الرقم:18/01

المؤسســـة: -	**المستـــوى:** 3رياضيات، 3تق رياضي، 3ع تج
السنة الدراسية: 2016 / 2015	**ميدان التعلم:** الاحتمالات
التاريـــخ:	**الوحدة:** الاحتمالات المتساوية على مجموعة منتهية.
توقيت الحصـة:.	**موضوع الحصة:** قانون الاحتمال

المكتسبات القبلية:

الكفاءات القاعدية: إيجاد قانون احتمال لمتغير عشوائي.

مؤشرات الكفـاءة:

الأنشطة المقترحة وطبيعتها	الإنجاز (سير الحصة)	توجيهات و تعاليق و أنشطة

الأنشطة المقترحة وطبيعتها

نشاط: نعتبر رقما عشوائيا من $\Omega=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

A: "الأرقام الزوجية من Ω"
B: "الأرقام الفردية من Ω"
C: "الأرقام الأولية من Ω"

أحسب احتمال أن يكون الرقم: - فرديا. - زوجيا. - أوليا زوجيا. - أوليا أو فرديا - غير أولي.

ت2) كيس به 2 كريات حمراء، و 1 بيضاء، و 3 سوداء. نسحب منه دفعة واحدة كريتين بصفة عشوائية.

1- ما احتمال سحب اللونين الأحمر والأسود معا؟

إرشاد للحل:

$\Omega=\{(N_1,N_2),(N_1,N_3),$

..... (15زوجا) ......

$(R_1,B),(R_2,B)\}$

2- نسحب الآن بصفة عشوائية كرية واحدة، عرف قانون الاحتمال وأحسب أمله الرياضي، وتباينه وانحرافه المعياري.

الإنجاز (سير الحصة)

I/ تمهيد:

II/ العرض: حساب الاحتمالات

مصطلحات: - نسمي تجربة عشوائية كل تجربة لا يمكن الجزم بنتيجتها رغم معرفة مجموعة نتائجها الممكنة. وتسمى مجموعة هذه النتائج مجموعة الإمكانيات (أو المخارج)، ونرمز لها بـ Ω. - كل جزء A من Ω يدعى حادثة. - إذا احتوت A على عنصر واحد فقط تسمى حادثة أولية (أو بسيطة)، وإلا فتسمى حادثة مركبة (غير بسيطة)، وإذا كانت خالية تدعى الحادثة المستحيلة، وإذا كانت $A=\Omega$ تسمى الحادثة الأكيدة. - الحادثة التي تحتوي على كل عناصر Ω ما عدا عناصر A تسمى الحادثة العكسية لها ونرمزها $\overline{A}$. - الحادثة $A\cap B$ هي الحادثة "A و B" وتتشكل من العناصر المشتركة بينهما. - الحادثة $A\cup B$ هي الحادثة "A أو B" وتتشكل من كل عناصر هما.

- إذا كان $A\cap B=\{\ \}$ نقول إنهما غير متلائمتين.

قانون الاحتمال: $\Omega=\{e_1,e_2,...,e_n\}$ مجموعة إمكانيات لتجربة عشوائية.

إن إرفاق المخارج بأعداد حقيقية موجبة p_1 ، p_2 ،...، p_n على الترتيب، حيث $\sum_{i=1}^{n} p_i=1$

يسمى قانون احتمال، ونرمز له بـ P. وعادة ما ننظمه في جدول على النحو التالي:

e_i	e_1	e_2	...	e_n
p_i	p_1	p_2	...	p_n

ملاحظة1: $0\le p_i\le 1$ من أجل كل $1\le i\le n$.

ملاحظة2: نمذجة تجربة عشوائية تعني إرفاقها بمجموعة إمكانيات Ω وقانون احتمال P عليها.

ملاحظة3: $P(\Omega)=1$ ، $P(\Phi)=0$.

مثال: نَمذِج سحب كرية واحدة بصفة عشوائية من صندوق به 3كريات سوداء، و5 بيضاء، و2 زرقاء.

تساوي الاحتمالات: فيما سبق إذا كان $p_1=p_2=...=p_n=\dfrac{1}{n}$ نقول إن الاحتمال متساوي التوزيع، (أو التجربة متساوية الاحتمال، ومعناه أن الحوادث الأولية لها نفس الاحتمال).

فإذا كانت A حادثة تشمل m مخرجا يكون: $P(A)=\dfrac{m}{n}$.

الخواص: Ω مجموعة إمكانيات لتجربة عشوائية مزودة بقانون احتمال P معرف بالجدول التالي:

e_i	e_1	e_2	...	e_n
p_i	p_1	p_2	...	p_n

و A ، B حادثتان- $\boxed{0\le p(A)\le 1 ،\ P(\Phi)=0 ،\ P(\Omega)=1}$

- $\boxed{P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)}$

- $\boxed{\text{إذا كانت } A\cap B=\phi \text{ نجد } P(A\cup B)=P(A)+P(B)}$ - $\boxed{P(\overline{A})=1-P(A)}$ - $\boxed{\text{إذا كانت}}$

$\boxed{A\subset B \text{ نجد } P(A)\le P(B)}$.

الأمل الرياضياتي: إذا كانت المخارج e_i أعدادا فإن:

$\boxed{\text{أمل القانون } P \text{ هو: } E=e_1p_1+e_2p_2+...+e_np_n=\sum_{i=1}^{n} e_ip_i}$. **وتباينه هو:**

$\boxed{V=p_1(e_1-E)^2+p_2(e_2-E)^2+...+p_n(e_n-E)^2=\sum_{i=1}^{n} p_i(e_i-E)^2}$.- ونجد أيضا:

$\boxed{V=(\sum_{i=1}^{n} p_ie_i^2)-E^2}$. - **وانحرافه المعياري هو:** $\boxed{S=\sqrt{V}}$.

ملاحظة: الأمل في سلسلة إحصائية يمثل الوسط الحسابي.

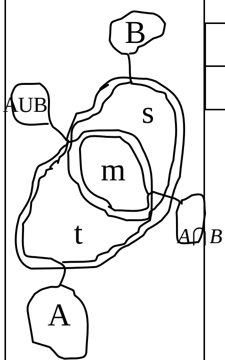
III/ تطبيق:

ت1) من رقم إلى رقم ص.

توجيهات و تعاليق و أنشطة

مفهوما الاحتمال والمتغير العشوائي غير جديد على التلميذ، لذا تستغل هذه الفقرة في معالجة أنشطة تدعم مكتسباته حول الموضوع وتوفر له فرصة توظيفها من جديد لتهيئه للتوسع فيها لاحقا.

يُفسّر الأمل الرياضي لمتغير عشوائي باعتباره المتوسط الحسابي لقيم هذا المتغير العشوائي مرفقة باحتمال كل منها.



الرقم:18/02

المؤسســـــة:	**المستـــوى:** 3رياضيات، 3تق رياضي، 3ع تج
السنة الدراسية: 2015 / 2016.	**ميدان التعلم:** الاحتمالات
التاريـــــــخ:	**الوحدة:** الاحتمالات المتساوية على مجموعة منتهية.
توقيت الحصـة:.	**موضوع الحصة:** المتغير العشوائي

المكتسبات القبلية:

الكفاءات القاعدية: حل مسائل في الاحتمالات توظف المتغيرات العشوائية، قانون احتمالها، التباين، الانحراف المعياري والأمل الرياضي.

مؤشرات الكفـاءة:

الأنشطة المقترحة وطبيعتها	الإنجاز (سير الحصة)	توجيهات و تعاليق و أنشطة

نشاط:
نأخذ بصفة عشوائية عددا من المجموعة $\Omega=\{12,23,25,30,34,35,43,44,52,61\}$ ونرفق كل عدد مأخوذ بمجموع رقميه.
- أحسب احتمال أخذ كل عدد من Ω.
- أذكر كل القيم التي يأخذها المتغير العشوائي المعرف فيما مضى، واكتب الحوادث التالية بالقائمة $(X=3)$، $(X=5)$، $(X=7)$.
- عرف قانون احتمال X واحسب أمله وتباينه وانحرافه المعياري.(هذا السؤال يمكن إلغاؤه)

I/ تمهيد:

II/ العرض: المتغير العشوائي

المتغير العشوائي:

تعريف: Ω مجموعة إمكانيات، و P احتمال عليها.
إذا كان X دالة عددية معرفة على Ω نسميه متغيرا عشوائيا.

قانون الاحتمال لمتغير عشوائي: X متغير عشوائي معرف على مجموعة إمكانيات Ω، مجموعة قيمه هي $I=\{x_1,x_2,...,x_n\}$، نرمز بـ $(X=x_i)$ للحادثة المكونة من كل الإمكانيات التي صورها بواسطة X هي x_i.

مثال: كيس به قريصتان سوداوان و1 بيضاء و 1خضراء. نسحب منه دفعة واحدة بصفة عشوائية قريصتين. - أكتب Ω بالقائمة. - نشير إلى الأسودبـ0، والأبيض بـ1، والأخضربـ2، ونعرف X كما يلي: كل سحب بمجموع الرقمين المشار بهما للقريصتين. - أذكر كل قيم X. ثم شكل الحوادث: $(X=0)$، $(X=1)$.

تعريف: قانون احتمال المتغير العشوائي X هو الدالة التي ترفق بكل عدد x_i العدد $P(X=x_i)$.

مثال: عرف في جدول قانون الاحتمال للمتغير العشوائي الوارد في المثال السابق.

الأمل والتباين والانحراف المعياري لمتغير عشوائي:

تعريف: نضع $p_i=P(X=x_i)$ من أجل $1\le i\le n$. الأمل الرياضي والتباين، والانحراف المعياري للمتغير العشوائي X هي على الترتيب $E(X)$، $V(X)$، $\sigma(X)$ حيث:

$$\boxed{E(X)=\sum_{i=1}^{n}x_i p_i}\text{، }\boxed{V(X)=\sum_{i=1}^{n}p_i[x_i-E(X)]^2}\text{، }\boxed{S(X)=\sqrt{V(X)}}$$

نجد أيضا: $\boxed{V(X)=[\sum_{i=1}^{n}p_i x_i^2]-[E(X)]^2}$.

III/ تطبيق: ت1) من رقم إلى رقم ص

ت2) نقذف (نرمي) زهرة نرد غير مزيف أوجهه مرقمة من1 إلى6، ونسجل الرقم الظاهر من الأعلى.

I) أ - ماذا نسمي هذه التجربة؟ وما هي مجموعة الإمكانيات؟
ب - أذكر كل الحوادث الأولية، ثم أذكر حادثين متعاكسين.
جـ - أحسب احتمال الحصول على رقم زوجي. ثم عرف قانون احتمال هذه التجربة.
د - جد الأمل والتباين والانحراف المعياري لهذا القانون.

II) نرفق الآن ظهور الرقم1 بالعدد1، والرقم2بالعدد2، والرقم3 بالعدد2، وكل رقم مما بقي بالعدد3.
أ - عرف المتغير العشوائي الناتج. واذكر بالقائمة كل حادثة مما يلي: $(X=1)$، $(X=2)$، $(X=3)$ واحسب احتمالاتها.
ب - أحسب الأمل الرياضي والتباين والانحراف المعياري لهذا المتغير العشوائي.

ت3) يحتوي كيس على 4 كريات بيضاء و3 حمراء و8 صفراء و5 خضراء. نسحب منه كرية بلا اختيار. ولتكن الدالة X التي ترفق بكل كرة بيضاء مسحوبة العدد2، وبالحمراء العدد3- وبالصفراء العدد1، وبالخضراء العدد1-.
- عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي المعرف بهذه الدالة.
- أحسب الأمل الرياضي والتباين والانحراف المعياري لـ X.

توجيهات و تعاليق و أنشطة:
- يُفسّر الأمل الرياضي لمتغير عشوائي باعتباره المتوسط الحسابي لقيم هذا المتغير العشوائي مرفقة باحتمال كل منها، وتعالج أنشطة متنوعة لتأكيد هذا المعنى وتوظيفه للإجابة عن تساؤلات تتعلق بالاحتمالات.
- تعالج أنشطة نمذجة تجربة يتدخل فيها متغير عشوائي وتوظف الانحراف المعياري والأمل الرياضي.

الرقم:18/03

المؤسســـة:	**المستـــوى:** 3رياضيات، 3تق رياضي، 3ع تج
السنة الدراسية: 2015 / 2016.	**ميدان التعلم:** الاحتمالات
التاريـــــخ:	**الوحدة:** العدّ
توقيت الحصـة:.	**موضوع الحصة:** المبدأ الأساسي للعدّ

المكتسبات القبلية:

الكفاءات القاعدية: تنظيم معطيات من أجل عدّها باستخدام المبدأ الأساسي للعدّ (المجموع والجُداء).

مؤشرات الكفـاءة:

الأنشطة المقترحة وطبيعتها	*الإنجاز (سير الحصة)*	توجيهات و تعاليق و أنشطة
نشاط: نعتبر المجموعتين: $A=\{a_1,a_2\}$ ، $B=\{b_1,b_2,b_3\}$. 1- نعتبر عنصرا واحدا من المجموعة A أو المجموعة B . ما هو عدد الحالات الممكنة لاختيار هذا العنصر؟ 2- نعتبر الآن عنصرا واحدا من المجموعة A وعنصرا واحدا من المجموعة B . ما هو عدد الحالات الممكنة لاختيار العنصرين؟	**I/ تمهيد:** **II/ العرض:** **المبدأ الأساسي للعدّ:** t ، m ، n أعداد طبيعية غير معدومة. - إذا كنا بصدد اختيار من ضمن n إمكانية متبوعا باختيار من ضمن m إمكانية، متبوعا باختيار من ضمن t إمكانية، فإن الاختيار الكلي سيكون من ضمن $n\times m\times t$ إمكانية. - أما إذا كنا بصدد اختيار من ضمن n إمكانية أو اختيار من ضمن m إمكانية، أو اختيار من ضمن t إمكانية، فإن الاختيار الكلي سيكون من ضمن $n+m+t$ إمكانية. **III/ تطبيق:** **ت1)** - كم عددا مكون من رقمين يمكن تشكيله بالأرقام2، 3، 5؟ (يمكن استخدام شجرة) - نفس السؤال من أجل تشكيله من 3أرقام بالأرقام2، 3؟ **ت2)** يقدم مطعم 3 أصناف من اللحم، وصنفين من الحساء و4 أصناف من الفاكهة. علما أن الوجبة مكونة من صنف واحد من كل من اللحم والحساء والفاكهة، ما هو عدد الوجبات المختلفة التي يمكن تقديمها؟ **ت3)** من رقم إلى رقم ص	- تستعمل مختلف التمثيلات كالمخططات، الجداول، شجرة الإمكانيات لطرح المبدأ الأساسي للعدّ وشرحه. - تعالج حالات بسيطة في العدّ لتدعيم مكتسبات التلميذ حول حل مسائل في الاحتمالات المتقطعة.

الرقم:18/04   هذه المذكرة خاصة بـ 3ع ت ج

المؤسســـــة:	**المستــــوى:** 3رياضيات، 3تق رياضي، 3ع تج
السنة الدراسية: 2015 / 2016.	**ميدان التعلم:** الاحتمالات
التاريــــــخ:	**الوحدة:** العدّ
توقيت الحصـة:..	**موضوع الحصة:** التحليل التوفيقي.

المكتسبات القبلية:

الكفاءات القاعدية: تبرير بعض قوانين التحليل التوفيقي (القوائم، الترتيبات، التبديلات، التوفيقات) (موجودة في المنهاج بشكل ضمني فقط)

مؤشرات الكفـاءة:

الأنشطة المقترحة وطبيعتها	الإنجاز (سير الحصة)	توجيهات و تعاليق و أنشطة

I/ تمهيد:

II/ العرض: التحليل التوفيقي

مسألة: نفرض صندوقا به 5 قريصات مرقمة من 1 إلى 5. نسحب منه 3 قريصات بصفة عشوائية، ونشكل عددا من ثلاثة أرقام. ما هو عدد الأعداد التي يمكن تشكيله؟

الحالة1: القريصات الثلاث تسحب واحدة تلوى الأخرى مع إعادة كل قريصة قبل السحب الموالي.

الجواب: الأعداد هي: ...(يمكن إنشاء شجرة مثلا) وعددها125 أي 5^3.

نتائج واصطلاحات:

$\boxed{\text{كل عنصر مرتب من الشكل } (a_1,a_2,...,a_p) \text{ حيث } a_1 \text{ ، } a_2 \text{ ، ... ، } a_p \text{ من } A \text{ يسمى قائمة}}$.

عدد القوائم: عدد القوائم ذات p عنصرا من مجموعة ذات n عنصرا هو n^p .

مثال: عدد الأعداد بـ6 أرقام من 1، 2، ... ، 9 هو $9^6 = 531441$.

الحالة2: القريصات الثلاث تسحب واحدة تلوى الأخرى دون إعادة كل قريصة.

الجواب: الأعداد هي: ...(يمكن إنشاء شجرة مثلا) وعددها60 أي 3×4×5.

نتائج واصطلاحات: $\boxed{\text{كل قائمة عناصرها مختلفة مثنى مثنى تسمى ترتيبة}}$.

عدد الترتيب: نفرض أن $p \le n$ ، عدد الترتيب ذات p عنصرا من مجموعة ذات n عنصرا هو: $n(n-1)(n-2)...(n-p+1)$. ونرمز لهذا العدد بـ A_n^p .

مثال: في المثال السابق إذا افترضنا اختلاف أرقام العدد مثنى مثنى نجد عدد الأعداد هو:

$$9(9-1)(9-2)(9-3)(9-4)(9-5) = 9\times8\times7\times6\times5\times4 = 60480$$

التبديلات: $\boxed{(n = p)}$

$\boxed{\text{الترتيبة ذات } n \text{ عنصرا من المجموعة } A \text{ تسمى تبديلة بـ } n \text{ عنصرا. أو تبديلة لـ } A}$.

نتيجة: عدد التبديلات بـ n عنصرا هو: $A_n^n = n(n-1)(n-2)\times...\times3\times2\times1$.

مثال: صندوق به 4 قريصات مرقمة من 1 إلى4، نسحب منه بصفة متتالية 4قريصات دون إرجاع أي قريصة بعد السحب، ونسجل الرقم المسحوب لنشكل بذلك عددا من أربعة أرقام. ما هو عدد الأعداد التي يمكن تشكيلها بهذه الطريقة؟ (جواب $A_4^4 = 4\times3\times2\times1 = 24$).

ملاحظة: العدد A_n^n نرمز له بـ $n!$ ويقرأ عاملي n . مثال: $4! = 24$ ، $5! = 120$ ، $1! = 1$ ، نقبل أن $0! = 1$.

الحالة3: القريصات الثلاث تسحب في آن واحد. في هذه الحالة لا نشكل أعدادا بل نشكل مجموعات بـ3 عناصر.

الجواب: المجموعات هي: ... وعددها10. ويعطى هذا العدد بـ: $\dfrac{5!}{3!(5-3)!}$ ونرمز له بـ C_5^3 .

نتائج واصطلاحات: $\boxed{\text{كل جزء من } A \text{ به } p \text{ عنصرا، يسمى توفيقة بـ } p \text{ عنصرا}}$.

عدد التوفيقات: يعطى عدد التوفيقات بـ p عنصرا من المجموعة A بالعبارة: $\dfrac{n!}{p!(n-P)!}$ ونرمز لهذا العدد بـ C_n^p .

مثال: ما هو عدد المجموعات الجزئية من $B = \{1,2,3,4,6\}$ بـ3 عناصر؟ أذكرها كلها.

خواص: n ، p عددان طبيعيان. لدينا: $\boxed{C_n^p = \dfrac{A_n^p}{p!}}$ ، $\boxed{A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}}$ ، $\boxed{0! = 1}$ ، $\boxed{1! = 1}$ ، $\boxed{C_n^n = 1}$ ، $\boxed{C_n^p = C_n^{n-p}}$ ، $\boxed{C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p}$.

III/ تطبيق:

ت1) أثبت صحة الخواص المذكورة.

ت2) قسم دراسي يتكون من 30 تلميذا يراد تمثيله بـ3 تلاميذ فقط. بكم طريقة يمكن اختيارهم؟

ت3) أكمل الجدول التالي بملء خاناته بالأعداد C_n^p . (يسمى المثلث العددي، يعطى الجدول إلى غاية n=6، p=6 أنظر المذكرة الموالية (18/05).

تبرر قوانين التحليل التوفيقي انطلاقا من معالجة أنشطة في العدّ تتمحور حول تجارب بسيطة في السحب (السحب على التوالي دون إعادة، مع الإعادة،السحب في آن واحد)

المؤسســـــة:	**المستـــوى:** 3رياضيات، 3تق رياضي، 3ع تج
السنة الدراسية: 2015 / 2016.	**ميدان التعلم:** الاحتمالات
التاريـــــخ:	**الوحدة:** العدّ
توقيت الحصـة:.	**موضوع الحصة:** القوائم، الترتيبات، التبديلات، التوفيقات

المكتسبات القبلية:

الكفاءات القاعدية: استخراج بعض قوانين التحليل التوفيقي (القوائم، الترتيبات، التبديلات، التوفيقات)

مؤشرات الكفـاءة:

الأنشطة المقترحة وطبيعتها	الإنجاز (سير الحصة)	توجيهات و تعاليق و أنشطة

الأنشطة المقترحة وطبيعتها

نشاط:

x عدد مشكل من 4 أرقام من بين الأرقام 1، 2، 3، 4، 5.

- هل يمكن ذكر كل قيمه؟ ما عدد هذه الأعداد؟
- ما عددها إذا اشترطنا أن لا يتكرر الرقم في نفس العدد؟
- كم يصبح عددها إذا كان x يتشكل من 5 أرقام؟
- ما هو عدد كل المجموعات الجزئية ذات 3 عناصر من المجموعة $A=\{a,b,c,d,e\}$ ؟

الإنجاز (سير الحصة)

I/ تمهيد:

II/ العرض:

التحليل التوفيقي: A مجموعة غير خالية بها n عنصرا. و p عدد طبيعي.

1) القوائم:

تعريف: كل عنصر مرتب من الشكل $(a_1,a_2,...,a_p)$ حيث a_1 ، a_2 ، ... ، a_p من A يسمى قائمة.

عدد القوائم: عدد القوائم ذات p عنصرا من مجموعة ذات n عنصرا هو n^p .

مثال: عدد الأعداد بـ6 أرقام من 1، 2، ... ، 9 هو $9^6=531441$.

2) الترتيبات:

تعريف: كل قائمة عناصرها مختلفة مثنى مثنى تسمى ترتيبة.

عدد الترتيب: نفرض أن $p\le n$ ، عدد الترتيب ذات p عنصرا من مجموعة ذات n عنصرا هو: $n(n-1)(n-2)...(n-p+1)$. ونرمز لهذا العدد بـ A_n^p .

مثال: في المثال السابق إذا افترضنا اختلاف أرقام العدد مثنى مثنى نجد عدد الأعداد هو:

$$9(9-1)(9-2)(9-3)(9-4)(9-5)=9\times8\times7\times6\times5\times4=60480$$

3) التبديلات: $\boxed{(n=p)}$

تعريف: الترتيبة ذات n عنصرا من المجموعة A تسمى تبديلة بـ n عنصرا. أو تبديلة لـ A.

نتيجة: عدد التبديلات بـ n عنصرا هو: $A_n^n=n(n-1)(n-2)\times...\times3\times2\times1$.

مثال: صندوق به 4 قريصات مرقمة من 1 إلى4، نسحب منه بصفة متتالية 4قريصات دون إرجاع أي قريصة بعد السحب، ونسجل الرقم المسحوب لنشكل بذلك عددا من أربعة أرقام. ما هو عدد الأعداد التي يمكن تشكيلها بهذه الطريقة؟ (جواب $A_4^4=4\times3\times2\times1=24$).

ملاحظة: العدد A_n^n نرمز له بـ $n!$ ويقرأ عاملي n. مثال: $4!=24$ ، $5!=120$ ، $1!=1$، نقبل أن $0!=1$.

4) التوفيقات:

تعريف: كل جزء من A به p عنصرا، يسمى توفيقة بـ p عنصرا.

عدد التوفيقات: يعطى عدد التوفيقات بـ p عنصرا من المجموعة A بالعبارة: $\dfrac{n!}{p!(n-P)!}$

ونرمز لهذا العدد بـ C_n^p .

مثال: ما هو عدد المجموعات الجزئية من $B=\{1,2,3,4,5\}$ بـ3 عناصر؟ أذكرها كلها.

خواص: n ، p عددان طبيعيان. لدينا: $\boxed{C_n^p=\dfrac{A_n^p}{p!}}$ ، $\boxed{A_n^p=\dfrac{n!}{(n-p)!}}$ ، $\boxed{0!=1}$ ، $\boxed{1!=1}$ ، $\boxed{C_n^n=1}$ ، $\boxed{C_n^p=C_n^{n-p}}$ ، $\boxed{C_n^p=C_{n-1}^{p-1}+C_{n-1}^p}$.

III/ تطبيق:

ت1) أثبت صحة الخواص أعلاه.

ت2) قسم دراسي يتكون من 30 تلميذا يراد تمثيله بـ3 تلاميذ فقط. بكم طريقة يمكن اختيارهم؟

ت3) أكمل الجدول التالي بملء خاناته بالأعداد C_n^p . (يسمى المثلث العددي)

n \ p	0	1	2	3	4	5	6
0							
1							
2							
3							
4							
5							
6							

توجيهات و تعاليق و أنشطة

- يتم التوصل إلى قوانين التحليل التوفيقي باعتماد دراسة نظرية بحيث تصبح هذه القوانين فيما بعد أدوات رياضياتية قوية تسمح بمعالجة وضعيات مركبة في العدّ تعتمد نمذجتها على تجارب إلقاء قطعة نقدية و إلقاء حجر نرد و السحب بأنواعه الثلاثة.

الرقم:18/06 هذه المذكرة لا تهم ع تج

المؤسســـــة:	**المستـــوى:** 3رياضيات، 3تق رياضي، 3ع تج
السنة الدراسية: 2015 / 2016.	**ميدان التعلم:** الاحتمالات
التاريــــــخ:	**الوحدة:** العدّ
توقيت الحصـة:.	**موضوع الحصة:** حل مسائل

المكتسبات القبلية:

الكفاءات القاعدية: حل مسائل في العدّ باستعمال قوانين التحليل التوفيقي.

مؤشرات الكفـاءة:

الأنشطة المقترحة وطبيعتها	الإنجاز (سير الحصة)	توجيهات و تعاليق و أنشطة
نشاط: كل الحصة عبارة عن أنشطة.	**I/ تمهيد:** **II/ العرض:** **دستور ثنائي الحد:** a، b عددان حقيقيان، و n عدد طبيعي غير معدوم. يمكن باستخدام البرهان بالتراجع لإثبات أن: $(a+b)^n=\sum_{i=0}^{n}C_n^i a^{n-i}b^i$. مثال: $(x+1)^2$، $(x+y)^3$. **III/ تطبيق:** **ت1)** من رقم إلى رقم ص **ت2)** نسحب ورقتين بصفة عشوائية من بين 10 أوراق مرقمة من 1 إلى10، أوجد احتمال أن يكون المجموع فرديا في كل حالة مما يلي: أ- سحب الورقتين معا. ب- سحبهما الواحدة بعد الأخرى، دون إرجاع الورقة المسحوبة أولا. جـ- سحبهما الواحدة بعد الأخرى، مع إرجاع الورقة المسحوبة أولا قبل السحب الثاني. **ت3)** يتكون فوج تربوي من10 تلاميذ أعمارهم16 سنة، و5 أعمارهم17 سنة، و20 أعمارهم 18 سنة. أرادوا تشكيل لجنة مكونة من تلميذين. أ- أذكر عدد الطرائق لاختيار هذين التلميذين. ب- ما احتمال أن يكون مجموع سنيهما 34 سنة؟ جـ- نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل إمكانية مجموع سني التلميذين. أكتب قانون احتمال هذا المتغير واحسب أمله الرياضي، وتباينه وانحرافه المعياري. **ت4)** أنشر العبارة $(x-a)(x-b)$، ثم حل في R المعادلة $x^2-C_n^p x+C_{n-1}^{p-1}C_{n-1}^{p}=0$. **ت5)** برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم: $\frac{1}{n!}\le\frac{1}{2^{n-1}}$. **ت6)** زهرة نرد مرقمة أوجهها من1 إلى6 ومزيفة بحيث احتمال ظهور كل وجه متناسب مع رقمه. أ- عين مجموعة الإمكانيات Ω، واحسب احتمال الحوادث البسيطة. ب- أحسب احتمال ظهور رقم أولي، ثم احتمال ظهور رقم أكبر من أو يساوي5.	

الرقم: 18/07

المؤسســـــة:	**المستـــوى:** 3رياضيات، 3تق رياضي، 3ع تج
السنة الدراسية: 2015 / 2016.	**ميدان التعلم:** الاحتمالات
التاريــــــخ:	**الوحدة:** الاحتمالات الشرطية
توقيت الحصـة:.	**موضوع الحصة:** الاحتمالات الشرطية

المكتسبات القبلية:

الكفاءات القاعدية: التعرف على استقلال أو ارتباط حادثتين. ـ توظيف شجرة الاحتمالات لحل مسائل في الاحتمالات الشرطية.

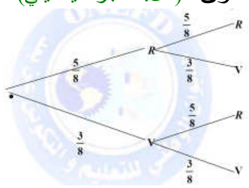
مؤشرات الكفـاءة:

الأنشطة المقترحة وطبيعتها

نشاط:

كيس يحتوي على 5كريات حمراء و 3 خضراء، نسحب منه كريتين على التوالي مع إرجاع الأولى قبل سحب الثانية.

- نمذج هذه التجربة بواسطة شجرة الاحتمالات.
- ما احتمال سحب نفس اللون؟ (حل:الشجرة فيما يلي)



ت4) Ω مجموعة إمكانيات، و A، B حادثان مستقلان احتمالاهما على الترتيب 0.3، 0.2.

أحسب احتمال كل من الحوادث: $A\cap B$، $A\cup B$، $A\cup\overline{B}$، $\overline{A}\cup B$، $\overline{A}\cup\overline{B}$.

الإنجاز (سير الحصة)

I/ تمهيد:

II/ العرض: الاحتمالات الشرطية

الأحداث المستقلة: Ω مجموعة إمكانيات، و A، B حادثان، حيث $P(A)\neq 0$.

تعريف1: احتمال B علما أن A محققة هو العدد $P_A(B)$ حيث $P_A(B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$.

أمثلة: هل يمكن تعريف الحوادث التالية: $P_B(A)$، $P_\Omega(A)$، $P_\phi(A)$، $P_A(\phi)$.

تعريف2: A، B مستقلتان معناه: $P_A(B)=P(B)$ أي $P(A\cap B)=P(A)P(B)$

خواص: $\boxed{P_A(\Omega)=1}$، $\boxed{P_A(\phi)=0}$، $\boxed{P(A\cap B)=P_A(B)P(A)=P_B(A)P(B)}$.

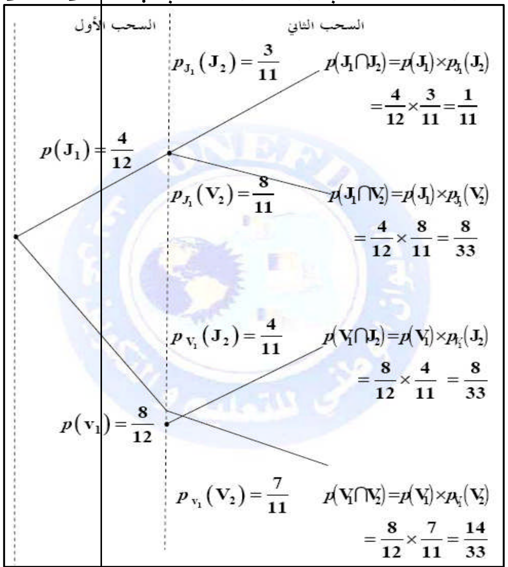
وإذا كان B_1 و B_2 غير متلائمين فإن: $\boxed{P_A(B_1\cup B_2)=P_A(B_1)+P_A(B_2)}$.

وإذا كانت A، B مستقلتين فإن A، $\overline{B}$ كذلك.

III/ تطبيق: ت1) من رقم إلى رقم ص

ت2) وعاء به 4 كريات صفراء و8 خضراء. نسحب منه على التتابع بدون إعادة كريتين.

- أحسب احتمال الحصول على صفراء ثم خضراء. واحتمال الحصول على خضراء ثم صفراء، واحتمال الحصول على اللونين معا. - باستعمال شجرة الاحتمالات أعد حساب الاحتمالات السابقة.



(حل مختصر: J_1 سحب الأصفر في الأول، ... فتكون الإجابات هي على التوالي:

$$\boxed{P(J_1\cap V_2)=P(J_1)P_{J_1}(V_2)=\frac{4}{12}\times\frac{8}{11}=\frac{8}{33}}$$

$$\boxed{P(V_1\cap J_2)=P(V_1)P_{V_1}(J_2)=\frac{8}{12}\times\frac{4}{11}=\frac{8}{33}}$$

$$\boxed{P(J_1\cap J_2)+P(V_1\cap V_2)}$$

(

ت3) كيس به 6 قريصات مرقمة من 1 إلى 6 نسحب منه دفعة واحد قريصتين.

- أحسب احتمال سحب قريصتين مجموعهما 7.
- أحسب احتمال سحب قريصتين مجموعهما 7 علما أن فرقهما 3.

(حل مختصر: 1) عدد الإمكانيات الكلية $C_6^2=15$،

A حادثة مجموع الرقمين 7، $A=\{\{1,6\},\{2,5\},\{3,4\}\}$ و $P(A)=\dfrac{3}{15}=\dfrac{1}{5}$ 2) B حادثة فرق الرقمين 3، $B=\{\{1,4\},\{2,5\},\{3,6\}\}$، والاحتمال هو $P_B(A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{\frac{1}{15}}{\frac{1}{5}}=\dfrac{1}{3}$).

توجيهات و تعاليق و أنشطة

- يبرر تعريف الاحتمال الشرطي انطلاقا من وضعيات بسيطة في الاحتمالات المتساوية ثم يطبق في الحالات الأخرى.
- تعتبر الأنشطة التي تتعلق بتجارب السحب المتتالي ميدانا خصبا لمعالجة الاحتمالات الشرطية، لذا تقترح على التلميذ وضعيات متنوعة منها توفر له فرصة توظيف شجرة الاحتمالات.

هذه المذكرة لا تهم ع تج

الرقم:18/08

المؤسســـــة:	**المستـــوى:** 3رياضيات، 3تق رياضي، 3ع تج
السنة الدراسية: 2015 / 2016.	**ميدان التعلم:** الاحتمالات
التاريـــــخ:	**الوحدة:** الاحتمالات الشرطية
توقيت الحصـة:.	**موضوع الحصة:** حل مسائل في الاحتمالات الشرطية

المكتسبات القبلية:

الكفاءات القاعدية: حل مسائل في الاحتمالات الشرطية باستعمال قوانين التحليل التوفيقي.

مؤشرات الكفـاءة:

الأنشطة المقترحة وطبيعتها	*الإنجاز (سير الحصة)*	توجيهات و تعاليق و أنشطة
نشاط: كل الحصة عبارة عن أنشطة	**I/ تمهيد:** **II/ العرض:** **III/ تطبيق:** **ت1)** من رقم إلى رقم ص **ت2)** يراد تشكيل لجنة من 5 أعضاء من بين مجموعة من12 شخصا. شخصان من هذه امجموعة لا يرغبان دخول اللجنة إلا معا. 1) أحسب عدد اللجان التي يمكن تشكيلها حسب ما ذكر. 2) ما احتمال أن يدخل الشخصان في اللجنة؟ **ت3)** فوج رياضي يتكون من 8 ذكورا و4 إناثا، يراد تمثيله بلجنة من 3 أعضاء. **I)** أ ـ بكم طريقة يمكن اختيارهم؟ ب ـ ما احتمال أن لا تشمل اللجنة إناثا؟ جـ ـ ما احتمال أن تشمل الجنسين معا؟ **II)** نفرض اللجنة مشكلة من رئيس ونائب له، ومنسق. أ ـ بكم طريقة يمكن اختيارهم؟ ب ـ ما احتمال أن تشمل اللجنة رجلا على الأقل؟ **III)** تشكل اللجنة الآن كما في الفرع I) ولكن يشترط الشخص x أن لا تشمل اللجنة الشخص y. (x، y رياضيان من الفوج). أ ـ ما هو عدد الطرق الممكنة؟ ب ـ علما أن x وy ذكران، أحسب احتمال أن تشمل اللجنة الجنسين معا.	- تعالج أنشطة حول الاحتمالات الشرطية يتطلب حلها تطبيق قوانين التحليل التوفيقي. تعديل2009/2008: حل مسائل في الاحتمالات الشرطية باستعمال قوانين التحليل التوفيقي. الاقتصار على حل مسائل في الاحتمالات الشرطية باستعمال شجرة الاحتمالات.

الرقم:18/09

المؤسســـــة:	**المستــــوى:** 3رياضيات، 3تق رياضي، 3ع تج
السنة الدراسية: 2015 / 2016.	**ميدان التعلم:** الاحتمالات
التاريــــــخ:	**الوحدة:** الاحتمالات الشرطية
توقيت الحصـة:.	**موضوع الحصة:** دستور الاحتمالات الكلية

المكتسبات القبلية:

الكفاءات القاعدية: توظيف دستور الاحتمالات الكلية لحل مسائل في الاحتمالات تتعلق بالسحب من أكثر من وعاء.

مؤشرات الكفـاءة:

الأنشطة المقترحة وطبيعتها	*الإنجاز (سير الحصة)*	توجيهات و تعاليق و أنشطة
نشاط: كيس به 5 قريصات مرقمة من 1 إلى 5، نسحب منه بصفة عشوائية قريصة واحدة ونسجل رقمها. نعتبر الحوادث $A=\{5\}$، $B=\{4\}$، $C=\{1,2,3\}$، $D=\{2,3,4\}$. **أ-** عين اتحاد الحوادث A، B، C، ثم عين تقاطعها مثنى مثنى. **ب-** أحسب احتمال كل من A، B، C. **جـ-** أحسب العددين: $P(D)$، $P_A(D)P(A)+P_B(D)P(B)+P_C(D)P(C)$ ماذا تلاحظ؟	**I/ تمهيد:** **II/ العرض:** **دستور الاحتمالات الكلية:** Ω مجموعة إمكانيات، و P احتمال عليها. **تعريف:** نقول عن الحوادث A_1، A_2، ...، A_n إنها تشكل تجزئة لـ Ω إذا وفقط إذا كان: **1-** كل حادث منها غير مستحيل **2-** غير متلائمة مثنى مثنى **3-** اتحادها جميعا هو Ω. مثال1: نرمي زهرة نرد غير مزيف فيكون: $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$. $A=\{1,2\}$، $B=\{3,4,5,6\}$. A، B تشكلان تجزئة لـ Ω. مثال2: في المثال السابق إذا اعتبرنا كل الحوادث الأولية، فإنها تشكل تجزئة لـ Ω. **مبرهنة:** (دستور الاحتمالات الكلية) Ω مجموعة إمكانيات، و P احتمال عليها. A_1، A_2، ...، A_n تجزئة لها و A حادثة منها. يكون: $\boxed{P(A)=P_{A_1}(A)P(A_1)+P_{A_2}(A)P(A_2)+...+P_{A_n}(A)P(A_n)=\sum_{i=1}^{n}P_{A_i}(A)P(A_i)}$. مثال: في تجربة المثال السابق نعتبر: $A=\{2,3,5\}$، $B=\{4\}$. **1-** جد حادثة C حتى تشكل A، B، C تجزئة لـ Ω. **2-** أحسب احتمال $E=\{3,5,6\}$ بطريقتين. **III/ تطبيق: ت1)** من رقم إلى رقم ص **ت2)** صندوقان يحتوي الأول على كريتين تحملان الرقمين1، 2، والثاني على كريتين تحملان الرقمين3، 4. نسحب بصفة عشوائية كرية من أحدهما ونسجل رقمها، ثم نضعها في الآخر ونسحب منه واحدة بصفة عشوائية ونسجل رقمها. نتحصل بذلك على عدد من رقمين. **1-** أكتب كل الأعداد الممكن تشكيلها في هذه التجربة. **2-** ما هو احتمال تشكل أحد الأعداد 11، 22، 33، 44؟ **3-** نعتبر الآن: A الحادث"نسحب أولا من الإناء الأول". B الحادث"نسحب أولا من الإناء الثاني". بين أن A، B تشكل تجزئة للمجموعة الكلية للإمكانيات، ثم أحسب الاحتمال السابق بطريقة أخرى.(حل:1/ $\Omega=\{11;13;14;22;23;24;31;32;33;41;42;44\}$ 2/ $\frac{4}{12}$ 3/ $A=\{11;13;14;22;23;24\}$، $B=\{31;32;33;41;42;44\}$).	- توسع هذه المسائل إلى وضعيات إدماجية من محيط التلميذ في ميدان الاقتصادي و/أو البيولوجي و/أو الفيزيائي وإلى المواد الدراسية الأخرى.

الرقم:18/10

المؤسســـــة:	المستـــوى: 3رياضيات، 3تق رياضي، 3ع تج
السنة الدراسية:2015 / 2016.	ميدان التعلم: الاحتمالات
التاريــــــخ:	الوحدة: الاحتمالات الشرطية
توقيت الحصـة:.	موضوع الحصة:

المكتسبات القبلية:

الكفاءات القاعدية: نمذجة وضعيات بالاعتماد على التجارب المرجعية للسحب أو الإلقاء.

مؤشرات الكفـاءة:

الأنشطة المقترحة وطبيعتها	*الإنجاز (سير الحصة)*	توجيهات و تعاليق و أنشطة
نشاط: كل الحصة عبارة عن أنشطة	**I/ تمهيد:** **II/ العرض:** **III/ تطبيق:** **ت1)** يحتوي كيس على 10 قريصات مرقمة من 1 إلى 10 نسحب بلا اختيار وفي آن واحد قريصتين. **1)** أحسب احتمال سحب رقمين فرقهما 4. **2)** أحسب احتمال أن يكون مجموع الرقمين المسحوبين 10 علما أن فرقهما 4. (حل مختصر: العدد الكلي للإمكانيات C_{10}^{2}، 1) الحادثة A عدد عناصرها 6، واحتمالها $\frac{6}{45}$، 2) الحادثة B مجموع الرقمين 10 عدد عناصرها 4، وتقاطعها مع الحادثة السابقة هو $\{\{3,7\}\}$ والاحتمال المطلوب هو احتمال B بشرط A و هو $P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$) **ت2)** في لعبة حظ، يحتوي صندوق على 10 كريات بيضاء و6 سوداء، نسحب كرية من الصندوق ونسجل لونها ثم نعيدها إلى الصندوق، جميع الكريات لها نفس احتمال السحب. نفرض أن سحب كرة سوداء يعطي 10 نقط وسحب كرة بيضاء يعطي 5 نقط. نجري خمس سحبات متتابعة. وليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل خمس سحبات متتابعة عدد النقط المحصل عليها. **1)** ما هي القيم التي يأخذها X ؟ **2)** احسب احتمال الحصول على كل قيمة من هذه القيم. ما هي الأرباح الأكثر احتمالا؟ **3)** أحسب الأمل الرياضي لهذا المتغير.	- يتعلق الأمر بمعالجة تجارب تؤول نمذجتها إلى تجارب السحب بأنواعه الثلاثة وإلى إلقاء حجر النرد و القطع النقدية، ثم تمديد هذه النمذجة إلى وضعيات تتدخل فيها المتغيرات العشوائية المتقطعة وشجرة الإمكانيات. - تعتبر المحاكاة وسيلة ضرورية لنمذجة مبنية على التجربة وذلك باستعمال تواتر كل مخرج من مخارجها، في حين تصبح قوانين التحليل التوفيقي أداة رياضياتية قوية لنمذجة نظرية.

الرقم:18/11

المؤسســــة:	**المستـــوى:** 3رياضيات، 3تق رياضي، 3ع تج
السنة الدراسية: 2015 / 2016.	**ميدان التعلم:** الاحتمالات
التاريــــخ:	**الوحدة:** قوانين الاحتمالات المتقطعة
توقيت الحصـة:.	**موضوع الحصة:** التوزيعات المنتظمة

المكتسبات القبلية:

الكفاءات القاعدية: حل مسائل في الاحتمالات تؤول إلى توظيف قانون التوزيعات المنتظمة. التعرف على تجربة لبرلوني.

مؤشرات الكفـاءة:

الأنشطة المقترحة وطبيعتها

نشاط:
صندوق به 5 قصاصات ورق مرقمة من 1 إلى 5 ومطوية، نسحب منه عشوائيا قصاصة ونسجل رقمها.
1- عرف في جدول قانون الاحتمال الناتج. ثم مثله بيانيا.
***** ليكن المتغير X العشوائي الذي يرفق بكل رقم فردي مسحوب العدد 1، وبكل رقم زوجي العدد 0.
2- نفس السؤال السابق مع قانون احتمال المتغير X.

الإنجاز (سير الحصة)

I/ تمهيد:

II/ العرض:

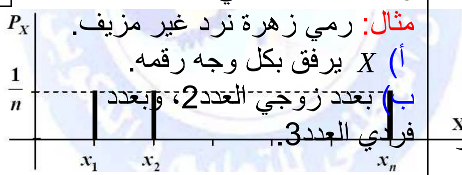
قوانين الاحتمالات المتقطعة:

1- قانون التوزيع المنتظم: X متغير عشوائي قيمه x_1 ، x_2 ، ... ، x_n . و P_X قانون احتمال معرف على هذه القيم. إذا كان: $P_X(x_1) = P_X(x_2) = ... = P_X(x_n) = \frac{1}{n}$. نسمي هذا القانون قانون توزيع منتظم، ونقول إن X يتبع قانون توزيع منتظم.

ملاحظة: القانون السابق يعرف بالجدول التالي:

x_i (قيم X)	x_1	x_2	...	x_n
p_i (قيم p_X)	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	...	$\frac{1}{n}$

ويمثل بيانيا كما يلي:

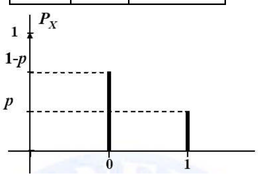


مثال: رمي زهرة نرد غير مزيف.
أ) X يرفق بكل وجه رقمه.
ب) بعدد زوجي العدد 2، وبعدد فردي العدد 3.

2- قانون برلوني: كل تجربة عشوائية لها مخرجان فقط تسمى تجربة برلوني.
فإذا كان p احتمال أحد المخرجين فالاحتمال الآخر هو $1-p$. يسمى العدد p وسيط تجربة برلوني.
في تجربة برلوني نعتبر المتغير العشوائي X الذي يأخذ القيمة 1 في حالة نجاح التجربة (المخرج ذو الاحتمال p)، والقيمة 0 في الحالة الأخرى. والقانون P_X يسمى قانون برلوني ذو الوسيط p .
ويعرف كما في الجدول المقابل:

x_i	1	0
p_i	p	$1-p$

ويمثل كما يلي:



مثال: قطعة نقد مزيفة، احتمال ظهور الوجه A 0.3.
- أحسب احتمال ظهور القفا B .
نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق الوجه بـ1، والقفا بـ0.
- عرف P_X قانون احتمال X ، ثم مثله بيانيا.

III/ تطبيق: ت1) كيس به 3 كريات سوداء وكريتان بيضاوان، نسحب منه بصفة عشوائية كرية واحدة.
- ما هي المخارج الممكنة؟ وما احتمال كل منها؟
X هو المتغير العشوائي الذي يرفق باللون الأبيض العدد 1 واللون الأسود العدد 0.
- ماذا نسمي X ، P_X ؟ وما هو وسيط هذه التجربة؟ - مثل P_X بيانيا.

ت2) X متغير عشوائي بالوسيط p لبرلوني،
أ - أحسب بدلالة p أمله الرياضي وتباينه وانحرافه المعياري. **ب -** ت عددي $p = 0.3$.

ت3) من رقم إلى رقم ص

توجيهات و تعاليق و أنشطة

- نؤكد على أنّ اختيار الأمثلة تنوعها عند التطرق إلى تجربة برنولي، يساعد التلميذ على التمييز بينها وبين تجربة عشوائية كيفية.

المؤسســـــة:	**المستـــوى:** 3رياضيات، 3تق رياضي، 3ع تج
السنة الدراسية: 2015 / 2016.	**ميدان التعلم:** الاحتمالات
التاريــــــخ:	**الوحدة:** قوانين الاحتمالات المتقطعة
توقيت الحصـة:.	**موضوع الحصة:** قانون ثنائي الحدّ لتجربة عشوائية.

المكتسبات القبلية:

الكفاءات القاعدية: إيجاد قانون ثنائي الحدّ لتجربة تتعلق به.

مؤشرات الكفـاءة:

الأنشطة المقترحة وطبيعتها	*الإنجاز (سير الحصة)*	توجيهات و تعاليق و أنشطة
نشاط: نرمي قطعة حيث احتمال ظهور الوجه p . ونكرر التجربة n مرة. في لعبة حظ ظهور الوجه نعتبره نجاحا. و X هو المتغير العشوائي الذي يرفق بكل رمية n عدد مرات النجاح. - ما هي قيم X ؟ - من أجل $n=1$ ثم $n=2$ ثم $n=3$ ، بين باستخدام شجرة الاحتمال أن احتمال النجاح k مرة هو العدد $P_X(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$	**I/ تمهيد:** **II/ العرض:** **تابع لقوانين الاحتمالات المتقطعة** **3- قانون ثنائي الحد لتجربة:** نكرر n مرة تجربة برلوني ذات الوسيط p ، (حيث $n\geq 1$). ونسمي نجاحا عندما تتحقق التجربة (أي تحقق النتيجة التي احتمالها p). وليكن P_X قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X الذي يحصي عدد النجاحات. يعطى عندئذ احتمال النجاح k مرة (حيث $0\leq k\leq n$) بالعلاقة: $P_X(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$. **الأمل الرياضي والتباين والانحراف المعياري:** يعطى الأمل الرياضي والتباين والانحراف المعياري لمتغير عشوائي يتبع القانون الثنائي ذو الوسيط p لتجربة تكرر n مرة، على الترتيب بالعلاقات: $E(X)=np$ ، $V(X)=np(1-p)$ ، $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$. **III/ تطبيق:** **ت1** من رقم إلى رقم ص **ت2)** قطعة نقد متوازنة، نرمز لوجهها بالحرف A ، ولقفاها بـ B . نرميها 5 مرات ونراقب الجهة العلوية عند سقوطها. علما أ، الحرف A يعطي ربح 10 نقط والحرف B لا يعطي أي ربح، و X المتغير العشوائي الذي يحصي عدد مرات الربح. 1) ما هو احتمال ربح 50 نقطة؟ 2) أحسب: $E(X)$ ، $V(X)$ ، $\sigma(X)$.	- نعتمد في تبرير قانون ثنائي الحدّ على نختلف التمثيلات البيانية (مخطط، شجرة الاحتمالات، ...) - يتعلق الأمر هنا بتعيين قانون الاحتمال متغير عشوائي لتجربة برنولي مكررة n مرّة في نفس الشروط ومستقلة عن بعضها.

المؤسســـــة:	**المستـــــوى:** 3رياضيات، 3تق رياضي، 3ع تج
السنة الدراسية: 2015 / 2016.	**ميدان التعلم:** الاحتمالات
التاريـــــــخ:	**الوحدة:** التلاؤم مع قانون احتمال متقطع
توقيت الحصــة:.	**موضوع الحصة:** التلاؤم مع نموذج احتمالي.

المكتسبات القبلية:

الكفاءات القاعدية: استعمال نتائج محاكاة من أجل قياس تلاؤم سلسلة مُشَاهَدَة ونموذج احتمالي.

مؤشرات الكفــاءة:

الأنشطة المقترحة وطبيعتها	الإنجاز (سير الحصة)	توجيهات و تعاليق و أنشطة

الأنشطة المقترحة وطبيعتها

نشاط:

نرمي قطعة نقد تحمل الرقم1 في أحد وجهيها، والرقم 0 في الوجه الآخر.

- إذا كانت القطعة متوازنة، ما احتمال ظهور كل من0، 1؟
- نرمي هذه القطعة 200 مرة فنحصل على النتيجة التالية:

x_i	0	1
k_i	96	104
f_i		

- أكمل التواترات.
- أحسب $\boxed{\sum_{i=1}^{n}(f_i-p_i)^2}$.

الإنجاز (سير الحصة)

I/ تمهيد:

II/ العرض:

التلاؤم مع قانون احتمال متقطع:

1- قياس التلاؤم بين سلسلة إحصائية ونموذج احتمالي:

$(x_i,k_i)_{i\in\{1,2,...,n\}}$ سلسلة إحصائية مقاسها N، تواتراتها $f_i=\frac{k_i}{N}$. وليكن P نموذج احتمالي قابل للتعبير عنها (له n قيمة، وهذه القيم مساوية للتواترات النظرية للتجربة).

لقياس التلاؤم بين P وهذه السلسلة نقارن بين التواترات f_i والاحتمالات P_i.

المؤشر d_{obs}^2 (أو d^2):

تعريف: المقياس d_{obs}^2 لقياس التلاؤم المذكور سابقا معرف كما يلي $d_{obs}^2=\sum_{i=1}^{n}(f_i-p_i)^2$.

ملاحظة: هذا المؤشر يستعمل في حالة كون النموذج الاحتمالي متقطع ومتساوي الاحتمال، ونسمي أحيانا قيمة d_{obs}^2 المحسوبة قيمة التلاؤم.

III/ تطبيق:

ت1) من رقم إلى رقم ص

ت2) في إحدى حصص الرياضيات (الاحتمالات) سأل الأستاذ عن حجر النرد الذي يستعمل في الدرس، إن كان مزورا أم لا؟ فأجاب كل التلاميذ بأنه غير مزور، وذلك من خلال شكله الظاهر.

- أذكر قانون احتمال لنمذجة (للتعبير عن) إجابة التلاميذ.
- ألقى أحد التلاميذ حجر النرد 500 مرة فتحصل على:

الوجه	1	2	3	4	5	6
التكرار	80	90	70	70	100	90

- احسب قيمة التلاؤم d_{obs}^2 بين هذه السلسلة والنموذج المقترح. (تجد $d_{obs}^2=0.002936$).

توجيهات و تعاليق و أنشطة

- تتم في البداية دراسة وضعيات ذات الاحتمالات المتساوية ثمّ تتوسع إلى وضعيات يقوم فيها التلميذ بمحاكاة سلسلة وفق نموذج احتمالي يفترض أنّه قابل لوصف السلسلة المُشَاهَدَة.
- يعرّف معيار قياس التلاؤم والذي نرمز له بالرمز d^2 بأنّه مجموع مربعات الفروق بين التواترات المُشَاهَدَة $(f_i)_{i=1,...,k}$ و الاحتمالات $(p_i)_{i=1,...,k}$ المعطاة في النموذج المفترض أنّه يصف السلسلة المُشَاهَدَة أي:

$$d^2=\sum_{i=1}^{i=k}(f_i-p_i)^2$$

تعديل2009/2008: الاقتصار على حالة تساوي الاحتمالات.

الرقم:18/14

المؤسســـــة:	**المستـــوى:** 3رياضيات، 3تق رياضي، 3ع تج
السنة الدراسية: 2015 / 2016.	**ميدان التعلم:** الاحتمالات
التاريـــــــخ:	**الوحدة:** التلاؤم مع قانون احتمال متقطع
توقيت الحصـة:.	**موضوع الحصة:** عتبة رفض أو قبول نموذج احتمالي.

المكتسبات القبلية:

الكفاءات القاعدية: رفض أو قبول نموذج احتمالي انطلاقا من عتبة مقترحة.

مؤشرات الكفـاءة:

الأنشطة المقترحة وطبيعتها	الإنجاز (سير الحصة)	توجيهات و تعاليق و أنشطة

نشاط: (قمنا بنفس عمل نشاط الحصة السابقة)

نرمي قطعة نقد تحمل الرقم1 في أحد وجهيها، والرقم 0 في الوجه الآخر.

- إذا كانت القطعة متوازنة، ما احتمال ظهور كل من0، 1؟

- لكننا بعد رميها 200 مرة حصلنا على النتيجة التالية:

x_i	0	1
k_i	50	150
f_i		

- أكمل التواترات.

- أحسب $\boxed{\sum_{i=1}^{n}(f_i-p_i)^2}$

- ما تعليقك؟

I/ تمهيد:

II/ العرض: **تابع للتلاؤم مع قانون احتمال متقطع**

2- رفض أو قبول نموذج احتمالي:

عتبة رفض نموذج احتمالي:

يقبل النموذج المقترح إذا كان d^2_{obs} صغيرا بالقدر الكافي. أي إذا كان أصغر من عتبة معطاة أو معينة، ويرفض في الحالة الأخرى.

تحديد **عتبة الرفض:** إن العدد d^2_{obs} يتعلق بقيم السلسلة، إذا من أجل كل سلسلة نحصل على قيمة أخرى له.

عمليا نحاكي التجربة عدة مرات للحصول على عدة عينات بنفس المقاس، فنحصل بذلك على سلسلة من قيم d^2، نعتبر العتبة عندئذ هي العشيري التاسع D_9 للسلسلة الأخيرة.

(سلسلة من قيم d^2)

- فنقبل النموذج الاحتمالي P إذا كان $\boxed{d^2_{obs}\le D_9}$.

- ونرفضه إذا كان $\boxed{d^2_{obs}>D_9}$.

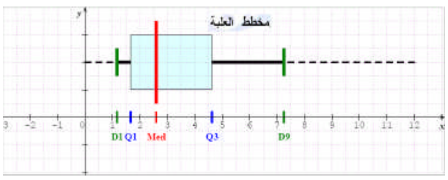
ملاحظة: إن رفض النموذج الاحتمالي وفق القاعدة السابقة يحتمل مجازفة بالخطأ، ذلك أننا قررنا قبوله إذا كانت 90% من قيم d^2 أصغر من أو تساوي العتبة، و10% أكبر منها.

لهذا نقول عند الرفض أننا رفضناه بمجازفة بالخطأ قدرها 10%.

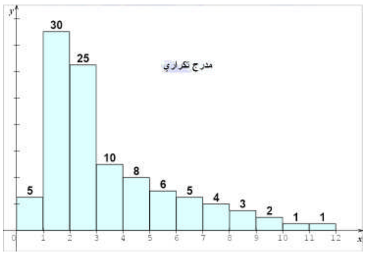
III/ تطبيق: ت1) من رقم   إلى رقم   ص

ت2) في تطبيق الحصة السابقة

- قمنا بمحاكاة العمل السابق1000 مرة فحصلنا على1000 قيمة للعدد d^2، ومثلنا ذلك بما يلي:



(في المخطط بالعلبة القيم مضروبة في1000)



- اقرأ قيمة D_9، واستنتج أن النسبة المئوية لقيم d^2 التي هي أصغر من D_9 أكبر من90%.

- استنتج عندئذ عتبة مناسبة لرفض النموذج P بمجازفة بالخطأ قدرها10%.

- هل إجابة التلاميذ صحيحة؟

- نكتفي بالحالة التي يكون فيها $p_1=p_2=...=p_k=\frac{1}{k}$.

- في حالة رفض نموذج عند اختبار تلاؤمه مع سلسلة مُشَاهَدَة يطلب تقديم "المجازفة بالخطأ"، وهذا حسب عتبة مختارة مسبقا.

المؤسســــة:	**المستـــوى:** 3رياضيات، 3تق رياضي، 3ع تج
السنة الدراسية: 2015 / 2016.	**ميدان التعلم:** الاحتمالات
التاريـــــخ:	**الوحدة:** قوانين الاحتمالات المستمرة
توقيت الحصـة:.	**موضوع الحصة:** الاحتمالات المستمرة

المكتسبات القبلية:

الكفاءات القاعدية: التحقق من أنّ دالة معرّفة على مجال $[\alpha;\beta]$ هي كثافة احتمال.

مؤشرات الكفـاءة:

الأنشطة المقترحة وطبيعتها	الإنجاز (سير الحصة)	توجيهات و تعاليق و أنشطة
نشاط: بالحاسوب نطبق برنامجا يعطينا بصفة عشوائية عددا من المجال $[0,1]$، نضربه في العدد 10 ونسجل الناتج. 1/ ما هي مجموعة الإمكانيات؟ 2/ نعتبر المتغير العشوائي الذي يرفق كل إمكانية x بالعدد x^2. هل يمكن ذكر جميع قيم هذا المتغير؟	(انظر أدناه)	- يمثل قانون التوزيعات المنتظمة على المجال $[0;1]$ والقانون الأسي، حقلا ثريا بالأمثلة التي تتعلق بالاحتمالات المستمرة التي نعمل على استغلالها في اتجاهين، الأوّل هو الحساب التكاملي والثاني هو حل مسائل في الاحتمالات المستمرة. - يوسع قانون التوزيعات المنتظمة على المجال $[0;1]$ إلى المجال $[a;b]$ من خلال أمثلة.

I/ تمهيد:

II/ العرض:

قوانين الاحتمالات المستمرة:

تعريف: إذا قبل متغير عشوائي ما لانهاية من القيم غير قابلة للعد يسمى متغيرا عشوائيا مستمرا.

الدالة كثافة الاحتمال:

إذا حققت الدالة f المعرفة على المجال $[a,b]$ الشروط التالية نسميها دالة كثافة احتمال.

1- f مستمرة وموجبة على $[a,b]$ 2- $\int_a^b f(x)dx = 1$.

ملاحظة: إذا كانت f معرفة على مجال من الشكل $[a,b[$ (أو من الشكل $[a,+\infty[$) فإن الشرط الثاني يصبح $\lim_{x\to b}\int_a^x f(t)dt = 1$ (أو $\lim_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)dt = 1$).

مثال: بين أن الدالة $x \mapsto 2x$ على المجال $[0,1]$ دالة كثافة احتمال.

الدالة كثافة الاحتمال لقانون احتمال:

تعريف: X متغير عشوائي مستمر يأخذ قيمه في المجال I، p_X قانون احتماله و f كثافة احتمال على I.

إذا تحقق من أجل كل مجال $[a,b]$ من I: $p_X([a,b]) = \int_a^b f(x)dx$ نقول إن f كثافة احتمال لقانون الاحتمال p_X.

مثال: نعتبر متغيرا عشوائيا X على المجال $[0,3]$، ولتكن الدالة $f: x \mapsto \frac{1}{3}$.

أ- بين أن f كثافة احتمال على $[0,3]$.

ب- باعتبار p_X معرفا بـ $p_X([b,a]) = \frac{b-a}{3}$، بين أن f كثافة احتمال لـ p_X.

القانون المنتظم على $[0,1]$:

تعريف: في التعريف السابق إذا كان $I = [0,1]$ و $f(x) = 1$ على كل هذا المجال نسمي p_X القانون المنتظم على المجال $[0,1]$.

القانون المنتظم على $[a,b]$:

تعريف: أما إذا كان $I = [a,b]$ و $f(x) = \frac{1}{b-a}$ على كل هذا المجال نسمي p_X القانون المنتظم على المجال $[a,b]$. مثال: في المثال السابق قانون الاحتمال المعرف قانون منتظم على المجال $[0,3]$.

III/ تطبيق:

ت1) من رقم إلى رقم ص

ت2) f دالة معرفة بالعبارة $f(x) = \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4}$. بين أنها كثافة احتمال على المجال $[0,1]$.

ت3) X متغير عشوائي مستمر يتبع قانون احتمال منتظم على $[0,1]$، نضع $y = 6X + 2$. ونقبل أن y أيضا متغير عشوائي مرفق بقانون احتمال p، ودالة كثافته f ثابتة على المجال $[a,b]$ المنتمي إليه y. 1/ عين المجال $[a,b]$. 2/ عين الدالة f، وأحسب احتمال أن يكون y محصورا بين 3 و 4.

المؤسســـة:	المستـــوى: 3رياضيات، 3تق رياضي، 3ع تج
السنة الدراسية:2015 / 2016.	ميدان التعلم: الاحتمالات
التاريـــــخ:	الوحدة: قوانين الاحتمالات المستمرة
توقيت الحصـة:.	موضوع الحصة: الأمل والتباين والانحراف المعياري لمتغير عشوائي مستمر

المكتسبات القبلية:

الكفاءات القاعدية: حساب قانون احتمال متغير عشوائي مستمر يقبل دالة f ككثافة احتمال، وحساب الأمل الرياضياتي والتباين والانحراف المعياري لهذا المتغير العشوائي. **مؤشرات الكفـاءة:**

الأنشطة المقترحة وطبيعتها	الإنجاز (سير الحصة)	توجيهات و تعاليق و أنشطة
نشاط1: نعتبر المتغير المستمر X الذي يتبع قانون احتمال منتظم على المجال $[0,1]$. أحسب كلا من: $\int_a^b xf(x)dx$، $\int_a^b [x-E(X)]^2 f(x)dx$، $\sqrt{\int_a^b [x-E(X)]^2 f(x)dx}$ **نشاط2:** λ عدد حقيقي موجب تماما، و f دالة معرفة بما يلي: $f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$. بين أن f كثافة احتمال على المجال $[0,+\infty[$.	**I/ تمهيد:** **II/ العرض:** **الأمل والتباين والانحراف المعياري لمتغير عشوائي مستمر:** X متغير عشوائي مستمر يتبع قانون احتمال يقبل f دالة كثافة له معرفة على $[a,b]$. **تعريف:** نعرف الأمل الرياضي $E(X)$ والتباين $V(X)$، والانحراف المعياري $\sigma(X)$ للمتغير X على الترتيب بـ: $\boxed{E(X)=\int_a^b xf(x)dx}$ ، $\boxed{V(X)=\int_a^b [x-E(X)]^2 f(x)dx}$ ، $\boxed{S(X)=\sqrt{V(X)}}$ ولتسهيل الحساب نجد أيضا: $\boxed{(1)...V(X)=E(x^2)-[E(x)]^2=\int_a^b x^2 f(x)dx-[E(x)]^2}$. مثال: ما هو الأمل الرياضي والتباين، والانحراف المعياري للمتغير المستمر X الذي يتبع قانون احتمال منتظم على المجال $[0,1]$؟ **القانون الأسي:** **تعريف:** λ عدد حقيقي موجب تماما. قانون الاحتمال الذي يقبل الدالة f حيث: $f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$ كثافة احتمال له على المجال $[0,+\infty[$، يسمى القانون الأسي ذا الوسيط λ. مثال: أحسب الأمل الرياضي والتباين، والانحراف المعياري للمتغير المستمر X الذي يتبع القانون الأسي بالوسيط 2 على المجال $[0,+\infty[$. **III/ تطبيق:** ت1) من رقم إلى رقم ص . ت2) أثبت صحة الخاصية (1) الواردة أعلاه.	

هذه المذكرة خاصة بـ 3ع ت ج

المؤسســـــة:	**المستــــوى:** 3رياضيات، 3تق رياضي، 3ع تج
السنة الدراسية: 2015 / 2016.	**ميدان التعلم:** الاحتمالات
التاريــــــخ:	**الوحدة:** قوانين الاحتمالات المستمرة
توقيت الحصـة:.	**موضوع الحصة:** حل مسائل يستغل فيها المتغير العشوائي المستمر.

المكتسبات القبلية:

الكفاءات القاعدية: نمذجة جميع الوضعيات التي تعالج أمثلة للاحتمالات المستمرة. (توجد في المنهاج بشكل ضمني فقط)

مؤشرات الكفـاءة:

الأنشطة المقترحة وطبيعتها	الإنجاز (سير الحصة)	توجيهات و تعاليق وأنشطة
	I/ تمهيد: **II/ العرض:** **III/ تطبيق: (مسألة)** في الفيزياء النووية، يرفق الانشطار النووي الإشعاعي مقدرا بالسنوات، بتجربة عشوائية ويتبع قانون احتمال أسي وسيطه λ ($\lambda > 0$). 1- أحسب λ . 2- أحسب احتمال أن تنشطر النواة في أقل من 180 سنة. 3- أحسب احتمال أن يحدث الانشطار على الأقل في 180 سنة. 4- أحسب المدة المتوسطة لعمر النواة قبل الانشطار. (إجابات مختصرة: 1- $p([0;100]) = \int_0^{100} \lambda e^{-\lambda t} dt = 0.048$ ومنه $\lambda \approx 0.00049$. 2- $p([0;180]) = \int_0^{180} 0.00049 e^{-0.00049t} dt = 0.084$. 3- $p([180;+\infty[) = 1 - p([0;180]) = 0.916$ ، 4- $E(x) = \frac{1}{\lambda} \approx 2040$).	تعطى نمذجة جميع الوضعيات التي تعالج أمثلة للاحتمالات المستمرة. تعديل2009/2008 : الاقتصار على مسائل يستغل فيها المتغير العشوائي المستمر.

الرقم:18 والأخيرة

المؤسســـة: **السنة الدراسية:**2015 / 2016. **التاريـــــخ:** .... **توقيت الحصـة:**.	**المستـــوى:** 3رياضيات، 3تق رياضي، 3ع تج **ميدان التعلم:** الاحتمالات **الوحدة:** قوانين الاحتمالات المستمرة **موضوع الحصة:** حل مسائل في الاحتمالات

المكتسبات القبلية:

الكفاءات القاعدية: توظيف المتغير العشوائي المستمر.

مؤشرات الكفـاءة:

الأنشطة المقترحة وطبيعتها	الإنجاز (سير الحصة)	توجيهات و تعاليق وأنشطة
كل الحصة عبارة عن نشاط	**I/ تمهيد:** **II/ العرض:** **III/ تطبيق: (مسألة)** في الفيزياء النووية، يرفق الانشطار النووي الإشعاعي مقدرا بالسنوات، بتجربة عشوائية ويتبع قانون احتمال أسي وسيطه λ ($\lambda > 0$). 1- أحسب λ. 2- أحسب احتمال أن تنشطر النواة في أقل من 180 سنة. 3- أحسب احتمال أن يحدث الانشطار على الأقل في 180 سنة. 4- أحسب المدة المتوسطة لعمر النواة قبل الانشطار. (إجابات مختصرة: 1- $p([0;100]) = \int_0^{100} \lambda e^{-\lambda t} dt = 0.048$ ومنه $\lambda \approx 0.00049$. 2- $p([0;180]) = \int_0^{180} 0.00049 e^{-0.00049 t} dt = 0.084$. 3- $p([180;+\infty[) = 1 - p([0;180]) = 0.916$ ، 4- $E(x) = \frac{1}{\lambda} \approx 2040$).	تعديل2009/2008 : الاقتصار على مسائل يستغل فيها المتغير العشوائي المستمر.