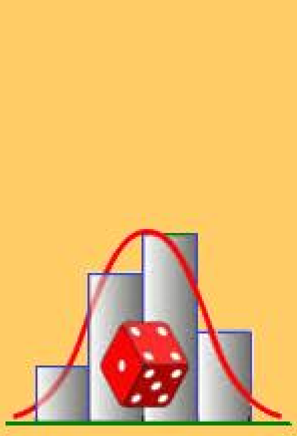
المبدأ الأساسي للعد



ملتقى 11 جانفي 2018- مقاطعات01 و 02 و 03 برج بوعريريج

المبدأ الأساسي للعد

القوائم

قوائم عناصر مجموعة منتهية :

نشاط(1)

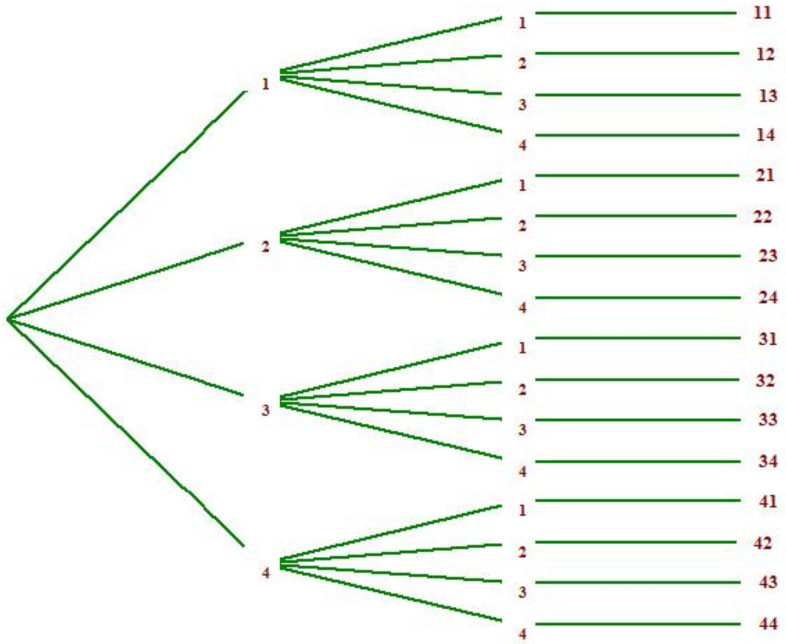
نعتبر المجموعة E ، حيث : $E=\{1;2;3;4\}$

1) شكل كل الأعداد الممكنة ذات رقمين و ذلك باستعمال أرقام المجموعة E .

2) شكل كل الأعداد الممكنة ذات 3 أرقام و ذلك باستعمال أرقام المجموعة E .

الحل:

(1



2) أ) لدينا 4 طرق لاختيار الرقم الأول للعدد الذي يراد تشكيله .

ب) من أجل كل اختيار للرقم الأول لدينا 4 طرق لاختيار الرقم الثاني للعدد الذي يراد تشكيله.

ج) من أجل كل اختيار للرقمين الأول و الثاني لدينا 4 طرق لاختيار الرقم الثالث للعدد الذي يراد تشكيله.

النيجة : عدد الأعداد الممكنة ذات 3 أرقام و يمكن تشكيلها هي : $4\times4\times4=\boxed{4^3}$

ملاحظة : ـــ كل عدد مشكل من رقمين من المجموعة E ، يسمى قائمة ذات 2 عناصر من المجموعة E .

ـــ كل عدد مشكل من ثلاث ارقام من المجموعة E ، يسمى قائمة ذات 3 عناصر من المجموعة E

3.) ضع تخمين حول عدد القوائم ذات n عنصرا و التي يمكن تشكيلها من المجموعة E .

تعــريف

E مجموعة منتهية ذات n عنصرا $(n \geq 1)$ و p عدد طبيعي $(p \geq 1)$

نسمي **قائمة** ذات p عنصرا من E كل متتالية **مرتبة** من p عنصرا من عناصر E

خاصية: من أجل كل عدد طبيعي p $(p \geq 1)$ عدد قوائم E ذات p عنصرا يساوي $\boxed{n^p}$.

ملاحظة: ـ إذا أردنا أن تكون هذه العناصر المرتبة متمايزة مثنى مثنى عندئذ لا يمكن للقائمة أن تحتوي أكثر من n عنصرا و هذا ما يقتضي أن يكون $n \geq P \geq 1$

أمثـلة

1ـ عدد الأعداد ذات 5 أرقام التي يمكن تشكيلها باستعمال الأرقام $8;7;6;5;4;3;2;1$: هو عدد القوائم ذات 5 عناصر من مجموعة ذات 8 عناصر أي : عددا $5^8 = 390625$

2ـ عدد المحاولات لفتح حساب بريد الكتروني كلمة مروره مؤلفة 6 حروف أبجدية هو عدد القوائم ذات 6 عناصر من مجموعة ذات 27عنصر على أكثر تقدير، أي : 6^{27} محاولة

الترتيبات

نشـــــاط(2)

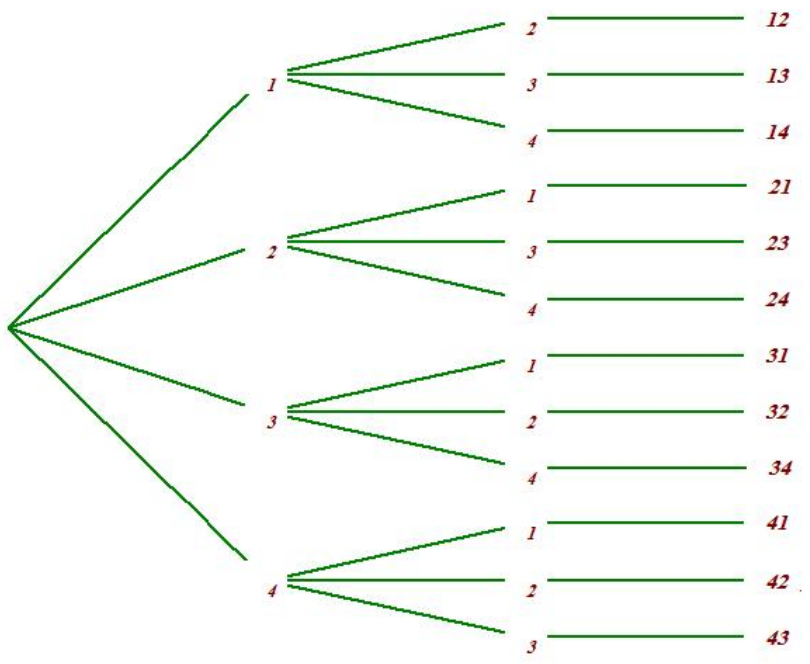
نعتبر المجموعة E ، حيث : $E = \{1;2;3;4\}$

1) شكل كل الأعداد الممكنة ذات رقمين مختلفين و ذلك باستعمال أرقام المجموعة E .

2) شكل كل الأعداد الممكنة ذات 3 أرقام مختلفة و ذلك باستعمال أرقام المجموعة E .

الحل :

1)



2) أ) لدينا 4 طرق لاختيار الرقم الأول للعدد الذي يراد تشكيله .

ب) من أجل كل اختيار للرقم الأول لدينا $3=(4-1)$ طريقة لاختيار الرقم الثاني للعدد الذي يراد تشكيله.

ج) من أجل كل اختيار للرقمين الأول و الثاني لدينا $2=(4-2)$ طريقة لاختيار الرقم الثالث للعدد .

النتيجة : عدد الأعداد الممكنة ذات 3 أرقام و يمكن تشكيلها هي : $4\times3\times2=\boxed{24}$

ملاحظة:

ــ كل عدد مشكل من ثلاث أرقام مختلفة من المجموعة E ، يسمى ترتيبة لــ 3 عناصر من المجموعة E .

3) ضع تخمين حول عدد الترتيبات ذات n عنصرا و التي يمكن تشكيلها من المجموعة E .

نتيجة

نسمي القائمة التي عناصرها متمايزة مثنى مثنى **ترتيبة** و يرمز لعدد الترتيبات ذات p عنصرا من بين n عنصرا بالرمز A_n^p و نكتب : $A_n^p=n(n-1)(n-2)\times....\times(n-p+1)$

ملاحظة:

ـ يمكن كتابة العدد A_n^p بالشكل : $\boxed{A_n^p=\dfrac{n!}{(n-p)!}}$

أمثلة

1ــ أحسب الأعداد : A_{10}^3 ، A_5^1 ، A_6^5 .

2ــ عدد الأعداد ذات 5 أرقام مختلفة التي يمكن تشكيلها باستعمال الأرقام $1;2;3;4;5;6;7;8$: هو عدد الترتيبات

ذات 5 عناصر من مجموعة ذات 8 عناصر أي : عددا $A_8^5=8\times7\times6\times5\times4=\boxed{6720}$

3ــ عدد الطرق لإختيار رئيس قسم و نائب له من قسم لــ20 تلميذ هو عدد الترتيبات

ذات 2 عناصر من مجموعة ذات 22عنصر ، أي : $A_{20}^2=20\times19=\boxed{380}$ طريقة .

4ــ عدد الطرق لجلوس 3 أشخاص داخل حافلة تحوي على 30 مقعدا هو : $A_{30}^3=30\times29\times28=\boxed{24360}$

تطبيق

1ــ ماهو عدد الأعداد الزوجية ذات 4 أرقام مختلفة التي يمكن تشكيلها باستعمال الأرقام $1;2;3;4;5;6;7;8;9$

الحــــل : ــ الأعداد المطلوبة يكون رقم آحادها 2 أو 4 أو 6 أو 8 .

ــ الأعداد التي رقم آحادها 2 تكون من الشكل : $\boxed{?}\boxed{?}\boxed{?}\boxed{2}$

ــ عدد الأعداد التي رقم آحادها 2 هو : $A_7^3=7\times6\times5=\boxed{210}$

✓ عدد الأعداد الزوجية ذات 4 أرقام مختلفة التي يمكن تشكيلها هو : $4\times A_7^3=\boxed{840}$

2ـ نسحب 3 كرات على التوالي من كيس يحتوي على 5 كرات مرقمة من 1من 5 و نرتبها حسب ظهورها فنشكل عددا ذو 3 أرقام .

أ) ما هو عدد الأعداد التي يمكن تشكيلها بهذه الطريقة .

ب) من بين الأعداد المشكلة سابقا ، كم من عدد أكبر من500 .

الجواب : أ) $A_5^3 = \boxed{30}$

ب) الأعداد أكبر من500 تكون من الشكل $\boxed{5}\boxed{?}\boxed{?}$: معناه $A_4^2 = \boxed{12}$ عددا

حالة خاصة:التبديلات

في حالة $n = p$، فان ترتيبة ذات n عنصرا من مجموعة ذات n عنصرا تسمى **تبديلة** ذات n عنصرا .

عدد التبديلات إذن هو $n(n-1)(n-2)\times....\times 2\times 1$ و يرمز له بالرمز $n!$ و يقرأ مفكوك nأو (n عاملي)

إذن : $\boxed{n! = n(n-1)(n-2)\times....\times 2\times 1}$

أمثـلة

1ـ أحسب الأعداد : $3!$ ، $7!$.

2ـ عدد الأعداد ذات 5 أرقام مختلفة التي يمكن تشكيلها باستعمال الأرقام1;2;3;4;5 : هو عدد التبديلات لـ 5 عناصر من مجموعة ذات 5 عناصر أي : عددا $5! = 5\times 4\times 3\times 2\times 1 = \boxed{120}$

3ـ عدد الطرق لوضع 4 كتب جنبا لجنب في رف هو عدد التبديلات لـــ 4 عناصر أي : عددا $4! = 4\times 3\times 2\times 1 = \boxed{24}$

4ـ عدد الطرق لجلوس 10 تلميذ في مخبر يضم 10 كرسي هي: $10! = 10\times 9\times ....\times 3\times 2\times 1 = \boxed{3628800}$

التوفيقات

نشـــــاط(3)

نعتبر المجموعة E ، حيث : $E = \{1;2;3;4\}$

1) شكل أجزاء من المجموعة E و التي تشمل عنصرا واحدا .

2) شكل أجزاء من المجموعة E و التي تشمل 3 عناصر .

3) شكل أجزاء من المجموعة E و التي تشمل 4 عناصر .

تعـريف

E مجموعة منتهية ذات n عنصرا $(n \geq 1)$ و p عدد طبيعي حيث $(n \geq P \geq 0)$

نسمي **توفيقة** ذات p عنصرا من عناصر E كل **جزء** من E ذي p عنصرا من عناصر E

ـ نرمز لعدد التوفيقات ذات p عنصرا من مجموعة ذات n عنصرا بالرمز C_n^p أو الرمز $\begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}$ E

ملاحظات :

ــ عدد الأجزاء التي تحوي عنصر واحد من مجموعة ذات n عنصر هو n ، معناه : $C_n^1 = 1$

ــ يوجد جزء وحيد عدد يحوي n عنصرا ، معناه : $C_n^n = 1$

ــ يوجد جزء وحيد لا يحوي أي عنصرا هو $\varnothing$ ، معناه : $C_n^0 = 1$

مبـــرهنة

من أجل كل عددين طبيعيين n و p حيث $(n \geq P \geq 0)$

$$\boxed{C_n^p = \frac{n(n-1)\times \ldots \times (n-p-1)}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}}$$

ملاحظات :

ــ بما أن : $\boxed{A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}}$ ، فإن : $\boxed{C_n^p = \frac{A_n^p}{p!}}$

أمثـلة

1ــ أحسب الأعداد : C_5^2 ، C_7^3 .

2ــ عدد اللجان ذات 7 تلاميذ يمكن تشكيلها من قسم يحوي 20 تلميذ في تمثيلهم في منافسة بين الاقسام هو : $\boxed{C_{20}^7 = \frac{20!}{7! \times 13!} = 77520}$

3ــ عدد الطرق لسحب 3 كرات من كيس يحوي على 4 كرات بيضاء و 5 كرات حمراء هو : $\boxed{C_9^3 = \frac{9!}{3! \times 6!} = 84}$

تطبيقات

1 ــ يحتوي كيس على 2كرات بيضاء إحداهما تحمل الرقم1 و الأخرى تحمل الرقم2 و 3 كرات حمراء تحمل الأرقام 2 و 4 كرات خضراء مرقمة من 1 الى 4 .

نسحب 3 كرات في آن واحد من هذا الكيس . أحسب عدد الطرق الممكنة لسحب :

أ) ثلاث كرات من نفس اللون .

ب) ثلاث كرات تحمل نفس الرقم .

ج) كرة بيضاء على الأقل .

د) كرة خضراء على الأكثر .

هـ) مجموع الأرقام المسحوبة يساوي 6 .

الحل: أ) ثلاث كرات حمراء أو ثلاث كرات حمراء: $\boxed{C_3^3+C_4^3=5}$ طريقة .

ب) ثلاث كرات تحمل الرقم 2 من مجموع 5 كرات تحمل الرقم2 : $\boxed{C_5^3=10}$ طريقة .

ج) (كرة بيضاء و 2 كرات من غير البيضاء) أو (2 كرات بيضاء و كرة من غير البيضاء) .

معناه توجد: $\boxed{C_2^1\times C_7^2+C_2^2\times C_7^1=49}$ طريقة .

د) (كرة خضراء و 2 كرات من غير الخضراء) أو (3 كرات من غير الخضراء) .

معناه توجد: $\boxed{C_4^1\times C_5^2+C_5^3=50}$ طريقة .

هـ) (3كرات تحمل رقم2) أو (كرة تحمل رقم1 و كرة تحمل رقم2 و كرة تحمل رقم3)

أو (2كرات تحمل رقم1 و كرة تحمل رقم4).

معناه توجد: $\boxed{C_5^3+C_2^1\times C_5^1\times C_1^1+C_2^2\times C_1^1=21}$ طريقة .

$\boxed{2}$ 1ـ بكم طريقة يمكن تشكيل لجنة تضم 5 أشخاص من مجموعة 6 رجال و 4 نساء .

2ـ بكم طريقة يمكن تشكيل لجنة تضم 5 أشخاص من بينهم امرأتان على الأقل .

3ـ بكم طريقة يمكن تشكيل اللجان السابقة إذا أردنا أن الشخص (أ) يجب ضمن هذه اللجان .

4ـ بكم طريقة يمكن تشكيل اللجان السابقة إذا أردنا أن الرجل (أ) و المرأة(ب) لا يجب أن يكونا معا في نفس اللجنة .

الحل: 1ـ عدد اللجان هو عدد توفيقات لـ 5 عناصر من مجموعة 10 أشخاص أي : $\boxed{C_{10}^5=252}$ لجنة

2ـ (2 نساء و 3 رجال) أو (3 نساء و 2 رجال) أو (4 نساء و رجل) :

$\boxed{C_4^2\times C_6^3+C_4^3\times C_6^2+C_6^4\times C_6^1=270}$ لجنة .

3ـ بما أن الشخص (أ) في اللجنة ، نختار العناصر الأربعة من 9 الباقية عدد اللجان هو :

$\boxed{C_9^4=126}$

4ـ (عدد اللجان الكلية) – (عدد اللجان التي تضم (أ) و(ب) معا) = $\boxed{C_{10}^5-C_8^3=126-56}$

دستور ثنائي الحد

n \ p	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

من أجل كل عددين طبيعيين n و p حيث $(n \geq P \geq 0)$

لدينا $\boxed{C_n^p = C_n^{n-p}}$

1) من أجل كل عددين طبيعيين n و p حيث $(n-1 \geq P \geq 1)$

لدينا $\boxed{C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}}$

دستور ثنائي الحد

a و b عددان طبيعيان ، n عدد طبيعي $(n \geq 1)$ لدينا:

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^{n-p} b^p = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^{n-1} a^1 b^{n-1} + C_n^n b^n}$$

تطـــبيق

1 ـ أحسب ما يلي : $A = \sum_{p=0}^{4} C_4^P 2^P$ ، $B = \sum_{K=0}^{3} C_3^k \frac{2^{2k}}{3^k}$

الجواب

$$B = \sum_{K=0}^{3} C_3^k \frac{2^{2k}}{3^k} = C_3^0 \frac{2^0}{3^0} + C_3^1 \frac{2^2}{3^1} + C_3^2 \frac{2^4}{3^2} + C_3^3 \frac{2^6}{3^3}$$
$$= 1 + 4 + \frac{16}{3} + \frac{64}{27}$$
$$= \frac{343}{27}$$

2 ـ جد نشر $(x+2)^3$ ، حيث x عدد حقيقي

الجواب من أجل كل عدد حقيقي x :

$$(x+2)^3 = \sum_{p=0}^{3} C_3^p x^{3-p} \times 2^p = C_3^0 x^3 + C_3^1 x^2 \times 2^1 + C_3^2 x^1 \times 2^2 + C_3^3 \times 2^3$$
$$= x^3 + 6x^2 + 12x + 8$$

3 ـ جد نشر $(2x+3)^4$ ، حيث x عدد حقيقي

الجواب من أجل كل عدد حقيقي x :

$$(2x+3)^4 = C_4^0 (2x)^4 + C_4^1 (2x)^3 \times 3^1 + C_4^2 (2x)^2 \times 3^2 + C_4^3 (2x)^1 \times 3^3 + C_4^4 \times 3^4$$
$$= 16x^4 + 96x^3 + 216x^2 + 216x + 81$$

4 ـ جد نشر $\left(e^x - \frac{1}{e^x}\right)^5$ ، حيث x عدد حقيقي .