac{p(B\cap F)}{p(F)}$: $p(B\cap F)=\frac{80}{400}=\frac{1}{5}$ ومنه : $\frac{p(B\cap F)}{p(F)}=\frac{\frac{1}{5}}{\frac{11}{20}}=\frac{4}{11}$. المقارنة : $\boxed{p_F(B)=\frac{p(B\cap F)}{p(F)}}$.	

المؤسســـــــة:	المستـــــــوى: الثالثة رياضيات
السنة الدراسية:	ميـــدان التعلم: الاحتمالات
التاريـــــــــخ:	الوحدة التعلمية: الاحتمالات
توقيت الحصة :	موضوع الحصة : الاحتمالات

المكتسبات المستهدفة:

الأنشطة المقترحة	الإنجاز(سـير الحصة)	المنهاج

2.1 التجربة العشوائية

تعريف

نقول عن تجربة إنها عشوائية إذا كانت كل إمكانياتها معلومة لكن عندما نجرب لا نستطيع تحديد أي إمكانية منها ستتحقق .

مثلا : رمي قطعة نقد (الوجه والظهر) ، رمي زهرة نرد (الأرقام الستة) ، السحب من كيس (ظهور إحدى الكريات) .

اصطلاحات

نقوم بتجربة عشوائية ونحصل على نتيجة ، نرمز إلى مجموعة النتائج الممكنة بالرمز Ω ونسميها مجموعة الإمكانيات(المخارج) أو المجموعة الشاملة.

كل عنصر منها يسمى إمكانية وكل جزء منها يسمى حادثة .

A و B حادثتان و a إمكانية من Ω.

إذا كان	نقول إن
$A=\Omega$	A هي الحادثة الأكيدة.
$A=\phi$	A هي الحادثة المستحيلة.
$a\in A$	الإمكانية a تحقق الحادثة A .
$C=A\cap B$	C هي الحادثة A و B .
$C=A\cup B$	C هي الحادثة A أو B .
$B=\overline{A}$ ، $(B=\Omega-A)$	B الحادثة المعاكسة لـ A .
$A\subset B$	الحادثة A تستلزم الحادثة B .
$A\cap B=\phi$	الحادثتين A و B غير متلائمتين.

قانون الاحتمالات

تعريف 1: Ω مجموعة مخارج لتجربة عشوائية إمكانياتها x_1 ، x_2 ، ..... ، x_n و p دالة ترفق بكل عنصر x_i من Ω عددا حقيقيا موجبا p_i .

نقول عن p إنه قانون احتمال على Ω إذا وفقط إذا كان : $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

تعريف2 : Ω مجموعة شاملة (إمكانيات أو مخارج) و p دالة ترفق بكل جزء من Ω عددا حقيقيا من المجال $[0;1]$.

نقول عن p إنه قانون احتمال على Ω إذا وفقط إذا تحقق الشرطان :

1. $p(\Omega)=1$.
2. من أجل كل حادثتين غير متلائمتين A و B فإن : $p(A\cup B)=p(A)+p(B)$.

ملاحظة 1: إذا تحقق الشرطان السابقان نقول إن الثنائية (Ω, p) فضاء احتمالي ، و إذا كان لكل الإمكانيات نفس الاحتمال نقول إن الفضاء متساوي الاحتمالات .

ملاحظة2: بعض العبارات الدالة على تساوي الاحتمالات : لكل الإمكانيات نفس الاحتمال أو نفس الحظ ، قطعة (نقد أو نرد) غير مزيفة ، نسحب عشوائيا ، كريات لا نفرق بينها باللمس (لا نميز بينها باللمس)...

مثال : P_1 و p_2 معرفان كما يلي :

x	a	b	c	d
$p_1(x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$
$p_2(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

p_2 احتمال على $\Omega=\{a,b,c,d\}$ و P_1 ليس احتمالا على $\Omega=\{a,b,c,d\}$.

خواص :

(Ω,p) فضاء احتمالي و A و B حادثتان.

1. $p(\phi)=0$.
2. $0\le p(A)\le 1$.
3. $p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)$.
4. إذا كان $A\subset B$ فإن : $p(A)\le p(B)$.
5. $p(\overline{A})=1-p(A)$.

تمرين1 :

(Ω,p) فضاء احتمالي و A و B حادثتان حيث : $p(A)=0,8$ ، $p(B)=0,45$ و $p(A\cup B)=0,9$.

احسب احتمال $\overline{A}$ و $A\cap B$.

حل :

$p(\overline{A})=1-p(A)=0,2$.

$p(A\cap B)=p(A)+p(B)-p(A\cup B)=0,8+0,45-0,9=0,35$.

احتمال حادثة :

تعريف : احتمال حادثة هو مجموع احتمالات الإمكانيات (المخارج) المكونة لهذه الحادثة.

نتيجة : في فضاء متساوي الاحتمالات عدد إمكانياته n (n عدد طبيعي غير معدوم).

احتمال كل إمكانية هو $\frac{1}{n}$ واحتمال كل حادثة عدد عناصرها k ، $(1\le k\le n)$ هو $\frac{k}{n}$ ويعبر عنها بـ :

$\frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الممكنة}}=\frac{k}{n}$.

ملاحظة : نستعمل طرائق العد لحساب عدد الحالات (العد المباشر ، القوائم ، الترتيبات ، التوفيقات).

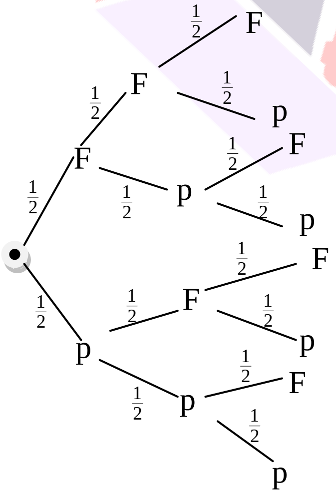
تمرين2: نرمي قطعة نقد متوازنة (غير مزيفة) ثلاث مرات متتالية في الهواء .

1. شكل شجرة الاحتمالات المرفقة بهذه التجربة.
2. ماهو احتمال :

أ- A : الحصول على الوجه ثلاث مرات .

ب- B : الحصول على الوجه مرة واحدة على الأقل.

حل :



أ- حتمال الحصول على الوجه ثلاث مرات هو

$p(A)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$.

ب- احتمال الحصول على الوجه مرة واحدة على الأقل

هو: $p(B)=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$.

باعتبارها الحادثة العكسية للحادثة : " نحصل على الظهر ثلاث مرات " .

العد :

لتكن E مجموعة منتهية عدد عناصرها n و k عدد طبيعي (n عدد طبيعي غير معدوم).

القوائم :

تعريف وخاصية :

نسمي قائمة ذات k $\left(k\geq 1\right)$ عنصرا من E كل متتالية مرتبة من k عنصرا من عناصر E.

عدد القوائم ذات k عنصرا من عناصر E هو n^k.

الترتيبات :

تعريف و خاصية :

نسمي ترتيبة k $\left(1\leq k\leq n\right)$ عنصرا من E كل متتالية مرتبة من k عنصرا متمايزة مثنى مثنى من عناصر E.

عدد ترتيبات k عنصرا من عناصر E هو العدد الطبيعي A_n^k المعرف بـ :

$A_n^k=n(n-1)(n-2)...(n-k+1)$.

التبديلات :

تعريف و نتيجة:

نسمي تبديلة لعناصر المجموعة E كل ترتيبة n عنصرا من E.

عدد تبديلات مجموعة ذات n عنصرا العدد الطبيعي A_n^n حيث :

$A_n^k=n(n-1)(n-2)...\times 2\times 1$ ، نرمز لهذا العدد بـ : $n!$.

أي: $n!=n(n-1)(n-2)...\times 2\times 1$.

مثلا : $5!=5\times 4\times 3\times 2\times 1=120$.

التوفيقات :

تعريف و خاصية :

نسمي توفيقة k $\left(0\leq k\leq n\right)$ عنصرا من E كل جزء من E يشمل k عنصرا.

عدد توفيقات k عنصرا من عناصر E هو العدد الطبيعي C_n^k أو $\begin{pmatrix}k\\n\end{pmatrix}$ المعرف بـ :

$$C_n^k=\frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{k(k-1)....\times 2\times 1}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

مثلا : $C_{10}^2=\frac{10\times 9}{2\times 1}=45$.

ملاحظة : عدد أجزاء E ذات n عنصرا هو 1 لأن E هي الجزء الوحيد الذي يشمل n عنصرا.

ومنه : $C_n^n=\frac{n!}{n!(0)!}=1$ وبالتالي :

نصطلح أن: $0!=1$

خواص :

1. من أجل كل عددين طبيعيين n و k حيث $\left(0\leq k\leq n\right)$ لدينا : $C_n^k=C_n^{n-k}$

2. من أجل كل عددين طبيعيين n و k حيث $\left(0\leq k\leq n+1\right)$ لدينا : $C_{n+1}^k=C_n^k+C_n^{k-1}$

دستور ثنائي الحد :

مبرهنة :

من أجل كل عددين حقيقيين a و b و من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n لدينا :

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^{n-k}b^k$$

البرهان :

نبين ذلك بالتراجع ،

من أجل $n=1$ لدينا : $(a+b)^1=\sum_{k=0}^{1}C_1^k a^{1-k}b^k=C_1^0a^1b^0+C_1^1a^0b^1=a+b$.

نفرض أن : $(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^{n-k}b^k$ و نبين أن : $(a+b)^{n+1}=\sum_{k=0}^{n+1}C_{n+1}^k a^{n+1-k}b^k$.

لدينا:

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1}&=(a+b)^n(a+b)=(a+b)\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^{n-k}b^k\\
&=(a+b)\left(C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b^1+\dots+C_n^{n-1}a^1b^{n-1}+C_n^nb^n\right)\\
&=C_n^0a^{n+1}+C_n^1a^nb^1+\dots+C_n^{n-1}a^2b^{n-1}+C_n^nab^n\\
&+C_n^0a^nb^1+C_n^1a^{n-1}b^2+\dots+C_n^{n-1}a^1b^n+C_n^nb^{n+1}\\
&=C_n^0a^{n+1}+\left(C_n^0+C_n^1\right)a^nb^1+\left(C_n^1+C_n^2\right)a^{n-1}b^2+\dots\\
&\dots+\left(C_n^{n-1}+C_n^n\right)a^1b^n+C_n^nb^{n+1}\\
&=C_{n+1}^0a^{n+1}+C_{n+1}^1a^nb^1+C_{n+1}^2a^{n-1}b^2+\dots+C_{n+1}^na^1b^n+C_{n+1}^{n+1}b^{n+1}\\
&=\sum_{n+1}^{k}C_{n+1}^k a^{n+1-k}b^k
\end{aligned}$$

أمثلة:

1. عدد الطرائق الممكنة لتشكيل عدد ذي 4 أرقام مختارة من الأرقام 1 ، 2 ، 3 ، 5 ، 7، 9 هو 6^4 طريقة.
2. عدد الطرائق الممكنة لسحب كريتين على التوالي مع الإعادة من كيس يحتوي على 15 كرية هو : $15^2=225$ طريقة .
3. عدد الطرائق الممكنة لسحب كريتين على التوالي دون الإعادة من كيس يحتوي على 15 كرية هو : $A_{15}^2=15\times14=210$ طريقة .
4. عدد تبديلات المجموعة $\{a,b,c\}$ هو $3!=6$ و هي : (a,b,c) ، (b,c,a) ، (c,a,b) ، (b,a,c) ، (c,b,a) و (a,c,b)
5. عدد اللجان ذات 4 أعضاء و التي تضم رجلين وامرأتين مختارين من بين 10 رجال و 4 نساء هو : $C_{10}^2\times C_4^2=\frac{10\times9}{2}\times\frac{4\times3}{2}=270$.
6. عدد أجزاء مجموعة ذات n هو:

$$C_n^0+C_n^1+C_n^2+\dots+C_n^{n-1}+C_n^n=(1+1)^n=2^n.$$

طرائق للعد :

الطريقة/ المطلوب	تشكيل أعداد	تشكيل لجان	سحب من كيس	مجموعات
قائمة	الأرقام يمكن أن تتكرر	//	على التوالي مع الإعادة	//
ترتيبة	الأرقام لا تتكرر	المهام محددة	على التوالي دون إعادة	//
توفيقة	//	المهام غير محددة	في آن واحد	أجزاء مجموعة

قانون احتمال متغير عشوائي : (Ω, p) فضاء احتمالي.

تعريف 1: نعرف متغيرا عشوائيا عندما نرفق بكل محاولة (تجربة) عددا حقيقيا .

5

تعريف2: نعتبر X متغيرا عشوائيا على Ω نرمز بـ $X(\Omega)$ إلى مجموعة القيم التي يأخذها المتغير العشوائي X.

قانون احتمال المتغير العشوائي X يرفق بكل عنصر من $X(\Omega)$ عددا حقيقيا من المجال $[0;1]$ ويحقق الشرطين المذكورين في تعريف قانون الاحتمال.

مثال : نرمي قطعة نقد متوازنة (غير مزيفة) ثلاث مرات متتالية في الهواء ونعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق الذي يرفق بكل رمية عدد مرات ظهور الوجه .

لدينا : القيم الممكنة للمتغير العشوائي X هي : 0 ، 1، 2، 3. ونعرف قانون احتماله كما يلي :

x	0	1	2	3
$p(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

الأمل الرياضياتي : (Ω, p) فضاء احتمالي، X متغير عشوائي على Ω قيمه (x_i) واحتمالاتها (p_i) ، i عدد طبيعي غير معدوم .

تعريف : الأمل الرياضياتي للمتغير العشوائي X هو العدد الحقيقي المعرف بـ : $E(X)=\sum p_i x_i$.

مثال : الأمل الرياضياتي للمتغير العشوائي X المعرف في المثال السابق هو العدد :

$$E(X)=0\times\frac{1}{8}+1\times\frac{3}{8}+2\times\frac{3}{8}+3\times\frac{1}{8}=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}.$$

ملاحظة : إذا كان $E(X)=0$ نقول عن اللعبة إنها عادلة .

الانحراف المعياري: (Ω, p) فضاء احتمالي ، X متغير عشوائي على Ω قيمه x_i واحتمالاتها p_i و أمله الرياضياتي $E(X)$.

الانحراف المعياري للمتغير العشوائي X هو الجذر التربيع للتباين $V(X)$ ونرمز إليه بالرمز $\sigma(X)$

حيث : $V(X)=\sum p_i(x_i-E(X))^2=E(X^2)-(E(X))^2$.

$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$.

مثال : (المثال السابق).

$$V(X)=E(X^2)-(E(X))^2=\left(0\times\frac{1}{8}+1\times\frac{3}{8}+4\times\frac{3}{8}+9\times\frac{1}{8}\right)-\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{24}{8}-\frac{18}{8}=\frac{3}{4}$$

$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

تمرين3 : يحتوي كيس على 12 كرية منها 5 بيضاء .

نسحب من هذا الكيس 3 كريات في آن واحد (كل السحبات لها نفس الاحتمال) ونعتبر أن سحب كرية بيضاء يعطي ربحا قدره m دينارا وأن سحب كرية غير بيضاء يعطي خسارة قدرها 100 دينار و ليكن المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحب الربح الجبري المحصل عليه.

1. عين قانون احتمال المتغير العشوائي X ثم احسب أمله الرياضياتي .
2. عين قيمة العدد m حتى تكون اللعبة عادلة.
3. نفرض أن $m=140$ ، احسب احتمال الحادثة $(X \succ 100)$.

حل :

1. تعيين قانون احتمال المتغير العشوائي X:

لدينا : $X(\Omega)=\{-300; m-200; 2m-100, 3m\}$.

ومنه : $p(X=-300)=\frac{C_7^3}{C_{12}^3}=\frac{7}{44}$ ، $p(X=m-200)=\frac{C_5^1 \times C_7^2}{C_{12}^3}=\frac{21}{44}$ ،

$p(X=2m-100)=\frac{C_5^2 \times C_7^1}{C_{12}^3}=\frac{7}{22}$ ، $p(X=3m)=\frac{C_5^3}{C_{12}^3}=\frac{1}{22}$.

x	-300	$m-200$	$2m-100$	$3m$
$p(X=x)$	$\frac{7}{44}$	$\frac{21}{44}$	$\frac{7}{22}$	$\frac{1}{22}$

الأمل الرياضياتي :

$$E(X)=\left(-300\times\frac{7}{44}\right)+\frac{21}{44}\times(m-200)+\frac{7}{22}\times(2m-100)+3m\times\frac{1}{22}=\frac{55m-7700}{44}=\frac{5m-700}{4}$$

2. تكون اللعبة عادلة من أجل : $E(X)=0$ أي : $m=\frac{700}{5}=140$.

3. احتمال الحادثة $(X \succ 100)$ هو :

$p(X \succ 100)=p(X=180)+p(X=420)=\frac{8}{22}=\frac{4}{11}$.

الاحتمال الشرطي: (Ω, p) فضاء احتمالي ، A و B حادثتان حيث $p(A) \neq 0$.

تعريف : احتمال الحادثة B علما أن A (أي الحادثة A محققة) هو العدد الحقيقي $p_A(B)$

المعرف كما يلي : $p_A(B) = p(B/A) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(A)}$.

ملاحظة : p_A هو قانون احتمال على Ω ويسمى الاحتمال المشروط بالحادثة A .

مثال :

نرمي قطعة نرد غير مزيفة مرقمة من 1 إلى 6 .

ماهو احتمال الحصول على رقم فردي علما أنه مضاعف للعدد 3؟

حل :نضع ،

A : الحصول على عدد مضاعف لـ 3. ، B : الحصول على عدد فردي .

نجد ، $A = \{3,6\}$ ، $B = \{1,3,5\}$ ، $A \cap B = \{3\}$ وبالتالي :

$p(A) = \dfrac{2}{6}$ و $p(A \cap B) = \dfrac{1}{6}$ ومنه : $p_A(B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(A)} = \dfrac{1}{6} \times \dfrac{6}{2} = \dfrac{1}{2}$.

ملاحظة : الأرقام التي هي من مضاعفات 3 في التجربة هي 3 ، 6 .

احتمال الحصول على عدد فردي منها هو : $\dfrac{1}{2}$.

تمرين 4:

يحتوي كيس على 10 كريات منها 5 بيضاء ، 3 حمراء و 2 خضروان ، نسحب منه كريتين على التوالي ونعتبر كل السحبات لها نفس الاحتمال . ماهو احتمال :

أ- الحصول على كريتين من نفس اللون ؟

ب- الحصول على كريتين من لونين مختلفين علما أ لا واحدة منهما حمراء ؟

حل :

أ- احتمال الحصول على كريتين من نفس اللون هو :

$$p_1 = \frac{(5\times4)+(3\times2)+(2\times1)}{10\times9} = \frac{28}{90} = \frac{14}{45} .$$

ب- احتمال الحصول على كريتين من لونين مختلفين علما أ لا واحدة منهما حمراء هو :

$$p_2 = \frac{(5\times2)+(2\times5)}{7\times6} = \frac{20}{42} = \frac{10}{21} .$$

ملاحظة : يجب أن نفرق بين العبارتين : " A و B " و " B علما أن A ".

فالأولى تعني تحقق الحادثتين A و B في آن واحد ، والثانية تعني تحقق B يتبع تحقق A و A محققة سلفا.

الحوادث المستقلة : (Ω, p) فضاء احتمالي ، A و B حادثتان .

تعريف : نقول عن الحادثتين A و B إنهما مستقلتان إذا وفقط إذا كان تحقق إحداهما لا يغير من احتمال تحقق الأخرى.

مبرهنة : نقول عن الحادثتين A و B إنهما مستقلتان إذا وفقط إذا كان :

$p(A\cap B)=p(A)\times p(B)$.

مثال1:

نرمي قطعة نرد غير مزيفة مرقمة من 1 إلى 6 و نعتبر الحادثتين .

A : نحصل على عدد زوجي ، B : نحصل على عدد أولي .

هل الحادثتان A و B مستقلتان؟

حل :

$p(A)=\frac{1}{2}$ ، $p(B)=\frac{1}{2}$ و $p(A\cap B)=p(\{2\})=\frac{1}{6}$.

بما أن $\frac{1}{4}\neq\frac{1}{6}$ فالحادثتان A و B غير مستقلتين.

مثال2:

نرمي قطعة نقد غير مزيفة مرتين على التوالي ونعتبر الحادثتين .

A : نحصل على الوجه في الرمية الأولى ، B : نحصل على الوجه في الرمية الثانية.

هل الحادثتان A و B مستقلتان؟

حل:

$p(A)=\frac{1}{2}$ ، $p(B)=\frac{1}{2}$ و $p(A\cap B)=p((F,F))=\frac{1}{4}$.

بما أن $\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$ فالحادثتان A و B مستقلتان.

تمرين 5:

زهرة نرد غير مزيفة مرقمة من 1 إلى 6

1. نرمي الزهرة أربع مرات في الهواء ، الرميات مستقلة مثنى مثنى.
   - أ- ماهو احتمال الحصول على الرقم 1 مرة واحدة فقط.
   - ب- ماهو احتمال الحصول على الرقم 1 مرتين بالضبط .
2. نرمي الزهرة n مرة في الهواء (n عدد طبيعي غير معدوم)، الرميات مستقلة مثنى مثنى.
   - أ- احسب p_n احتمال الحصول على الرقم 1 مرة واحدة على الأقل .
   - ب- عين أصغر عدد طبيعي n يكون من أجله $p_n \geq 0{,}99$.

حل:

1. أ- احتمال الحصول على الرقم 1 مرة واحدة فقط هو : $p_1=C_4^1\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^3=\frac{2}{3}\left(\frac{5}{6}\right)^3$.

   ب- احتمال الحصول على الرقم 1 مرتين بالضبط هو :

   $p_2=C_4^2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^2=\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^2=\frac{25}{216}$.

2. أ- احتمال الحصول على الرقم 1 مرة واحدة على الأقل هو : $p_n=1-\left(\frac{5}{6}\right)^n$

(باعتبارها الحادثة العكسية للحادثة " لا نحصل على الرقم 1 ").

ب-أصغر عدد طبيعي n يكون من أجله $p_n \geq 0{,}99$:

$p_n \geq 0{,}99$ تعني $1-\left(\frac{5}{6}\right)^n \geq 0{,}99$.

تعني $\left(\frac{5}{6}\right)^n \leq 0{,}01$. تعني $\ln\left(\frac{5}{6}\right)^n \leq \ln(0{,}01)$. تعني $n \geq \dfrac{\ln(0{,}01)}{\ln\left(\frac{5}{6}\right)}$

تعني $n \geq 25{,}25$

(باعتبار أن : $\dfrac{\ln(0{,}01)}{\ln\left(\frac{5}{6}\right)} \approx 25{,}25$).

أصغر عدد طبيعي n يكون من أجله $p_n \geq 0{,}99$ هو : 26.

دستور الاحتمالات الكلية : (Ω, p) فضاء احتمالي ، $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ و B حوادث حيث :

$(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ تجزئة للمجموعة Ω.

$$p(B)=\sum_{1}^{n} p(B \cap A_i)=\sum_{1}^{n} p(A_i)\times p_{A_i}(B).$$

ملاحظة: $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ تجزئة لـΩ معناه : $\cup A_i=\Omega$ و $A_i \neq \phi$ و $A_i \cap A_j=\phi$ لما $i \neq j$.

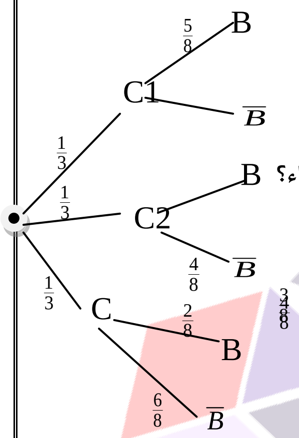
تمرين 6:

نعتبر ثلاثة صناديق غير متمايزة ، يحتوي الأول على 5 كريات بيضاء و 3 سوداء والثاني على 4 كريات بيضاء و 4 سوداء والثالث

على 2 بيضاوين و 6 سوداء ، الكريات لها نفس الحظ في الظهور .

نختار صندوق عشوائيا ثم نسحب منه كرية واحدة .

1. **ماهو احتمال الحصول على كرية بيضاء من الصندوق الأول ؟**
2. **ماهو احتمال الحصول على كرية بيضاء؟**
3. **ماهو احتمال سحب كرية من الصندوق الأول علما أن الكرية المسحوبة بيضاء؟**



حل:

نرمز بـ: C_1 ، C_2 ، C_3 إلى الصناديق الثلاثة و بـ B إلى الكرية البيضاء المسحوبة .

1. احتمال الحصول على كرية بيضاء من الصندوق الأول هو :

$$p(C_1 \cap B)=\frac{1}{3}\times\frac{5}{8}=\frac{5}{24}.$$

2. احتمال الحصول على كرية بيضاء هو :

$$(B)=p(C_1 \cap B)+p(C_2 \cap B)+p(C_3 \cap B)=\frac{1}{3}\times\left(\frac{5}{8}+\frac{4}{8}+\frac{2}{8}\right)=\frac{11}{24}$$

.

3. احتمال سحب كرية من الصندوق الأول علما أن الكرية المسحوبة بيضاء هو :

$$p_B(C_1)=\frac{p(C_1 \cap B)}{p(B)}=\frac{\frac{5}{24}}{\frac{11}{24}}=\frac{5}{11}.$$

.