# العد - الاحتمالات

## الدرس

### I. العد:

#### 1. مصطلحات:

- $n$ عدد طبيعي غير معدوم. نرمز بالرمز $n!$ للجداء $1\times 2\times\ldots\times n$ و يُقْرَأ " عاملي $n$ "

اصطلاحا نكتب: $0! = 1$

**خاصية:** من أجل كل عدد طبيعي $n$ ؛ $(n+1)! = (n+1)(n!)$

- لتكن $E$ مجموعة منتهية ذات $n$ عنصر ( $n$ عدد طبيعي )

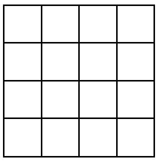
$E$ و نرمز له بالرمز $card(E)$ . نكتب $card(E)= n$

**مثال:** $card(\varnothing) = 0$

#### 2. المبادئ الأساسية للعد:

$$Card(A_1)+card(A_2)+\ldots+card(A_P)=card(E)$$

**مثال:** ما هو عدد المربعات المرسومة في الشكل المقابل ؟



**الحل:** لتكن $E$ مجموعة كل المربعات الممكنة.

نرمز بـــ: $A_1$ ؛ $A_2$ ؛ $A_3$ ؛ $A_4$ لمجموعات المربعات ذات 1 ، 2 ، 3، 4 مربعات صغيرة.

هذه الأجزاء تشكل تجزئة للمجموعة $E$.

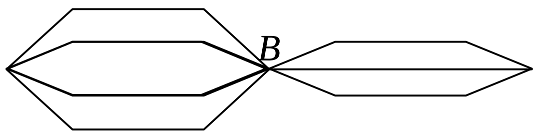
حسب مبدأ الجمع نجد: $card(E)= card(A_1)+ card(A_2)+card(A_3)+card(A_4)=16+9+4+1=30$

**نتائج:** $A$ و $B$ جزءان من المجموعة المنتهية $E$

1. $Card(A\cup B)= card(A)+ card(B)- card(A\cap B)$
2. إذا كانت $A\cap B=\varnothing$ فإن $Card(A\cup B)= card(A)+ card(B)$
3. إذا كانت $\bar{A}$ متممة $A$ في $E$ فإن: $Card(A)+ card(\bar{A})= card(E)$

الإمكانيات هو: $n_1\times n_2\times\ldots\times n_p$

**مثال:**




- ما هو عدد الطرق المختلفة المؤدية من $A$ إلى $C$؟
- ما هو عدد الطرق المختلفة " ذهاب - رجوع " $A$-$C$-$A$ ؟

**الحل:**

الذهاب فقط $A-C$ : $4\times 3=12$

ذهاب + رجوع $A-C-A$ : $4\times 3\times 2\times 3=72$

نتيجة: $E_1$ ؛ $E_2$ ؛ .... ؛ $E_p$ مجموعات منتهية.

$Card(E_1\times E_2\times E_3\times\ldots\times E_p)= card(E_1)\times card(E_2)\times\ldots\times card(E_p)$.

## 3. قوائم عناصر مجموعة منتهية:

### فهوم القوائم:

لتكن $E$ مجموعة منتهية و غير خالية ذات $n$ عنصر ( $n$ عدد طبيعي غير معدوم ) و $p$ عدد طبيعي غير معدوم.

**تعريف:** نسمي قائمة ذات $p$ عنصر من $E$ ، كل متتالية مرتبة من $p$ عنصراً من عناصر $E$.

إذا أردنا أن تكون هذه العناصر المرتبة متمايزة مثنى مثنى عندئذ لا يمكن للقائمة أن تحتوي أكثر من $n$ عنصر، و هذا يقتضي أن يكون: $1\le p\le n$

**مبرهنة:**

- من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $p$ ، عدد القوائم ذات $p$ عنصر من $E$ هو $n^p$
- من أجل كل عدد طبيعي $p$ حيث: $1\le p\le n$ ، عدد القوائم ذات $p$ عنصر من $E$ متمايزة مثنى مثنى هو: $n(n-1)(n-2)\ldots\times(n-p+1)$

**البرهان:**

- في الحالة الأولى، نحصل على $(e_1;e_2;\ldots;e_p)$ من $E^p=\underbrace{E\times E\times\ldots\times E}_{p\text{ مرة}}$

وبالتالي عدد القوائم ذات $p$ عنصر من $E$ هو $card(E^p)=n^p$ أي توجد $n$ حالة ممكنة لكل من $p$ عنصر من $E$.

- في الحالة الثانية، ( حالة التمايز)، هناك $n$ حالة ممكنة لاختيار العنصر الأول و $n-1$ حالة ممكنة لاختيار العنصر الثاني وهكذا... و أخيراً $n-(p-1)=n-p+1$ حالة ممكنة لاختيار العنصر ذو الرتبة $p$ وبالتالي عدد القوائم ذات $p$ عنصر من $E$ متمايزة مثنى مثنى هو $n(n-1)(n-2)\ldots\times2\times1$ .

**مثال 01 :** نريد تشكيل عدد طبيعي مكون من ثلاثة أرقام مأخوذة من المجموعة: $\{9;6;5;3;1;0\}$.

أ) كم عددًا يمكن تشكيله ؟ ب) كم عددًا فرديا يمكن تشكيله ؟ جـ) كم عددًا زوجيا يمكن تشكيله ؟

د) كم مضاعفا للعدد 5 يمكن تشكيله ؟ هـ) كم عددًا يشمل على الرقم " 1 " يمكن تشكيله ؟

**الحل:**

| رقم المئات | رقم العشرات | رقم الآحاد |
|---|---|---|
| | | |

**أ) كم عددًا يمكن تشكيله ؟**

نختار رقم للآحاد هناك 6 حالات ممكنة وكذلك بالنسبة لرقم العشرات، بينما هناك 5 حالات لاختيار رقم المئات (لأن 0 لا يمكن أن يكون في اليسار). و بالتالي عدد الأعداد ذات ثلاثة أرقام مأخوذة من المجموعة: $\{0;1;3;5;6;9\}$ هو: $6\times6\times5=180$

**ب) كم عددًا فرديا يمكن تشكيله ؟** نختار رقم للآحاد الذي يكون من الأرقام الفردية أي $5;3;1$ أو 9 هناك 4 حالات ممكنة و6 حالات بالنسبة لرقم العشرات، بينما هناك 5 حالات لاختيار رقم المئات (لأن 0 لا يمكن أن يكون في اليسار). و بالتالي عدد الأعداد الفردية ذات ثلاثة أرقام مأخوذة من المجموعة: $\{0;1;3;5;6;9\}$ هو: $4\times6\times5=120$.

**جـــ) كم عددًا زوجيا يمكن تشكيله ؟** نختار رقم للآحاد الذي يكون من الأرقام الزوجية أي $0$ أو $6$ هناك حالتان ممكنة و$6$ حالات بالنسبة لرقم العشرات، بينما هناك $5$ حالات لاختيار رقم المئات (لأن $0$ لا يمكن أن يكون في اليسار). و بالتالي عدد الأعداد الزوجية ذات ثلاثة أرقام مأخوذة من المجموعة: $\{0;1;3;5;6;9\}$ هو: $2\times6\times5=60$.

**ملاحظة:** يمكن تعيين هذا العدد كما يلي: $Card(P= card(E) )- card(\bar{P})=180-120=60$

**د) كم مضاعفا للعدد 5 يمكن تشكيله ؟**

نختار رقم للآحاد الذي يكون من الأرقام الزوجية أي $0$ أو $5$ هناك حالتان ممكنة و$6$ حالات بالنسبة لرقم العشرات، بينما هناك $5$ حالات لاختيار رقم المئات (لأن $0$ لا يمكن أن يكون في اليسار). و بالتالي عدد الأعداد الزوجية ذات ثلاثة أرقام مأخوذة من المجموعة: $\{0;1;3;5;6;9\}$ هو: $2\times6\times5=60$.

**هـــ) كم عددًا يشمل على الرقم " 1 " يمكن تشكيله ؟** نعين عدد الأعداد التي لا تشمل الرقم $1$ أي نختار رقم للآحاد هناك $5$ حالات ممكنة و كذلك بالنسبة لرقم العشرات، بينما هناك $4$ حالات لاختيار رقم المئات (لأن $0$ لا يمكن أن يكون في اليسار). و بالتالي عدد الأعداد ذات ثلاثة أرقام مأخوذة من المجموعة: $\{0;1;3;5;6;9\}$ و التي لا تشمل الرقم $1$ هو: $5\times5\times4=120$.

و بالتالي عدد الأعداد ذات ثلاثة أرقام مأخوذة من المجموعة: $\{0;1;3;5;6;9\}$ و التي تشمل الرقم $1$ هو: $180 -120 = 60$.

**مثال 02** : نريد تشكيل عدد طبيعي مكون من ثلاثة أرقام متمايزة مأخوذة من المجموعة: $\{0;1;3;5;6;9\}$.

أ) كم عددًا يمكن تشكيله ؟ ب) كم عددًا فرديا يمكن تشكيله ؟ جـــ) كم عددًا زوجيا يمكن تشكيله ؟

د) كم مضاعفا للعدد 5 يمكن تشكيله ؟ هـــ) كم عددًا يشمل على الرقم " 1 " يمكن تشكيله ؟

**الحل:**

| رقم الآحاد | رقم العشرات | رقم المئات |
|---|---|---|
| | | |

**أ) كم عددًا يمكن تشكيله ؟** نختار أولا رقم المئات هناك $5$ حالات ممكنة (لأن $0$ لا يمكن أن يكون في اليسار) ثم نختار رقم العشرات من بين الخمسة أرقام الباقية فهناك $5$ حالات ممكنة، يبقى $4$ أرقام نختار من بينهم رقم الآحاد. و بالتالي عدد الأعداد ذات ثلاثة أرقام متمايزة مأخوذة من المجموعة: $\{0;1;3;5;6;9\}$ هو: $5\times5\times4=100$.

**ب) كم عددًا فرديا يمكن تشكيله ؟** نختار أولا رقم الآحاد من بين الأرقام الفردية أي $5;3;1$ أو $9$ هناك $4$ حالات ممكنة ثم نختار رقم المئات من بين الأرقام المتبقية ما عدا $0$ (لأن $0$ لا يمكن أن يكون في اليسار) هناك $4$ حالات ممكنة ثم نختار رقم العشرات من بين الأربعة أرقام الباقية فهناك $4$ حالات ممكنة. و بالتالي عدد الأعداد الفردية ذات ثلاثة أرقام متمايزة مأخوذة من المجموعة: $\{0;1;3;5;6;9\}$ هو: $4\times4\times4=64$

**جـــ) كم عددًا زوجيا يمكن تشكيله ؟** $Card(P= card(E) )- card(\bar{P})=100- 64=36$

**د) كم مضاعفا للعدد 5 يمكن تشكيله ؟** نعين عدد الأعداد التي هي ليست مضاعفا للعدد $5$ أي نختار أولا رقم الآحاد من بين الأرقام $1؛3؛6$ أو $9$ هناك $4$ حالات ممكنة ثم نختار رقم المئات من بين الأرقام المتبقية ما عدا $0$ (لأن $0$ لا يمكن أن يكون في اليسار) هناك $4$ حالات ممكنة ثم نختار رقم العشرات من بين الأربعة أرقام الباقية فهناك $4$ حالات ممكنة.

و بالتالي عدد الأعداد التي هي ليست مضاعفا للعدد $5$ ذات ثلاثة أرقام متمايزة مأخوذة من المجموعة: $\{0;1;3;5;6;9\}$ هو: $4\times4\times4=64$.

و بالتالي عدد الأعداد مضاعفات $5$ ذات ثلاثة أرقام مأخوذة من المجموعة: $\{0;1;3;5;6;9\}$ هو: $100 - 64 = 36$.

**هــ) كم عددًا يشمل على الرقم " 1 " يمكن تشكيله ؟** نعين عدد الأعداد التي لا تشمل الرقم *1* أي نختار أولا رقم المئات هناك *4* حالات ممكنة (لأن *0* لا يمكن أن يكون في اليسار) ثم نختار رقم العشرات من بين الأربعة أرقام الباقية فهناك *4* حالات ممكنة، يبقى *3* أرقام نختار من بينهم رقم الآحاد. و بالتالي عدد الأعداد ذات ثلاثة أرقام متمايزة مأخوذة من المجموعة: $\{0;1;3;5;6;9\}$ و التي لا تشمل الرقم *1* هو: $4\times4\times3= 48$. و بالتالي عدد الأعداد ذات ثلاثة أرقام متمايزة مأخوذة من المجموعة: $\{0;1;3;5;6;9\}$ و التي تشمل الرقم *1* هو: $100 - 48 = 52$.

## 4. الترتيبات:

لتكن $E$ مجموعة منتهية و غير خالية ذات $n$ عنصر ( $n$ عدد طبيعي غير معدوم ) و $p$ عدد طبيعي حيث: $1 \le p \le n$

**تعاريف:**

نسمي ترتيبة $p$ عنصر من $E$ ، كل قائمة ذات $p$ عنصراً متمايزة مثنى مثنى من $E$.

نرمز لعدد هذه الترتيبات بالرمز: $A_n^p$ حيث: $A_n^p = n(n-1)(n-2)\ldots\times(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$

نسمي تبديلة ذات $n$ عنصر من $E$ ، كل ترتيبة $n$ عنصر من $E$.

نرمز لعدد هذه الترتيبات بالرمز: $A_n^n = n!$ .

## 5. التوفيقات:

لتكن $E$ مجموعة منتهية و غير خالية ذات $n$ عنصر ( $n$ عدد طبيعي) و $p$ عدد طبيعي حيث: $0 \le p \le n$

**تعريف:** نسمي توفيقة $p$ عنصر من $E$ ، كل جزء من $E$ يشمل على $p$ عنصر .

نرمز لعدد هذه التوفيقات بالرمز: $C_n^p$ أو $\binom{n}{p}$ و يُقْرَأ " $p$ من بين $n$ "

**مبرهنة:**

من أجل كل عددين طبيعيين $n$ و $p$ حيث: $1 \le p \le n$ ، $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

➢ **البرهان:** نعلم أنه توجد مجموعة وحيدة من المجموعة $E$ عدد عناصرها 0 و هي المجموعة الخالية أي $\varnothing$ و بالتالي: $C_n^0 = 1$. نفرض الآن $p> 0$ و لنختار $F$ جزء من $E$ له $p$ عنصر من $E$. عدد التبديلات الممكنة للمجموعة $F$ هو $p!$ و كل تبديلة للمجموعة $F$ هي ترتيبة $p$ عنصر من $E$.

نعيد نفس الشيء مع كل أجزاء $E$ ذات $p$ عنصر فنحصل على:

**عدد ترتيبات $p$ عنصر من $E$** = **(عدد أجزاء $E$ ذات $p$ عنصر من $E$)** $\times\, p!$ أي: $A_n^p = p! \times C_n^p$ و منه

$$C_n^p = \frac{A_p^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

**مثال:** $C_{32}^5 = \frac{32!}{5!27!} = 201376$

**ملاحظة:** بالآلة الحاسبة العلمية يمكن حساب $C_n^p$ .

o بالنسبة للآلة الحاسبة البسيطة: n | nCr | p | =

n MATH ((PRB)(nCr) 3 ENTRER p ENTRER

o بالنسبة لـ TI:

n OPTN F ( F (PROB) F (nCr p EX

بالنسبة

o

:CASIO

## خواص:

**مبرهنة:**

o

ن أجل كل عددين طبيعيين $n$ و $p$ حيث: $0 \leq p \leq n$ ، $C_n^p = C_n^{n-p}$

**البرهان:**

- $C_n^{n-p} = \dfrac{n!}{(n-p)!(n-(n-p))!} = \dfrac{n!}{(n-p)!n!} = C_n^p$
- $C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1} = \dfrac{(n-1)!}{p!(n-p+1)!} + \dfrac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!} = \dfrac{(n-1)![(n-p)+p]}{p!(n-p)!} = \dfrac{n(n-1)!}{p!(n-p)!} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!} = C_n^p$

**مثلث باسكال:** الجدول التالي يسمح بحساب $C_n^p$ بمعرفة العددين $C_{n-1}^p$ و $C_{n-1}^{p-1}$ .

| n | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | | | | | | |
| 1 | 1 | 1 | | | | | |
| 2 | 1 | 2 | 1 | | | | |
| 3 | 1 | 3 | 3 | 1 | | | |
| 4 | 1 | 4 | 6 | 4 | 1 | | |
| 5 | 1 | 5 | 10 | 10 | 5 | 1 | |
| | | | | | | | |

| | | |
|---|---|---|
| ( | + | ( |
| | | = |
| | | |

## دستور ثنائي الحد:

**مبرهنة:** من أجل كل عددين مركبين $a$ و $b$ و من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n$ ؛

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \cdots + C_n^n b^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^{n-p} b^p$$

$$(a-b)^n = C_n^0 a^n - C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 - \cdots + (-1)^n C_n^n b^n = \sum_{p=0}^{n} (-1)^n C_n^p a^{n-p} b^p$$

**البرهان:** نستعمل البرهان بالتراجع

- المساواة

صحيحة من أجل $n=1$ لأن $(a+b)^1 = a+b = C_1^0 a + C_1^1 b$

- نفرض

أنها صحيحة من أجل $n \geq 1$ ولنحسب $(a+b)^{n+1}$

لدينا: $(a+b)^{n+1} = (a+b)^n (a+b) = (a+b)^n a + (a+b)^n b$

بما أنه من أجل كل عددين طبيعيين $n$ و $p$ حيث: $1 \leq p \leq n-1$ ؛ $C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$

و $C_n^n = C_{n+1}^{n+1} = 1$ و $C_n^0 = C_{n+1}^0 = 1$ فإن:

$$(a+b)^{n+1} = C_{n+1}^0 a^{n+1} + C_{n+1}^1 a^n b + C_{n+1}^2 a^{n-1} b^2 + \ldots + C_{n+1}^n a b^n + C_{n+1}^{n+1} b^{n+1}$$

و بالتالي إذا كانت المساواة صحيحة من أجل $n$ فهي صحيحة من أجل $n+1$.

إذن المساواة صحيحة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n$ .

مثال: $n$ عدد طبيعي، باستعمال دستور ثنائي الحد، أنشر $(1+1)^n$ و استنتج قيمة $2^n$

الحل:

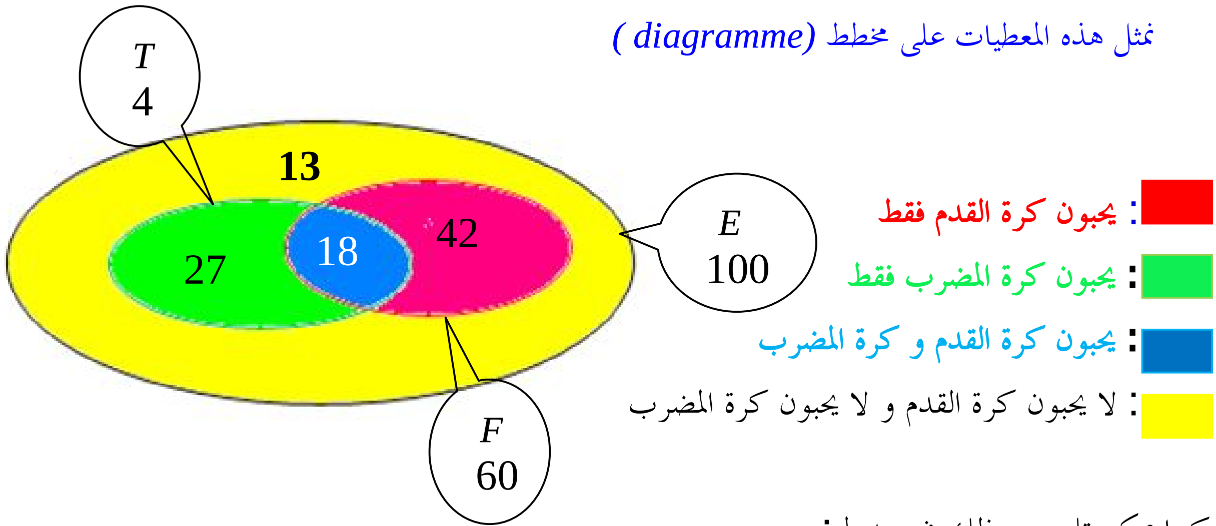
$$2^n = (1+1)^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n = \sum_{p=0}^{p=n} C_n^p$$

## 6. استعمال الجداول- الشجرة – المخططات:

مثال01: يستقبل مركز ترقية 100 طفل. رياضتان مقترحتان: **كرة القدم كرة المضرب.**

- عن السؤال: هل تحب كرة القدم ؟ 60 طفل **رفعوا الأيدي.**
- عن السؤال: هل تحب كرة المضرب ؟ 45 طفل **رفعوا الأيدي.**
- عن السؤال: هل تحب كرة القدم و كرة المضرب؟ 18 طفل **رفعوا الأيدي.**

نمثل هذه المعطيات على مخطط *(diagramme)*



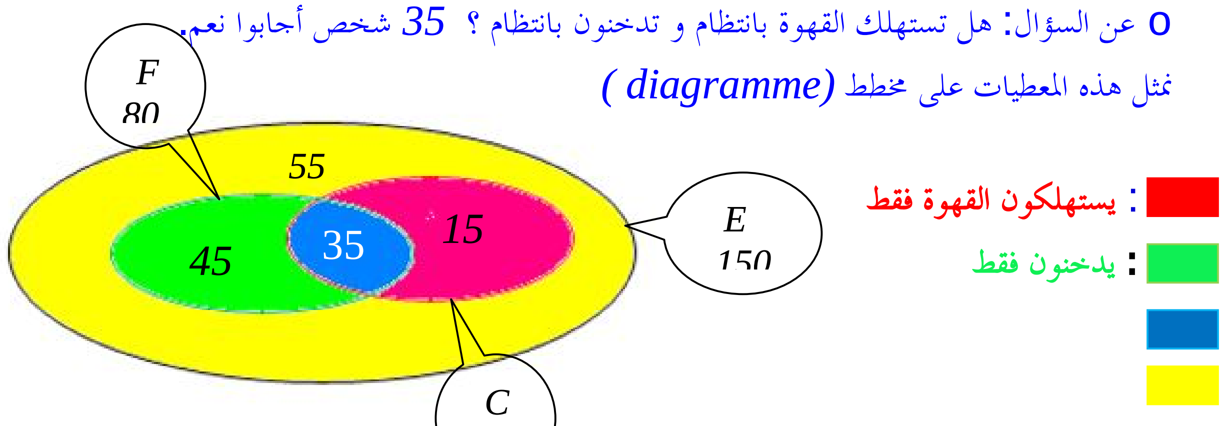

كما يمكن تلخيص ذلك في جدول:

| $F$ | $T$ | $F \cap T$ | | $T \cap \bar{F}$ | $\bar{F} \cap \bar{T}$ | $E$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 60 | 45 | 18 | 42 | 27 | 13 | 100 |

مثال02: سبر أراء يشمل 100 شخص، أعطى النتائج التالية:

- عن السؤال: هل تستهلك القهوة بانتظام؟ 50 شخص أجابوا بنعم.
- عن السؤال: هل تدخنون بانتظام ؟ 80 شخص أجابوا نعم.
- عن السؤال: هل تستهلك القهوة بانتظام و تدخنون بانتظام ؟ 35 شخص أجابوا نعم.

نمثل هذه المعطيات على مخطط *(diagramme)*



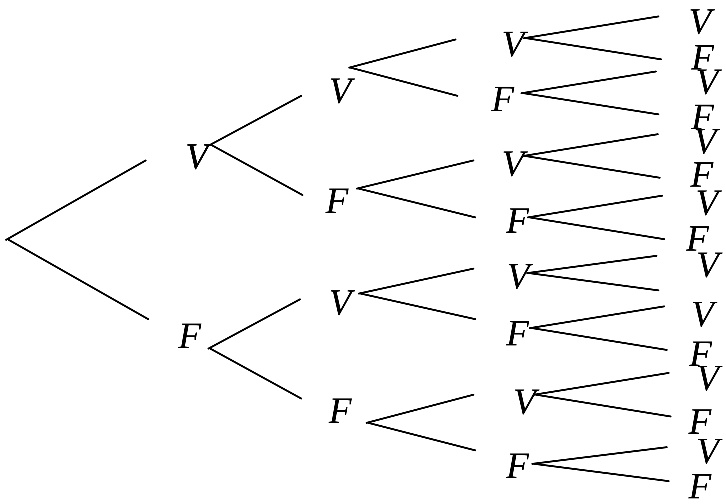
: يستهلكون القهوة و يدخنون

**: لا يستهلكون القهوة و لا يدخنون**

كما يمكن تلخيص ذلك في جدول:

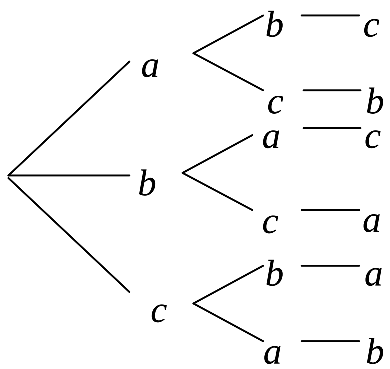
| $C$ | $F$ | $F \cap C$ | $F \cap \bar{C}$ | $C \cap \bar{F}$ | | $E$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 50 | 80 | 35 | 45 | 15 | 55 | 150 |

مثال03: في امتحان يطرح على كل مترشح مجموعة من أربعة أسئلة و التي يجب عليها بصحيح أو خطأ. المترشح يجيب على الأسئلة عشوائيا. باستعمال مخطط على شكل شجرة، عين كل الأجوبة الممكنة.



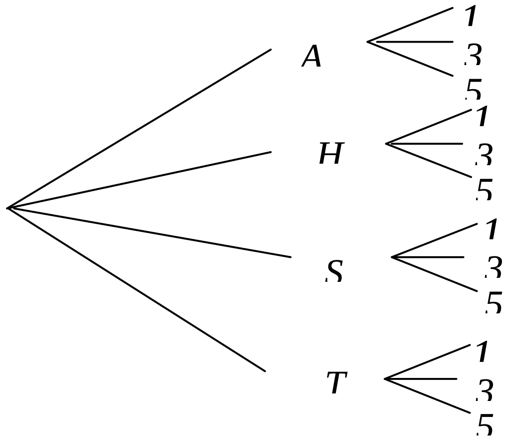

ج1 ج2 ج3 ج4

مثال04: يمكن كتابة كل التبديلات باستعمال شجرة. $E = \{a\,;b\,;c\}$




مثال05: تشفير خرطوشة حبر مركبة من حرف من $\{A; H\,; S\,; T\}$ و رقم من $\{1\,; 3\,; 5\}$ .

أكتب كل التشافير الممكنة ؟ باستعمال شجرة.




## II. الاحتمالات:

مثال تمهيدي: يحتوي كيس على ثلاث كرات: واحدة بيضاء، واحدة حمراء و واحدة خضراء. نسحب عشوائيا كرة من الكيس ونكتب لونها.

- مجموعة النتائج الممكنة هي المجموعة $\Omega$ حيث: $\Omega=\{B;R;V\}$
- سحب كرة حمراء يمثل $\{R\}$
- سحب كرة ليست بيضاء يمثل $\{R;V\}$
- سحب كرة صفراء يمثل $\varnothing$
- سحب كرة ليست سوداء يمثل $\Omega$

### 1. مصطلحات:

- يمكن الحصول على عدة نتائج؛ هذه العملية التي نتائجها غير معروفة مسبقاً تسمى: تجربة عشوائية، أي كل عملية مبنية على الحظ و نتائجها ليست معروفة مسبقاً.
- $\Omega$ تسمى مجموعة الإمكانيات.
- كل عنصر من $\Omega$ يسمى **إمكانية** و كل جزء من $\Omega$ يسمى حادثة.
- $\Omega$ تسمى كذلك الحادثة الأكيدة و $\varnothing$ تسمى الحادثة المستحيلة.
- كل حادثة تشمل على عنصر واحد تسمى الحادثة الأولية.
- إتحاد الحادثتان $A$ و $B$ هي الحادثة $A\cup B$ ، تسمى كذلك الحادثة " $A$ أو $B$ "
- تقاطع الحادثتان $A$ و $B$ هي الحادثة $A\cap B$ ، تسمى كذلك الحادثة " $A$ و $B$ "
- عندما تكون الحادثة $A\cap B=\varnothing$ ، نقول أن لحادثتان $A$ و $B$ غير متلائمتين.
- نسمي **حادثة عكسية** للحادثة $A$؛ المجموعة المتممة للحادثة $A$ في $\Omega$. نرمز لها بالرمز: $\overline{A}$ .

## 2. قانون الاحتمال:

**أ. تعريف:** $\Omega=\{e_1;e_2;\dots;e_n\}$ مجموعة منتهية من الإمكانيات.

نسمي قانون احتمال $p$ لتجربة عشوائية، كل دالة ترفق بكل حادثة من $\omega$ عدد حقيقي من المجال [ ; 1]، تحقق: $p(e_1)+p(e_2)+\dots+p(e_n)=1$

**ملاحظة:**

- $A$ حادثة من $\Omega$ حيث: $A=\{a_1;\ a_2;\ \dots\ ;\ a_k\}$. $\quad p(A)=p(a_1)+p(a_2)+\dots+p(a_k)$
- $p(\Omega)=1$ و $p(\varnothing)=0$

**ب.** نمذجة

**تجربة عشوائية:**

- لما تشمل تجربة عشوائية عدد منته من المخارج، نعرف على المجموعة $\Omega=\{e_1;e_2;\dots;e_n\}$ ، قانون احتمال و ذلك بإعطاء أعداد متتالية $(p_1;p_2;\dots;p_n)$ تحقق: من أجل كل $i$ ؛ $(0\le i\le n)$ ؛ $p_i\geq 0$ و $p_1+p_2+\dots+p_n=1$
- عند القيام بتحقيق تجربة عشوائية، نقوم باختيار: مجموعة الإمكانيات $\Omega$ و قانون احتمال $p$ معرف على $\Omega$. نمذجة تجربة عشوائية هو اختيار الثنائية $(\Omega\ ;\ p)$ التي تسمى فضاء احتمالي منته.

**ملاحظة:** هناك مبرهنة مهمة في الرياضيات، تسمى قانون الأعداد الكبيرة – *loi -faible des grands nombres* -

يمكن أن نعبر عنها كما يلي: في العالم الأكاديمي المعرف بقانون احتمال $p$ على مجموعة منتهية، تواتر عناصر هذه المجموعات في متتالية لـــ $n$ تجربة متماثلة و مستقلة تؤول غلى احتمالات لما $n$ يتزايد بكثرة.

**ج. حالة خاصة:**

عندما يكون لكل الحوادث الأولية نفس الاحتمال، نقول أن قانون الاحتمال متساوي التوزيع ( أو تساوي الاحتمالات)

$\Omega=\{e_1;e_2;\dots;e_n\}$ مجموعة منتهية من الإمكانيات و $p$ احتمال معرف على $\Omega$. $A$ حادثة

$$p(e_1)=p(e_2)=\dots=p(e_n)=\frac{1}{n} \quad \text{و} \quad p(A)=\frac{\text{عدد عناصر } A}{\text{عدد عناصر } \Omega}=\frac{card(A)}{card(\Omega)}$$

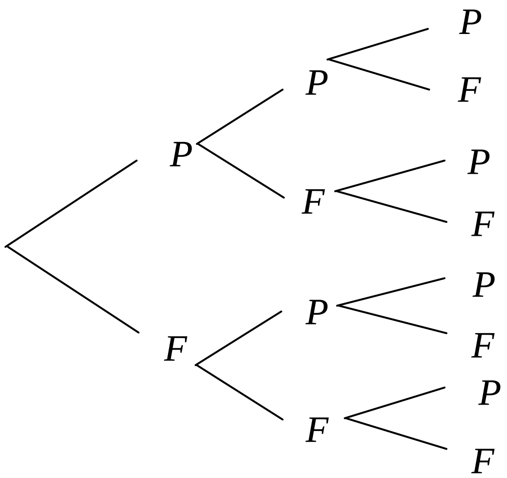
**د. خواص:**

- $A$ حادثة. $0\le p(A)\le 11$
- $A$ و $B$ حادثتان غير متلائمتان ( أي $A\cap B=\varnothing$ ) $\quad p(A\cup B)=p(A)+p(B)$
- $A$ و $B$ حادثتان كيفيتان $\quad p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)$
- $p(\Omega)=1$ و $p(\varnothing)=0$
- $\overline{A}$ الحادثة المعاكسة للحادثة $A$. $\quad p(\overline{A})+p(A)=1$

## 3. المتغير العشوائي:

**مثال تمهيدي:**

نرمي ثلاث مرات متتابعات قطعة نقدية متجانسة. نربح 20 DA كلما كانت النتيجة " ظهر " و نخسر 10 DA كلما كانت النتيجة " وجه ". ليكن $X$ الربح الجبري المحصل عليه بعد ثلاث رميات( ربح أو خسارة).



| $X$ |
|---|
| 60 |
| 30 |
| 30 |
| 0 |
| 30 |
| 0 |
| 0 |
| -30 |

مجموعة الإمكانيات هي: $\Omega=\{PPP ; PPF; PFP; FPP; PFF;FPF; FFP; FFF\}$

القيم الممكنة هي: $X(\Omega)=\{-30 ; 0 ; 30 ; 60\}$

نحصل على دالة ترفق بكل مخرج عدد حقيقي. $X$ تسمى المتغير العشوائي المعرف على $\Omega$

**تعريف** نسمي متغير عشوائي، كل دالة عددية معرفة على $\Omega$ .

**ملاحظات:**

$\{X > k\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) > k\}$ و $\{X = k\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = k\}$

**مثال:**

$\{X = 30\} = \{PPF ; PFP ; FPP\}$

## قانون الاحتمال:

**تعريف:**

ليكن $p$ احتمال معرف على $\Omega$ و $X$ متغير عشوائي معرف على $\Omega$ حيث $X(\Omega)$ مجموعة منتهية أصلها $n$

عندما نرفق بكل قيمة $x_i$ $(1 \leq i \leq n)$ من $X$، احتمالات الحوادث $"X=x_i"$ ، نقول أنه نعرف قانون احتمال $P_X$ للمتغير العشوائي $X$.

**ملاحظة:** عمليا، نمثل قانون الاحتمال على شكل جدول.

**مثال:**

| $x_i$ | -30 | 0 | 30 | 60 | المجموع |
|---|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | | 1 |

## الأمل الرياضي، التباين و الانحراف المعياري:

**تعاريف**: ليكن $p$ احتمال معرف على $\Omega$ و $X$ متغير عشوائي معرف على $\Omega$ حيث $X(\Omega)$ مجموعة منتهية أصلها $n$. $X(\Omega) = \{x_1; x_2; \dots; x_n\}$

**الأمل الرياضي** للمتغير الع‍شوائي $X$ هو العدد الحقيقي، الذي نرمز له بالرمز $E(X)$ ، و المعرف بـــ:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_nx_n$$

**التباين** للمتغير العشوائي $X$ هو العدد الحقيقي، الذي نرمز له بالرمز $V(X)$ ، و المعرف بـــ:

$$V(X) = E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right) = \sum_{i=1}^{n} p_i(x_i - E(X))^2$$

**الانحراف المعياري** للمتغير العشوائي $X$ هو العدد الحقيقي، الذي نرمز له بالرمز $\sigma(X)$ ، و المعرف بـــ:

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

## خواص الأمل الرياضي:

**مبرهنة**: لتكن $X$ و $Y$ معرفتان على نفس مجموعة الإمكانيات $\Omega$ التي أصلها $n$ و $p$ احتمال معرف على $\Omega$.

$$(X+Y)=E(X)+E(Y)$$

**مبرهنة**: دستور $Koenig\text{-}Huyghens$: الطريقة العملية لحساب التباين:

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

**ملاحظة**: لحساب التباين ، من الأحسن إتباع هذه الطريقة.

- **البرهان**:

$$V(X) = E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right) = E(X^2 - 2XE(X) + E(X)^2$$
$$= E(X^2) - 2E(X)E(X) + E(X)$$
$$= E(X^2) - [E(X)]$$

**مثال**: لنرجع إلى المثال الخاص برمي قطعة نقدية ثلاثة مرات.

| $x_i$ | -30 | 0 | 30 | 60 | المجموع |
|---|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | 1 |
| $x_i\, p_i$ | $-\frac{30}{8}$ | 0 | $\frac{90}{8}$ | $\frac{60}{8}$ | $\frac{120}{8}$ |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_i^{\,2}\,p_i$ | $\frac{900}{8}$ | $0$ | $\frac{2700}{8}$ | $\frac{3600}{8}$ | $\frac{7200}{8}$ |

**الأمل الرياضي:** $E(X)=\frac{120}{8}=15\,D.$

$E(X^2)=\frac{7200}{8}=900$

**التباين:** $V(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=900-(15)^2=675$

**الانحراف المعياري:** $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{675}\approx 25{,}98$

## خواص التباين و الانحراف المعياري:

**مبرهنة:** لتكن $X$ متغير عشوائي معرف على $\Omega$ . ليكن $a$ و $b$ عددان حقيقيان.

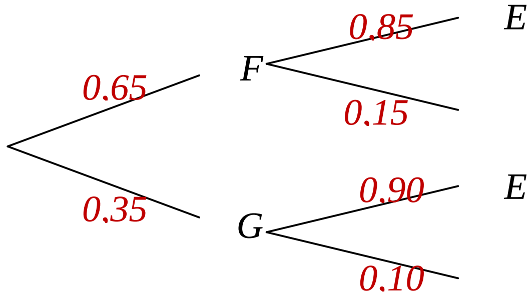
$$V(aX)=a^2\,V(X) \quad \text{و} \quad \sigma(aX)=|a|\sigma(X)$$

## الاحتمالات الشرطية:

### 1. أمثلة ـ الشجرة المثقلة ـ تعاريف:

**مثال:** في ثانوية، $65\ \%$ من التلاميذ بنات $(F)$. من بين البنات $85\ \%$ هن خارجيات $(E)$؛ من بين الذكور $G$، هذه النسبة هي $90\ \%$ نسأل عشوائيا تلميذ من الثانوية وهتم بمعيارين: **الجنس** (ذكور أو إناث) و **الصفة** (خارجي أو لا ). هذه الوضعية يمكن تمثيلها بواسطة الشكل التالي و يسمى: الشجرة المثقلة.

- رسم الفروع:
  - في البداية، هناك إمكانيتان: $F$ أو $G$ ، الممثلان بفرعين.
  - من العقدة $F$، توجد حالتين: $E$ أو $\bar{E}$ ،حسب صفة البنت خارجية أو لا.
  - نفس الشيء بالنسبة للعقدة $G$.




- الكتابة على الفروع:
  - على الفرع $F$ — ، نضع $p(F)$. ( في هذا المثال $p(F)=0,65$ ).
  - على الفرع $E$ — $F$ ، نضع احتمال أن تكون البنت المختارة خارجية، هذا الاحتمال يساوي $0,85$ ، نرمز لها بالرمز $p_F(E)$ ؛ و يُقْرَأ: احتمال $E$ علما أن $F$ محققة.

نعلم أن من بين البنات هناك $15\ \%$ ليست خارجيات أي $p_F(\bar{E})=0{,}15$ ( لأن $p_F(E)+p_F(\bar{E})=1$ ).

  - نكمل الشجرة بنفس الطريقة انطلاقا من العقدة $G$.

- تمثيل حادثة على الشجرة:

المسار " $\overset{0,65}{\longrightarrow} F \overset{0,85}{\longrightarrow} E$ " le chemin " يمثل الحادثة: " التلميذ المختار هو من بنت خارجية ".

هذه الحادثة هي $F \cap E$ . لنحسب احتمالها.

نرمز بـــ $N$ لتكرار الثانوية ( عدد تلاميذ الثانوية )، عدد البنات هو $0,65N$ و عدد عناصر البنات الخارجيات

هو $0,85 \times 0,65\ N$ . بما أننا في حالة تساوي الاحتمالات ،فإن:

$$p(F \cap E) = \frac{0{,}65 \times 0{,}85 \times N}{N} = 0{,}65 \times 0{,}85 = p(F) \times p_F(E)$$

و بالتالي $p(F \cap E)$ هو جداء الاحتماليْن المكتوبين على $\_F\_E$ ومنه $p_F(E) = \frac{p(F \cap E)}{p(F)}$ .

بصفة عامة نضع التعريف التالي:

**تعريف:** $A$ و $B$ حادثتان من نفس تجربة عشوائية مع $p(A) \neq 0$ .

احتمال الحادثة $B$ علما أن $A$ محققة، هو العدد الحقيقي الذي نرمز له بالرمز $p_A(B)$ و المعرف بـــ:

$$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

❖ **قواعد استعمال شجرة:**

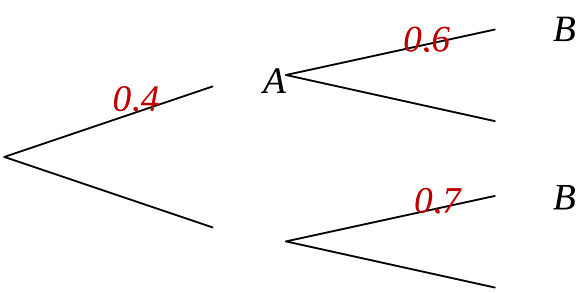
- فرع يبدأ من البداية حتى نهاية طرف الشجرة، يمثل تقاطعات كل الحوادث الموجودة في مساره " son chemin "
- **القاعدة 01: قانون العقدة: مجموع الاحتمالات المكتوبة في على الفروع المرسومة من نفس العقدة يساوي 1**
- **القاعدة 02: احتمال الحادثة الممثلة بطرق تساوي جداء الاحتمالات المكتوبة في فروع هذا المسار.**

❖ **فهم الشجرة المثقلة:**

- كل عقدة من الشجرة تمثل مرحلة من التجربة. يجب معرفة احتمالات كل المراحل الموالية الممكنة.
- على المسار: $\_A\_B\_C$ مثلا ، نكتب الاحتمالات $p(A)$ ، $p_A(B)$ ، $p_{A\cap B}(C)$ ،

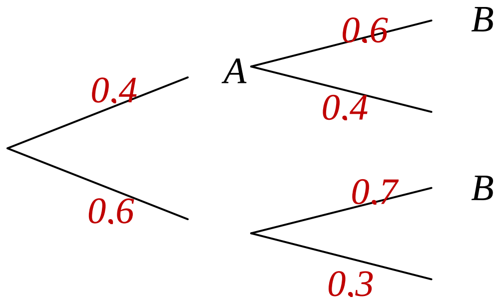
هذا المسار يمثل الحادثة $A \cap B \cap C$.

**مثال:** إليك الشجرة التالية:




1. عين الاحتمالات الناقصة.
2. أحسب $p(A \cap B)$ ، $p(A \cap \bar{B})$ ، $p(\bar{A} \cap B)$ ، $p(\bar{A} \cap \bar{B})$ .

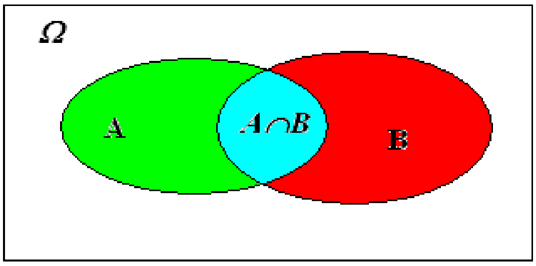
**الحل:** تعيين الاحتمالات الناقصة و حساب الاحتمالات المطلوبة:




| $p$ |
|---|
| $p(A\cap B)= 0,24$ |
| $p(A\cap\bar{B})=0,16$ |
| $p(\bar{A}\cap B) = 0,42$ |
| $p(\bar{A}\cap\bar{B})=0,18$ |

### 2. تفسير $p_A(B)$:

عندما تتحقق الحادثة $A$، المسلك الوحيد الذي سيحقق $B$ هو " $A$ و $B$ ". بما أن $A$ محققة، تصبح $A$ مجموعة الإمكانيات بالنسبة للحادثة $A\cap B$ و بالتالي نحصل على $p_A(B)$ بالمقارنة بالاحتمال الغير الشَّرْطِي للحادثة $A\cap B$ مع الاحتمال الغير الشَّرْطِي للحادثة $A$ : $p_A(B)=\frac{p(A\cap B)}{p(A)}$




### 3. فائدة $p_A(B)$:

غالبا ما يكون الاحتمال $p(A\cap B)$ صعب ومعرفة $p_A(B)$ أو $p_B(A)$ تسمح لنا بحسابه.

$p(A\cap B)= p(A)\times p_A(B)$ و $p(A\cap B)= p(B)\times p_B(A)$ .

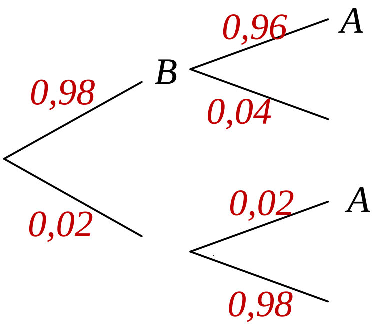
مثال: في ورشة عمل، $2\ \%$ من القطع المصنوعة معيبة - *défectueuses* - ، لقد قررنا المراقبة التالية:

- إذا كانت القطعة جيدة، فإن احتمال قبولها هو $0,96$ .
- إذا كانت القطعة معيبة، فإن احتمال رفضها هو $0,98$.

نختار عشوائيا قطعة و نفرض أن كل الاختيارات متساوية الاحتمال. نرمز بـــ $E$ للحادثة :" القطعة المختارة جيدة و مرفوضة " ما هو احتمال الحادثة $E$ ؟

الحل: نرمز بـــ $B$ للحادثة: " القطعة جيدة " و $B$ للحادثة "القطعة مقبولة"

$$p(B\cap\bar{A})=p(B)\times p_B(\bar{A})=0,98\times 0,04=0,0392$$

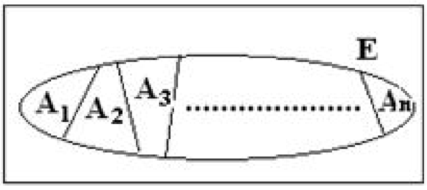



| p |
|---|
| $p(B\cap A)= 0,9408$ |
| $P(B\cap \bar{A})=0,0392$ |
| |
| $p(\bar{B}\cap \bar{A})=0,0196$ |

## IV. الاحتمالات الكلية:

**1. اتحاد حوادث غير متلائمة:** إذا كانت الحادثة $E$ إتحاد الحوادث $A_1$ ، $A_2$ ، ..... ، $A_n$ غير متلائمة مثنى مثنى،

فإن : $p(E)=p(A_1)+p(A_2)+\ldots+p(A_n)$




**2. دستور الاحتمالات الكلية:**

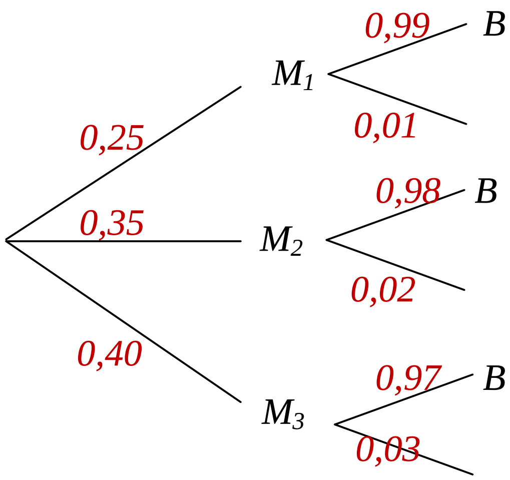
**أ- مثال:**

ثلاث ماكينات $M_1$، $M_2$، $M_3$ تحقق $25\ \%$ ، $35\ \%$ ، $40\ \%$ من إنتاج مؤسسة.

نقدر بـــ $1\ \%$، $2\ \%$ ، $3\ \%$ على التوالي للقطع المنتجة من هذه الماكينات هي معطبة. نختار عشوائيا قطعة من الإنتاج علما أن كل الاختيارات متساوية الاحتمال. الهدف هو حساب الحادثة $B$ :« القطعة جيدة».

نرمز بـــ $M_1$، $M_2$، $M_3$ الحادثة:« القطعة منتجة من الماكينة $M_i$ » مع $i=1$، $i=2$ ، $i=3$ على التوالي.

لنوضح ذلك بشجرة مثقلة.




| p |
|---|
| 0,2475 |
| 0,0025 |
| 0,3430 |
| 0,0700 |
| 0,3880 |
| 0,0120 |

ثلاثة فروع تؤدي إلى الحادثة $B$ : $B$ ــ $M_1$ ــ ، $B$ ــ $M_2$ ــ ، $B$ ــ $M_3$ ــ و التي تمثل الحوادث:

$M_1\cap B$ ، $M_{21}\cap B$ ، $M_3\cap B$ وبالتالي $B$ هي اتحاد الحوادث $M_1\cap B$ و $M_{21}\cap B$ و $M_3\cap B$

حوادث غير متلائمة مثنى مثنى، و منه: $p(B)=p(M_1\cap B)+p(M_2\cap B)+p(M_3\cap B)$ .

و بما أن : $p(M_i \cap B) = p(M_i)\times p_{M_i}(B$ فإن

$p(B)= \ p(M_1)p_{M_1}(B+ \ p(M_2)p_{M_2}(B+ \ p(M_3)p_{M_3}(B=0,2475+0,343+0,388=0,9785$

**ب- الحالة العامة:**

ليكن $\Omega$ مجموعة إمكانيات تجربة عشوائية، إتحاد الحوادث $A_1$ ، $A_2$ ، ..... ، $A_n$ ، غير متلائمة مثنى مثنى.

$p(B)=p(A_1\cap B)+p(A_2\cap B)+\ldots+p(A_n\cap B) = \ p(A_1)p_{A_1}(B+ \ p(A_2)p_{A_2}(B+\ldots+ \ p(A_3)p_{A_n}(B$

**ج- نتيجة:استعمال شجرة مثقلة:** هذا القانون يُتَرْجَم، على شجرة مثقلة، بالقاعدة التالية:

**القاعدة 03: احتمال الحادثة $E$ هو مجموع احتمالات المسارات المؤدية للحادثة $E$.**

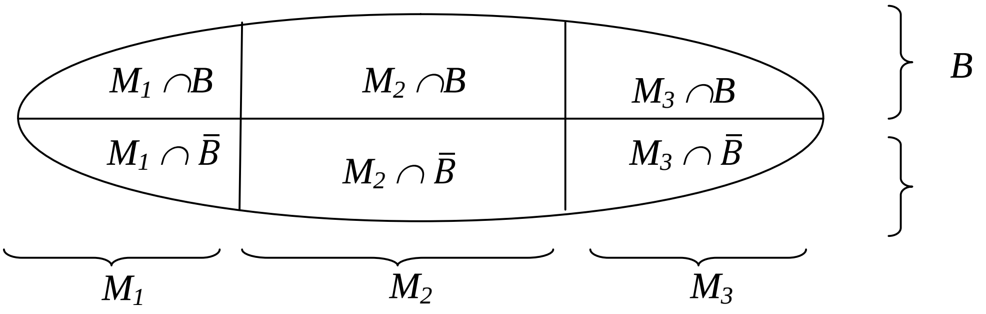
**ملاحظات: فهم الدرس**

**توضيح الاحتمالات الكلية:**

في المثال السابق ،الحادثة $B$ يمكن تمثيلها على الشكل التالي:. $B \cup \bar{B} = \Omega$

الحوادث $M_1\cap B$ و $M_{21}\cap B$ و $M_3\cap B$ غير متلائمة مثنى (قطعة مصنوعة بماكينة لا يمكن أن تُصنع بماكينة أخرى) و إتحادها هي $B$. ( نقول أن هذه الحوادث تشكل تجزئة للحادثة $B$)

و بالتالي: $p(B)=p(M_1\cap B)+p(M_2\cap B)+p(M_3\cap B)$.




**اختيار الطريق الصحيح:**

ليس من الضروري دائما إنشاء شجرة مثقلة، غالبا ما نعرف المسار المؤدي إلى الحادثة التي نبحث عنها.

فمثلا في المثال السابق، الحادثة $B$ هي إتحاد الحوادث الممثلة بالمسارات $B$ — $M_1$ — ، $B$— $M_2$ — ، $B$— $M_3$ —

و بالتالي يمكن حساب احتمالها مباشرة باستعمال القاعدة $03$.

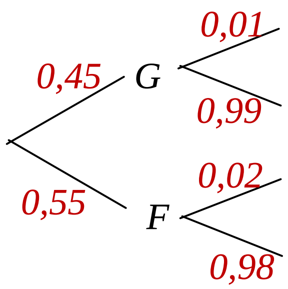
**مثال01:** في مدينة ما، احتمال ولادة طفل هي $0,45$. نعلم أن $2\ \%$ من البنات و $1\ \%$ من الأولاد لديهم مرض $A$ عند الولادة. نختار عشوائيا مولود جديد.

1. ما احتمال أن يكون المولود الجديد من الذين يعانون من المرض ؟
2. ما احتمال أن يكون المولود الجديد المريض ، بنت ؟

**الحل:** نعتبر الحوادث $G$ " ولادة طفل " ، $F$ " ولادة بنت" و $M$ " المولود الجديد لديه المرض $A$ ".

من المعطيات، الاختيارات متساوية الاحتمالات.

**إنشاء الشجرة:**




| $p$ |
| --- |
| 0,0450 |
| 0,4455 |
| 0,0110 |
| 0,5390 |

1 احتمال أن يكون المولود الجديد من الذين يعانون من المرض: $p(M)=0{,}045+0{,}011=0{,}056$

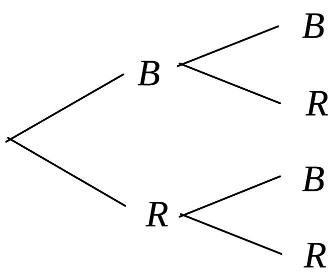
2 احتمال أن يكون المولود الجديد المريض ، بنت : $p_M(F)=\frac{p(F\cap M)}{p(M)}=\frac{0{,}011}{0{,}056}\cong 0{,}196$

**مثال02:** يحتوي كيس على ثلاث كرات حمراء و خمس كرات بيضاء غير معروفة عند اللمس. نقوم بسحبتين متتابعتين بدون إرجاع عشوائيا. ما احتمال الحصول على كرة بيضاء في السحب الثاني ؟

**الحل:** نعتبر الحادثتين $N$ " الكرة المسحوبة سوداء " ، $B$ "الكرة المسحوبة بيضاء".

من المعطيات، السحبات متساوية الاحتمالات.

**إنشاء الشجرة:**




| $p$ |
| --- |
| |
| |
| |
| |

احتمال الحصول على كرة بيضاء في السحب الثاني: $p(B_2)=\frac{24}{56}+\frac{15}{56}=\frac{3}{5}$

## V. الاستقلالية:

### 1. استقلالية حادثتين:

$A$ و $B$ حادثتان من نفس التجربة العشوائية حيث $p(A)\neq 0$ و $p(B)\neq 0$.

في بعض الحالات ،معرفة أن الحادثة $A$ تتحقق بدون تغيير في احتمال الحصول على الحادثة $B$ ، وهذا معناه أن $P_A(B)=p(B)$ . نقول أن الحادثة $B$ مستقلة عن الحادثة $A$.

لدينا: $p(A\cap B)=p_A(\ )\times p(A)=p(B)\times p(A$

بما أن هذه المساواة لا تتغير إذا استبدلنا $A$ بـــ $B$ و $B$ بـــ $A$ ويستنتج من ذلك أن $A$ مستقلة عن $B$.

**تعريف:** القول أن حادثتين $A$ و $B$ من نفس التجربة العشوائية حيث $p(A)\neq 0$ و $p(B)\neq 0$ مستقلتان معناه أن: $p(A\cap B)=p(B)\times p(A)$

### 2. استقلالية متغيرين عشوائيين:

**تعريف:**

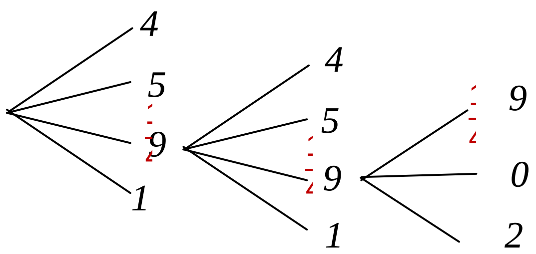
$X$ و $Y$ متغيران عشوائيان معرفان على $\Omega$ تأخذ على التوالي القيم $x_i$ $(1 \le i \le n)$ و $y_j$ $(1 \le j \le q)$

القول أن $X$ و $Y$ مستقلتان معناه أنه، من أجل كل $i$ و كل $j$، الحادثتان " $X=x_i$ " و " $Y=y_j$ "مستقلتان.

**تجارب مستقلة:** في بعض الأحيان، تجربة عشوائية تؤدي إلى إجراء عدة تجارب جزئية. غالبا لا تعتمد تجربة جزئية على كل التجارب التي سبقتها. نقول حينئذ أن هذه التجارب مستقلة.

❖ **مثال تمهيدي:** تحتوي ثلاث صناديق $U_1$ ، $U_2$ ، $U_3$ على التوالي على أرقام الأعداد 1954 ، 1962 ، 2009 . نسحب رقم من $U_1$ ثم رقم $U_2$ ثم رقم $U_3$ . نريد حساب احتمال الحادثة : " الحصول على 999".

**الحل:**




احتمال الحادثة : " الحصول على 999" هو: $\frac{1}{6} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4}$

❖ **الحالة العامة:**

$E$ تجربة عشوائية مكونة من $n$ تجربة جزئية $E_1$ ، $E_2$، ....، $E_n$.

مخرج من $E$ هو كل متتالية مرتبة $(e_1 ; e_2 ; \dots ; e_n)$ نتائج من $E_i$.

نرمز بـ $p_1 ; p_2 ; \dots ; p_n$ لقوانين الاحتمالات على $E_i$.

نتقبل أن: $p(e_1 ; e_2 ; \dots ; e_n) = p_1(e_1) \times ; p_2(e_2) \times \dots \times p_n(e_n)$

**مثال:** نتوفر على ثلاث قطع نقدية $A$ ، $B$ ، $C$. القطعة $A$ متجانسة و القطعتان $B$ و $C$ مزورتان.

بالنسبة للقطعة $B$ احتمال الحصول على " الظهر" هو ربع احتمال الحصول على " الوجه" و بالنسبة للقطعة $C$ احتمال الحصول على " الظهر" هو ثلاث مرات احتمال الحصول على " الوجه".

ما احتمال الحصول على مرة واحدة فقط على " وجه"

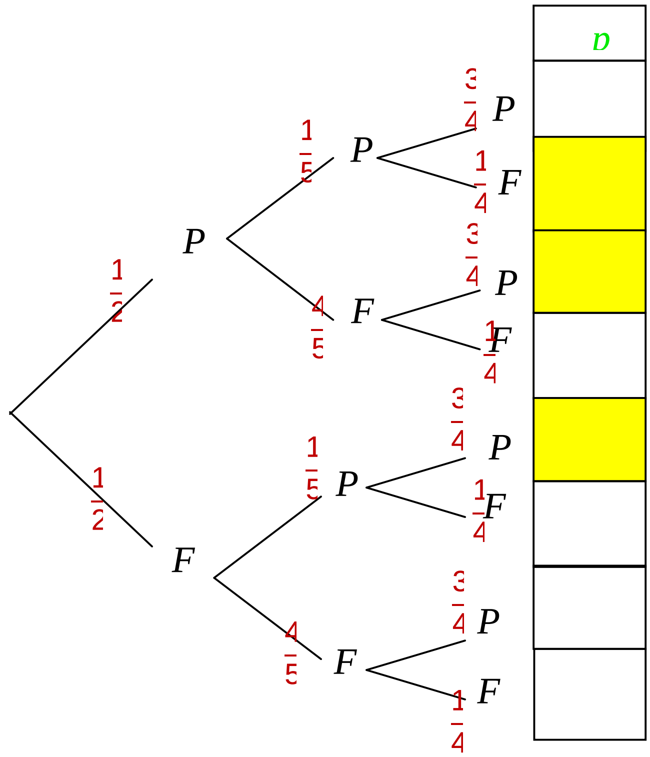
**الحل:**

بالنسبة للقطعة $A$: $p(F) = p(P) =$

بالنسبة للقطعة $B$: $p(F) =$ و $p(P) =$

بالنسبة للقطعة $C$: $p(F) =$ و $p(P) =$

**إنشاء الشجرة:**



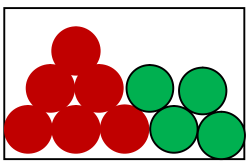

نرمز بـــ $A$ للحادثة: " الحصول على مرة واحدة فقط على " وجه"

$$p(A)=\frac{1}{40}+\frac{12}{40}+\frac{3}{40}=\frac{16}{40}=$$

## أعمال موجهة:

### $TD1$: إنشاء و استعمال شجرة مثقلة:

✓ **نماذج مرجعية:** يحتوي صندوق على عشر كرات غير معروفة عند اللمس: ستة حمراء و أربعة خضراء

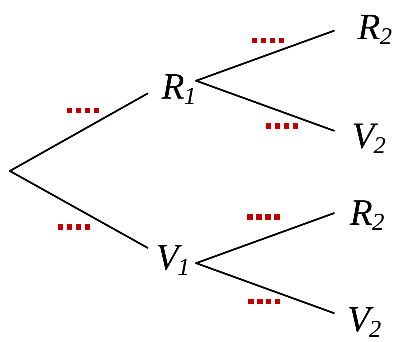


**1 سحب بالإعادة:**

نسحب بالتتابع كرتان مع إعادة الكرة قبل سحب الموالية. نكتب لون الكرة المسحوبة. نعيد إذن التجربة مرتين.

من المعطيات، السحبات متساوية الاحتمال.

أ- أتمم الشجرة المرفقة بالتجربة.




نرمز للحوادث بـــ:

$V1$:" الحصول على كرة خضراء في السحب الأول" ؛ $R1$:" الحصول على كرة حمراء في السحب الأول"

$V2$:" الحصول على كرة خضراء في السحب الثاني" ؛ $R2$:" الحصول على كرة حمراء في السحب الثاني"

ب-استنتج احتمالات الحوادث التالية:

$A$:" الحصول على كرتين من نفس اللون"

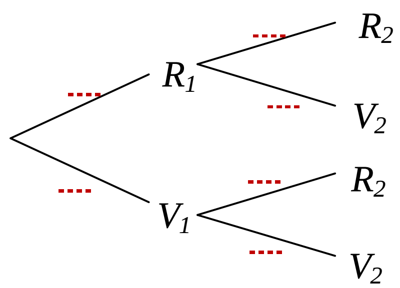
$B$:" الحصول على كرتين مختلفتين في اللون"

## 2 سحب بدون إعادة:

نسحب بالتتابع كرتان بدون إعادة الكرة قبل سحب الموالية. نكتب لون الكرة المسحوبة.

السحب الثاني إذن مشروط بنتائج السحب الأول. من المعطيات، السحبات متساوية الاحتمال.

أ- أتمم الشجرة المرفقة بالتجربة.




نرمز للحوادث بـــ:

$V_1$:" الحصول على كرة خضراء في السحب الأول" ؛ $R_1$:" الحصول على كرة حمراء في السحب الأول"

$V_2$:" الحصول على كرة خضراء في السحب الثاني" ؛ $R_2$:" الحصول على كرة حمراء في السحب الثاني"

ب-استنتج احتمالات الحوادث التالية:

$A$:" الحصول على كرتين من نفس اللون"

$B$:" الحصول على كرتين مختلفتين في اللون"

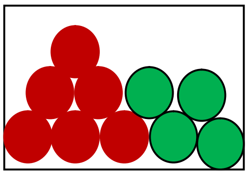
**الحل:**

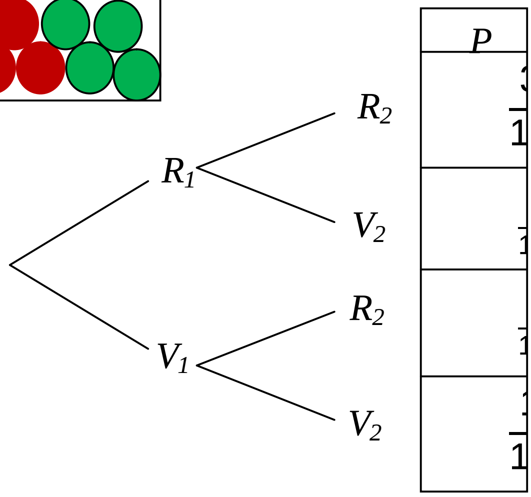
### نماذج مرجعية:

يحتوي صندوق على عشر كرات غير معروفة عند اللمس: ستة حمراء و أربعة خضراء

1 **سحب بالإعادة:** نسحب بالتتابع كرتان مع إعادة الكرة قبل سحب الموالية.

أ- **إتمام الشجرة المرفقة بالتجربة:**






ب- **استنتاج احتمالات الحوادث التالية:**

$A$: "الحصول على كرتين من نفس اللون"

$$p(A)=\frac{36}{100}+\frac{16}{100}=\frac{52}{100}=0{,}5$$

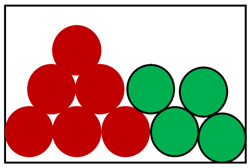
$B$: "الحصول على كرتين مختلفتين في اللون"

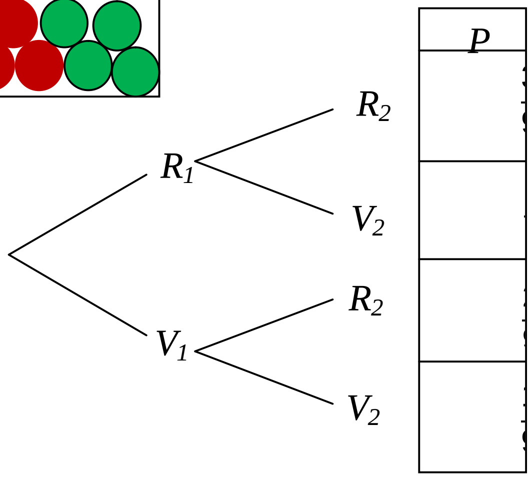
$$p(B)=\frac{24}{100}+\frac{24}{100}=\frac{48}{100}=0{,}4$$

ملاحظة: $B=\overline{A}$

2 **سحب بدون إعادة:** نسحب بالتتابع كرتان بدون إعادة الكرة قبل سحب الموالية.

أ- **إتمام الشجرة المرفقة بالتجربة:**





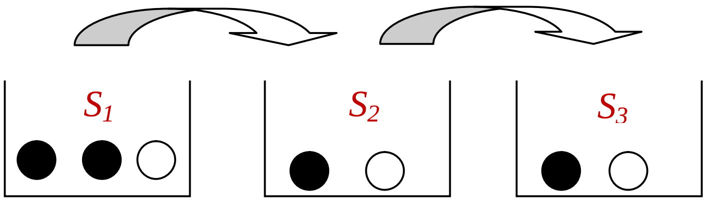

**ب- استنتاج احتمالات الحوادث التالية:**

$A$: "الحصول على كرتين من نفس اللون" $\quad p(A)=\frac{30}{90}+\frac{12}{90}=\frac{42}{90}\cong 0,4$

$B$: "الحصول على كرتين مختلفتين في اللون" $\quad p(B)=\frac{24}{90}+\frac{24}{90}=\frac{48}{90}\cong 0,5$

ملاحظة: $B=\overline{A}$

**تتابع التجارب:**




لدينا $n$ كيس قريصات $S_1$، $S_2$، ..... $S_n$ .

$S_1$ يحتوي على قريصتان سوداوان و واحدة بيضاء و كل كيس من الباقي يحتوي على قريصة سوداء و قريصة بيضاء.

نقترح دراسة تطور السُحبات المتتالية لقريصة حسب البروتوكول التالي:

- نسحب قريصة من $S_1$:
- نضعها في $S_2$ ثم نسحب قريصة من $S_2$ :
- نضعها في $S_3$ و هكذا....

من أجل كل عدد طبيعي $k$ حيث: $1\leq k\leq n$ ، نرمز بـــ $E_k$ الحادثة " القريصة المسحوبة من $S_k$ بيضاء" و $\overline{E}$ حادثته المعاكسة. احتمال الحادثة $E_k$ هو $p_k$ .

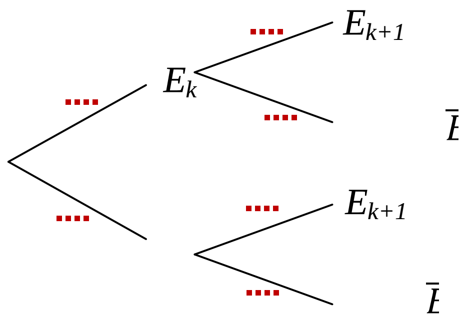
**1 بدء العملية:**

أ- مثل بشجرة السحب في $S_1$ ، ثم في $S_2$.

ب- أذكر $p_1$ ثم أحسب $p_2$ .

**2 علاقة بين $p_k$ و $p_{k+1}$:**

أ- أتمم الشجرة المقابلة و التي تمثل السحبات في الكيسين $S_k$ و $S_{k+1}$ ، $(1\leq k\leq n)$ .




**مساعدة:** عين أولا $p_{E_k}(E_{k+1}$ و $p_{\overline{E_k}}(E_{k+1}$ .

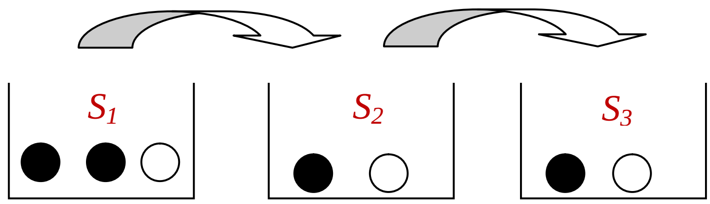
ب- استنتج أن: $p_{k+1}=\frac{1}{3}p_k+$ .

3 دراسة متتالية $(p_n)$:

أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n$ ، $p_n=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)$ .

ب- استنتج النهاية لـ $p_n$ لما $n$ يؤول إلى $+\infty$. ما هو التفسير العملي لهذه النتيجة ؟

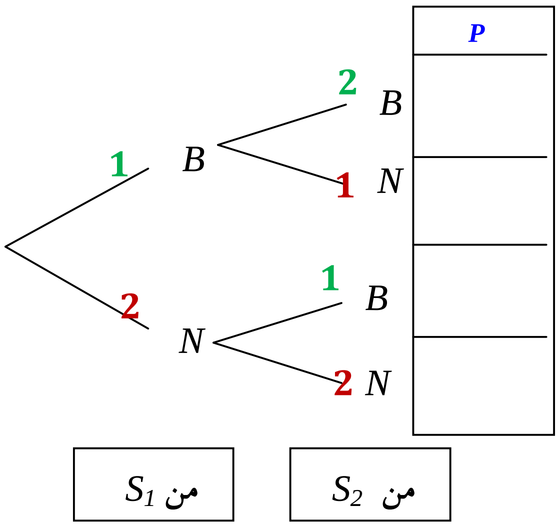
**الحل:**




**تتابع التجارب:** لدينا $n$ كيس قريصات $S_1$، $S_2$، ..... ، $S_n$ .

1 بدء العملية:

أ- تمثيل بشجرة السحب في $S_1$ ، ثم في $S_2$:

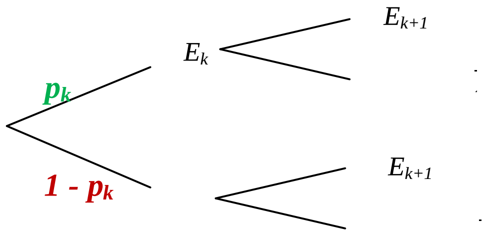



ب- أذكر $p_1$ ثم أحسب $p_2$ :

$p_1 =$ ؛ $p_2=\frac{2}{9}+\frac{2}{9}=$

**2** علاقة بين $p_k$ و $p_{k+1}$:

أ- إتمام الشجرة المقابلة




| من $S_{k+1}$ | من $S_k$ |
|---|---|

ب- استنتاج أن: $p_{k+1} = \frac{1}{3}\, p_k +$ :

لدينا: $p_{E_k}(E_{k+1}) =$ و $p_{\overline{E_k}}(E_{k+1}) =$

$P_{k+1} = p_k \times p_{E_k}(E_{k+1} + (1\text{-}p_k)\ \ p_{\overline{E_k}}(E_{k+1} = \frac{2}{3}p_k + \frac{1}{3}(1-p_k) = \frac{1}{3}p_k +$

ومنه $p_{k+1} = \frac{1}{3}p_k +$

**3** دراسة متتالية $(p_n)$:

أ- نبرهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n$ ، $p_n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right.$ .

- نتحقق من صحتها من أجل $n=1$
- لدينا: ; $p_1 =$ و $\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right) =$ ( صحيحة )
- نفرض أنها صحيحة من أجل $n$ و لنبرهن أنها صحيحة من أجل $n+1$ أي لنبرهن أن $_{n+1} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right.$

لنحسب $p_{n+1}$:

$$p_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)\right] + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)+1\right] = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\times\frac{1}{3^n}\right) = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^{n+1}}\right)$$

( صحيحة من أجل $n+1$ )

- **الخلاصة:** من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n$ ، $p_n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right.$ .

ب- استنتاج النهاية لـــ $p_n$ لما $n$ يؤول إلى $+\infty$: $\lim_{+\infty} p_n =$

التفسير العملي لهذه النتيجة ؟

هو احتمال سحب كرة بيضاء من كيس يحتوي على كرتين إحداهما بيضاء و الأخرى سوداء.

## $TD2$: متغير عشوائي و احتمالات شرطية:

عدد الزبائن اللذين يأتون في خمس دقائق لمضخة في محطة خدمة هو متغير عشوائي $X$. نفرض أن عدد الزبائن $X$ لا يتعدى اثنان. قانون احتمال $X$ معطى في الجدول التالي:

| عدد الزبائن $i$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|
| $P(X=i)$ | $0,1$ | $0,5$ | $0,4$ |

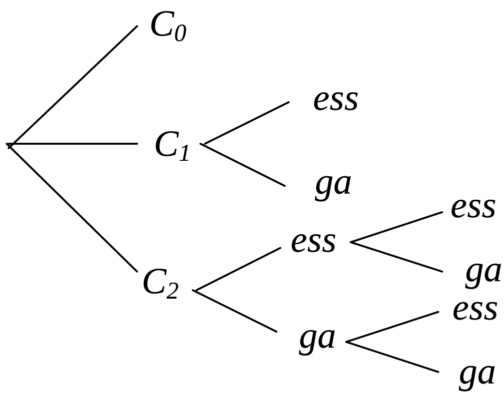
كل زبون يشتري البنزين أو المازوت. احتمال أن يشتري زبون البنزين هو $0,4$ و احتمال أن يشتري المازوت هو $0,6$.

اختيار زبون مستقل عن اختيارات الآخرين و عدد الزبائن. نرمز بالرمز $C_i$ الحادثة $(X=i)$ ، أي الحادثة " يأتي $i$ زبون إلى المضخة " من أجل $i$ من $0$ إلى $2$ .

مختلف الحالات الممكنة ملخصة في الشجرة التالية.

نرمز بـــ $E$ للحادثة " زبون واحد فقط يشتري البنزين "

**1.** أ) أتمم الشجرة.




ب) أحسب $p(C_1 \cap E)$ .

جـ) برر أن $p_{C_2}(E) = 0,48$ . أحسب $p(C_2 \cap E)$ .

د) استنتج من الأسئلة السابقة قيمة $p(E)$ ( احتمال الحادثة " في خمس دقائق، زبون واحد يشتري البنزين " )

**2.** $Y$ هو المتغير العشوائي المساوي لعدد الزبائن الذين يشترون البنزين في خمس دقائق.

أ- ما هي قيم $Y$ ؟

ب- عين قانون احتمال $Y$.

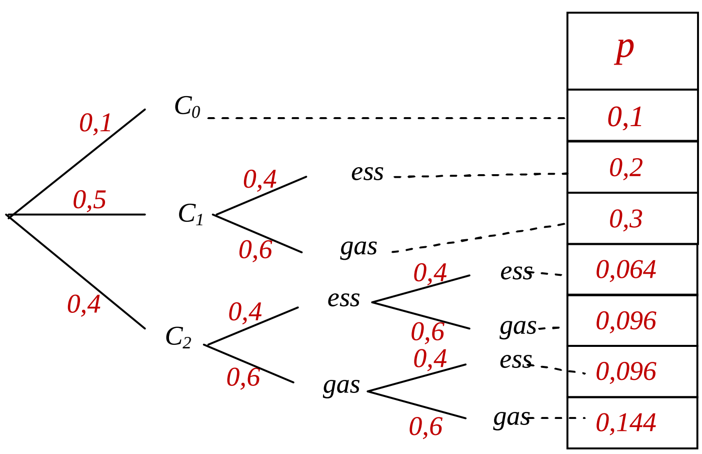
ج- ضع جدول يعطي قانون الثنائية $(X ; Y)$.

د- هل المتغيران العشوائيان $X$ و $Y$ مستقلان ؟

**الحل:** قانون احتمال $X$ معطى في الجدول التالي:

| عدد الزبائن $i$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|
| $P(X=i)$ | $0,1$ | $0,5$ | $0,4$ |

**أ) إتمام الشجرة:**




**ب) حساب $p(C_1 \cap E)$ :** $P(C_1 \cap E) = 0,2$

جـ) التبرير أن $p_{C_2}(E) = 0,48$ : $p_{C_2}(E) = 2(0,4\times 0,6) = 0,48$

حساب $p(C_2\cap E)$ : $p(C_2\cap E) = p(C_2)\times p_{C_2}(E) = 0,4\times 0,48 = 0,192$

د) استنتاج من الأسئلة السابقة قيمة $p(E)$ ( احتمال الحادثة " في خمس دقائق، زبون واحد يشتري البنزين " )

$p(E)=p(E\cap(C_0\cup C_1\cup C_2))=p(C_0\cap E)+p(C_1\cap E)+p(C_2\cap E)=0 + 0,2 +0,192 = 0,392$

3 $Y$ هو المتغير العشوائي المساوي لعدد الزبائن الذين يشترون البنزين في خمس دقائق.

أ- قيم $Y$: $Y(\Omega) = \{0\,;1\,;2\}$

ب- تعيين قانون احتمال $Y$:

| $y_i$ | 0 | 1 | 2 | المجموع |
|---|---|---|---|---|
| $p(Y=y_i)$ | 0,544 | 0,392 | 0,064 | 1 |

ج- جدول يعطي قانون الثنائية $(X\,;\,Y)$:

| $Y \backslash X$ | 0 | 1 | 2 | |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0,1 | 0,3 | 0,144 | 0,544 |
| 1 | 0 | 0,2 | 0,192 | 0,392 |
| 2 | 0 | 0 | 0,064 | 0,064 |
| | 0,1 | 0,5 | 0,4 | 1 |

د- هل المتغيران العشوائيان $X$ و $Y$ مستقلان ؟

المتغيران العشوائيان $X$ و $Y$ غير مستقلان لأن:

$p((X=0)\cap(Y=0))=0,1$ و $p(X=0).p(Y=0)= 0,544\times 0,1=0,0544$

أي $p((X=0)\cap(Y=0))\neq p(X=0).p(Y=0)$

## VI. قوانين الاحتمالات

# أنشطة:

### النشاط الأول: رميات متتابعة لزهرة نرد :

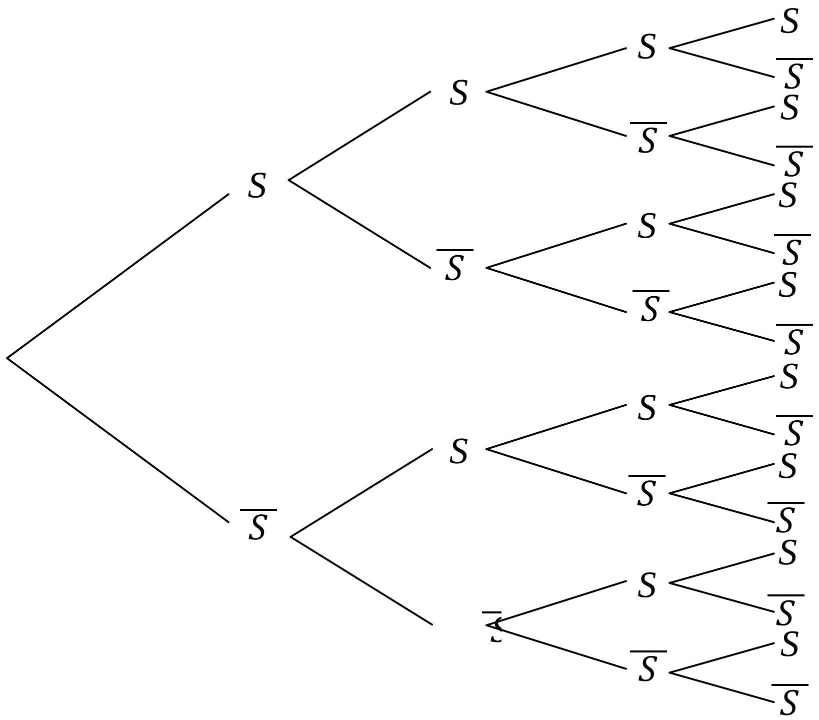
نرمي زهرة نرد متجانس أربع مرات متتابعة ونهتم بعدد مرات ظهور الرقم 5.

نسمي $S$ الحادثة: " ظهور الرقم 5 "، يسمى " نجاح " ، حادثته المعاكسة $\overline{S}$ تسمى " فشل " .

نفرض أن الرميات مستقلة و يمكن تمثيل التجربة بواسطة شجرة مثقلة.

●نتيجة تجربة: نسمي نتيجة تجربة كل قائمة لأربعة حروف مأخوذة من المجموعة $\{ S ; \overline{S} \}$ وهي ممثلة بمسار " *chemin* "

●متغير عشوائي: نرمز بـــ $X$ للمتغير العشوائي المساوي لعدد تحقيقات $S$ أثناء الأربع الرميات.




الهدف من التجربة هو تعيين قانون احتمال المتغير العشوائي $X$ .

1 ما هي قيم $X$ ؟

2 أتمم الشجرة بوضع الاحتمالات على كل فرع.

3 باستعمال الشجرة، أجب على الأسئلة التالية:

أ- أحسب $p(X = 0)$ ثم $p(X = 4)$.

ب- أحسب $p(X = 1)$ ثم $p(X = 3)$.

ج- في الأخير أحسب $p(X = 2)$ .

د- شكل جدول قانون احتمال $X$.

4 نقترح إيجاد هذه النتائج باستعمال تقنيات العد.

نحصل على كل مخرج بتعمير بـــ $S$ أو $\overline{S}$ الخانات

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | |

| الرمية | الرمية | الرمية | الرمية |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |

أ- عد باستعمال التوفيقات، القائمات التي لا تحتوي على $S$، ثم $S$ واحد، $S$ مرتان، ثلاثة $S$ ، أربعة $S$.

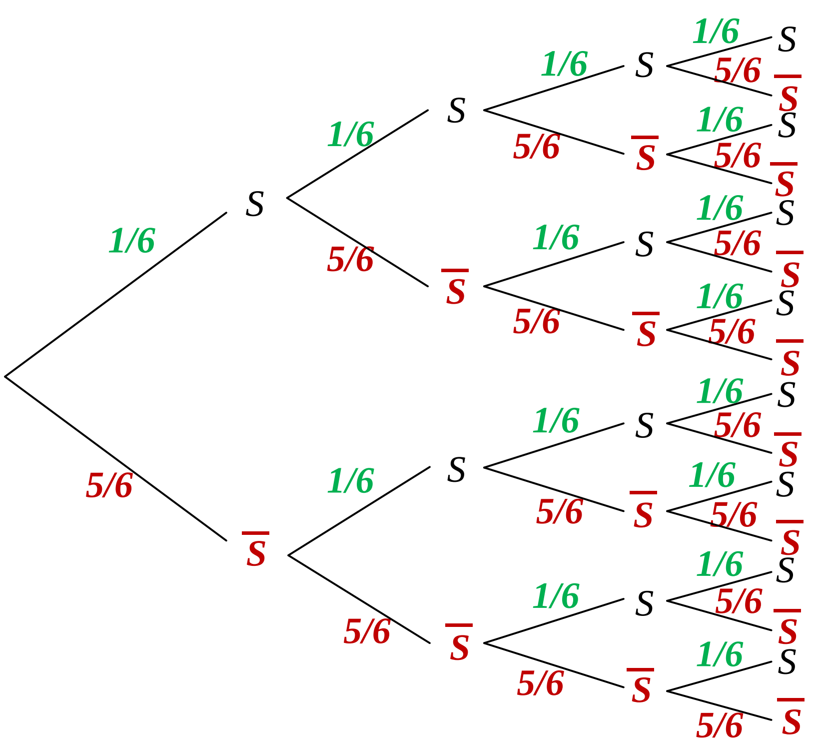
ب- برر أن كل مخرج للحادثة " $X = k$ " مع $(0 \leq k \leq 4)$ له نفس الاحتمال. أوجد إذن قانون احتمال $X$.

ج- تحقق باستعمال قانون ثنائي الحد أن: $\sum_{p=0}^{n} p(X=k) =$

الحل:

1 قيم $X$ : $X(\Omega) = \{0\,;1\,;2\,;3\,;4$

2 إتمام الشجرة بوضع الاحتمالات على كل فرع:




| $p_i$ | $X$ |
|---|---|
| 1/1296 | 4 |
| 5/1296 | 3 |
| 5/1296 | 3 |
| 25/1296 | 2 |
| 5/1296 | 3 |
| 25/1296 | 2 |
| 25/1296 | 2 |
| 125/1296 | 1 |
| 5/1296 | 3 |
| 25/1296 | 2 |
| 25/1296 | 2 |
| 125/1296 | 1 |
| 25/1296 | 2 |
| 125/1296 | 1 |
| 125/1296 | 1 |
| 625/1296 | 0 |

3 باستعمال الشجرة، أجب على الأسئلة التالية:

أ- حساب $p(X = 0)$ ثم $p(X = 4)$:

$p(X=0) = \frac{625}{129}$ ؛ $p(X=4) = \frac{1}{129}$

ب- حساب $p(X = 1)$ ثم $p(X = 3)$:

$p(X=1) = \frac{4\times125}{1296} = \frac{12}{32}$ ؛ $p(X=3) = \frac{20}{1296} = \frac{5}{32}$

ج- حساب $p(X = 2)$ :

$p(X=2) = \frac{6\times25}{1296} = \frac{25}{21}$

د- قانون احتمال $X$:

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | المجموع |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | 625/1296 | 125/324 | 25/216 | 5/324 | 1/1296 | 1 |

4 نقترح إيجاد هذه النتائج باستعمال تقنيات العد. نحصل على كل مخرج بتعمير بـــ $S$ أو $\overline{S}$ الخانات

أ- عد باستعمال التوفيقات، القائمات التي لا تحتوي على $S$، ثم $S$ واحد، $S$ مرتان، ثلاثة $S$ ، أربعة $S$.

عدد القائمات التي لا تحتوي على $S$ هو: $C_4^0 =$ أي $\overline{S}\ \overline{S}\ \overline{S}\ \overline{S}$

عدد القائمات التي تحتوي على $S$ واحد هو: $C_4^1 =$

عدد القائمات التي تحتوي على $S$ مرتان هو: $C_4^2 =$

عدد القائمات التي تحتوي على $S$ ثلاث مرات هو: $C_4^3 =$

عدد القائمات التي تحتوي على $S$ واحد فقط هو: $C_4^4 =$

**ب- تبرير أن كل مخرج للحادثة " $X = k$ " مع $( 0 \le k \le 4 )$ له نفس الاحتمال:**

بما أن كل الرميات مستقلة فإن كل مخارج الحادثة " $X = k$ " لها نفس الاحتمال لأن الضرب تبديلي.

**أيجاد قانون احتمال $X$:**

$$p(X=0) = C_4^0\left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{625}{129} \quad ; \quad p(X=1) = C_4^1\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{12}{32}$$

$$p(X=2) = C_4^2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{21} \quad ; \quad p(X=3) = C_4^3\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^1 = \frac{12}{32}$$

$$p(X=4) = C_4^4\left(\frac{1}{6}\right)^4 = \frac{1}{129}$$

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | المجموع |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | $\frac{625}{129}$ | $\frac{12}{32}$ | $\frac{25}{21}$ | $\frac{5}{324}$ | $\frac{1}{129}$ | 1 |

**ج- التحقق باستعمال قانون ثنائي الحد أن:**

$$\sum_{k=0}^{4} p(X=k) = C_4^0\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^4 + C_4^1\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^3 + C_4^2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^2 + C_4^3\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^1 + C_4^4\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{1}{6}\right)^0 = \left(\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\right)^4 =$$

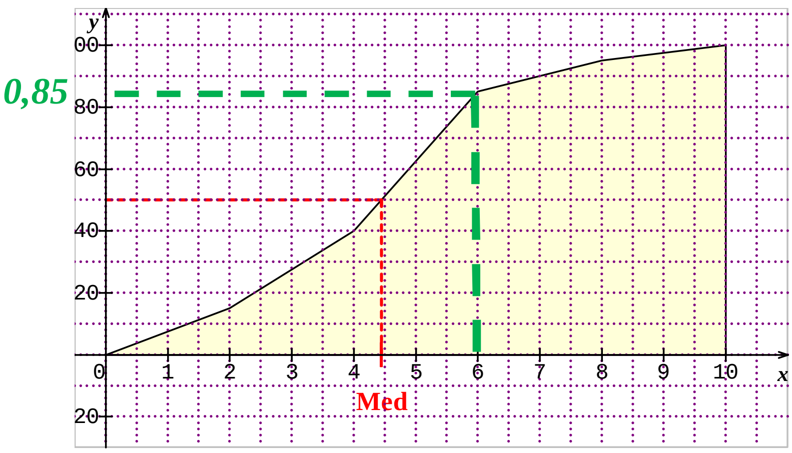
## النشاط الثاني: من المنفصل إلى المستمر:

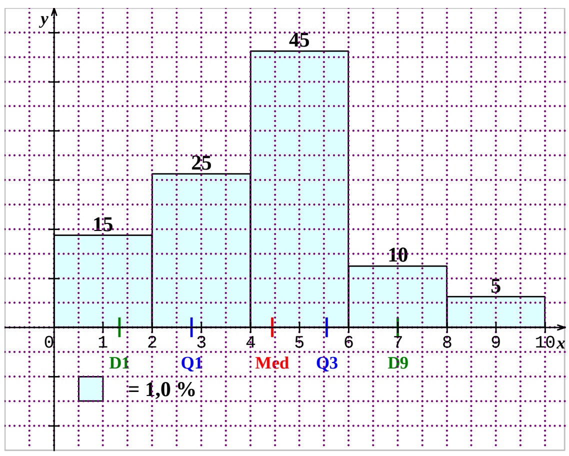
دراسة ظاهرة إحصائية أعطت النتائج التالية:

| الفئة | [0 ;2[ | [2 ;4[ | [4 ;6[ | [6 ;8[ | [8 ;10[ |
|---|---|---|---|---|---|
| التواتر | 0,15 | 0,25 | 0,45 | 0,10 | 0,05 |
| الحد الأعلى | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 |
| التواتر المجمع الصاعد | 0,15 | 0,40 | 0,85 | 0,95 | 1 |

نقرأ الخانات الملونة كما يلي: 40 % من المجتمع له ميزة أقل من 4 .

المدرج التكراري للتواترات و المضلع مرسومة في الشكل التالي:



لنختار عشوائيا فرد من المجتمع .نرمز بـــ $X$ لقيمة ميزته. القيم الممكنة لـــ $X$ تنتمي إلى المجال $[0 . 10[$.

التواترات الإحصائية تُفسر بمفردات الاحتمالات.

فمثلا " $40\ \%$ من المجتمع له ميزة أقل من $4$ " نترجمها بـــ : $p(X< 4)=0{,}4$ .

**1) ما احتمال أن يكون أن تكون قيمة $X$ أصغر تماما من $6$؟**

هذا الاحتمال يمثل تواترات الأفراد الذي قيمة ميزتهم أصغر تماما من $6$. المنحنى يعطي $0{,}85$.، و هو كذلك مساحة الجزء من الدرج التكراري على يسار المستقيم ذو معادلة $x= 6$. (المساحة الكلية هي $1$ u.a. )

**2) ما هو الاحتمال حتى يكون $X$ محصور بين $3$ و $5$ ؟**

بنفس الطريقة السابقة نجد:

$$p(3\leq X \leq 5)=p(3 \leq X \leq 4) +p( 4 \leq X \leq 5)= 0{,}5[p(2\leq X < 4)+p(4 \leq X < 6)]=0{,}35$$

**3) ما احتمال أن تكون قيمة $X$ أكبر أو يساوي من $7$ ؟**

$$p(X \geq 7) =0{,}10$$

بصفة عامة: إذا كان $x$ عدد حقيقي من المجال $[\,0\ ;\ 10\,[$، يمكن حساب الاحتمال $p(X < x)$ وهي مساحة الجزء من المدرج التكراري الذي يقع قبل $x$ (المساحة الكلية هي $1$ u.a. )

إذا اقتصرنا على الجزء العلوي من المدرج ، نحصل على تمثيل بياني لدالة درجية $f$ ( *fonction en escalier* ) و من تعريف التكامل لـــ $f$ على المجال $[\,0\ ;\ 10\,[$ : $p(X < x) = \int_0^x f(x)d$ .

**الدالة $f$ تسمى كثافة الاحتمال $p$.**

## قوانين الاحتمالات

# الدرس

### 1 قانون ثنائي الحد:

#### أ- اختبار برنولي - تجربة برنولي:

إذا كان اهتمامنا ، خلال تجربة عشوائية ، فقط بتحقيق حادثة معينة، نقول أن هذه التجربة هي تجربة برنولي.

" *épreuve de Bernoulli* "

o **مثال:** نرمي زهرة نرد ونهتم بظهور الرقم $5$.

**تعريف:**

- نسمي اختبار برنولي ، كل تجربة عشوائية ذات مخرجين متعاكسين $S$ و $E = \bar{S}$ باحتمالين $p$ و $q$ حيث: $p+ q = 1$ على الترتيب . ( $q = 1 - p$ ).
- نسمي تجربة برنولي ذات رتبة $n$ ، تكرار $n$ اختبار برنولي متطابقة و مستقلة.

o **أمثلة:**

- رمي قطعة نقدية متجانسة، مع مخرجين متعاكسين: " الحصول على ظهر" ( احتمال يساوي $-$ ) و " الحصول على وجه" (احتمال يساوي ).
- سحب كرة كرة من كيس يحتوي على ست كرات بيضاء و أربع كرات خضراء مع الخرجين:

$S$: " سحب كرة بيضاء " احتمال يساوي $0,6$.

$E = \bar{S}$ : " سحب كرة خضراء " احتمال يساوي $0,4$.

ملاحظة: من الملائم تعيين تناوب النتائج لتجربة برنولي بـــ ( نجاح – خسارة ) و التي نرمز لها بـــ $S$ و $E$.

o أمثلة:

ب- قانون برنولي:

لتكن تجربة برنولي ذات مخرجين متعاكسين $S$ و $E = \bar{S}$ باحتمالين $p$ و $q$ على الترتيب حيث: $p + q = 1$ و ليكن $X$ المتغير العشوائي ذو القيمتين $0$ و $1$ و المعرف كما يلي:

$X = 1$ إذا تحقق المخرج $S$

$X = 0$ إذا تحقق المخرج $\bar{S}$

أي $\{X = 1\} = S$ و $\{X = 0\} = \bar{S}$

تعريف: قانون احتمال $X$ يسمى قانون برنولي ذو الوسيط $p$ .

خاصية: الأمل الرياضي و التباين للمتغير العشوائي $X$ هما على التوالي: $E(X)= p$ و $V(X)= pq = p\,(p-1)$

➢ البرهان:

| $x_i$ | $0$ | $1$ | المجموع |
|---|---|---|---|
| $p_i$ | $1-p$ | $p$ | $1$ |
| $x_i p_i$ | $0$ | $p$ | $p$ |
| $x_i^2 p_i$ | $0$ | $p$ | $p$ |

$E(X)= p$ و $V(X)=E(X^2)- ( E(X))^2 = p - p^2 =p(1 - p ) = pq$

ج- مخطط برنولي:

تعريف: مخطط برنولي هو تكرار $n$ تجربة لبرنولي متطابقة و مستقلة ذات مخرجين متعاكسين $S$ و $E = \bar{S}$ باحتمالين $p$ و $q$ على الترتيب حيث: $p + q = 1$ .

د- متغير عشوائي يتبع قانون ثنائي الحد:

ليكن $E$ تجربة برنولي و $p$ احتمال النجاح $S$ و $n$ عدد طبيعي غير معدوم.إذا كررنا التجربة $E$، $n$ مرة بطرقة مستقلة التجربة $E$ و نرمز بـــ $X$ للمتغير العشوائي المساوي لعدد النجاحات $S$ .

- $X$ يأخذ قيمه من المجموعة $\{0 ; 1 ; ... ; n\}$
- في هذه الحالة نقول أن $X$ يتبع قانون ثنائي الحد ذات الوسيطين $n$ و $p$ .
- قانون ثنائي الحد ذو الوسيطين $n$ و $p$ يرمز له بالرمز $B( n , p)$.

ملاحظات:

- تكرار $n$ تجربة لبرنولي يمكن تكون في وقت واحد ( رمي $n$ قطعة نقدية متطابقة).
- المخارج الأولية لمخطط برنولي هي قوائم من $n$ حرف ، كل حرف هو إما $S$ أو $E$.

**مبرهنة:** ليكن $X$ متغير عشوائي يتبع قانون ثنائي الحد $B(n\,,p)$.
من أجل كل $k$ من $\{0\,;1\,;\dots;n\}$ ، $p(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$.

➢ **البرهان:**
الحادثة $(X=k)$ هي مجموعة القوائم ذات $n$ حرف مكتوبة بالحرفين $S$ و $E$ حيث $S$ يظهر $k$ مرة و $E$ يظهر $(n-k)$ مرة. توجد $C$ قائمة من هذا النوع ( اختيار $k$ موضع للحرف $S$ من بين $n$ ممكن ).
بما أن التجارب مستقلة فإن احتمال كل نتيجة هو $p^k(1-p)^{n-k}$ و بالتالي احتمال الحادثة $(X=k)$ هو:

$$p(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$$

**ملاحظات:**

- $$\sum_{k=0}^{n} p(X=k)=\sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k(1-p)^{n-k}=[p+(1-p)]^n=$$

لهذا السبب سميت قانون ثنائي الحد.

- احتمال الحصول على $n$ نجاح هو $p(X=n)=p^n$.
- احتمال الحصول على $n$ فشل هو $p(X=0)=(1-p)^n$.
- و بالتالي احتمال الحصول على نجاح على الأقل هو: $p(X\geq 1)=1-p(X=0)=1-(1-p)^n=1-q^n$

**مبرهنة:** $X$ متغير عشوائي يتبع قانون ثنائي الحد $B(n\,,p)$.
**الأمل الرياضي:** $E(X)=n\,p$. **التباين:** $V(X)=np(1-p)=npq$

➢ **البرهان:**

$$E(X)=\sum_{k=0}^{n} k\,p(X=k)=\sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k(1-p)^{n-k}k=\sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$$
$$+\sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k(1-p)^{n-k}k=\sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$$

لدينا: $k\,C_n^k=k\times\frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{n(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}=n\,C_{n-1}^{k-1}$

وبالتالي:
$$E(X)=\sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k(1-p)^{n-k}k=\sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1}p^k(1-p)^{n-k}$$
$$=\sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1}p^{k-1}(1-p)^{n-k}np=np\sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1}p^{k-1}(1-p)^{(n-1)-(k-1)}$$

نضع: $i=k-1$:
$$E(X)=np\sum_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^{i}p^{i}(1-p)^{(n-1)-i}=np[p+(1-p)]^{n-1}=np$$

➢ **برهان آخر أحسن:**
بما أن $X$ متغير عشوائي يتبع قانون ثنائي الحد $B(n\,,p)$ ، يوجد متغير عشوائي $Y$ معرف على $\Omega$، يتبع قانون برنولي ذو الوسيط $p$ و بالتالي $X=n\,Y$.

لدينا: $E(X)=E(nY)=nE(Y)=np$

$V(X)=V(nY)=nV(Y)=np(1-p)$

**مثال 01:** نرمي خمس قطع نقدية متجانسة في آن واحد. لتكن الحادثة $A$: "الحصول على الأقل على الظهر مرتين"

أحسب احتمال الحصول على الحادثة $A$.

**الحل:** المتغير العشوائي $X$ المساوي لعدد ظهور الظهر يتبع قانون ثنائي الحد ذات الوسيطين $n=5$ و $p =$ .

$$P(X \geq 2) = 1 - [p(X=0) + p(X=1)] = 1 - \left[ C_5^0 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^5 + C_5^1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \right] = 1 - 6\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{13}{16}$$

**مثال 02:** يحتوي تمرين متعدد الخيارات $QCM$ على $6$ أسئلة و كل سؤل له ثلاثة أجوبة ممكنة. نجيب عشوائيا على الأسئلة.

ما احتمال الحصول على:

$A$: " بالضبط إجابتان صحيحتان "

$B$ : " المعدل" ( أي على الأقل $3$ أجوبة صحيحة)

**الحل:** المتغير العشوائي $X$ المساوي لعدد الأجوبة الصحيحة يتبع قانون ثنائي الحد ذات الوسيطين $n=6$ و $p =$ .

**احتمال الحادثة $A$ :** $p(A) = p(X=2) = C_6^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{240}{729} = \frac{80}{24}$

**احتمال الحادثة $B$ :**

$$p(B) = p(X \geq 3) = C_6^3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^3 + C_6^4 \left(\frac{1}{3}\right)^4 \left(\frac{2}{3}\right)^2 + C_6^5 \left(\frac{1}{3}\right)^5 \left(\frac{2}{3}\right)^1 + C_6^6 \left(\frac{1}{3}\right)^6 \left(\frac{2}{3}\right)^0 = \frac{233}{729}$$

## 2 قوانين الاحتمالات المستمرة:

في كل الحالات المدروسة لحد الآن ، المتغير العشوائي $X$ يأخذ عدد منته من القيم $x_1$ ؛ $x_2$ ؛ ....؛ $x_n$. نقول إذن أن المتغير $X$ منفصل. بينما توجد متغيرات عشوائية أخرى غير منفصلة ، تأخذ كل قيم مجال من $\mathbb{R}$ . ( مفتوح أو مغلق ).

### أ- أمثلة تمهيدية:

**المثال 01:** نرمي على هدف نصف قطره $1$ متر، علما أننا نصيب دائما الهدف. المتغير العشوائي الذي يعطي المسافة بين نقطة الرمية و المركز تأخذ كل قيم المجال $[0;1]$ .

**المثال 02:** مدة صلاحية ترانزستور، مدة الانتظار أمام شباك ...هي متغيرات عشوائية غير منفصلة.

لا يمكن تعريف قانون احتمال المتغير العشوائي $X$ بعد احتمالات الحوادث $(X=x_i)$، لأن هذه الحوادث عددها منته .

لا بد من إتباع نهج آخر ، نهج يسمح لنا بالإجابة على أسئلة خاصة بحوادث من الشكل:

" $X$ تأخذ قيم من مجال $J$ " الحوادث التي نرمز لها $(X \in J)$. الكتابة $(X \in J)$ هي كتابة مبالغ فيه وغير صحيحة لأن $X$ ليس عددا و هي امتداد للكتابة $(X=x_i)$ المستعملة للمتغير العشوائي المنفصل.

**المثال 03:** إذا كان $X$ يقيس مدة صلاحية ترانزستور، فمثلا $X$ يأخذ القيمة $731$ يوم و $3$ ساعات و $20$ ثانية ليس له أهمية، بينما إذا أخذ $X$ قيم بين $300$ و $400$ يوم قد يكون لها أهمية.

### ب- متغير معرف بدالة كثافة:

#### ▪ الكثافة:

**تعريف:** ليكن $I$ مجال من $R$.

نسمي كثافة احتمال على المجال $I$، كل دالة $f$ مستمرة و موجبة على المجال $I$ تحقق: $\int_I f(t)dt = 1$

**ملاحظات:**

- إذا كان $I = [a\,;b]$ فإن $\int_I f(t)dt = \int_a^b f(t)dt$ .
- إذا كان $I = [a\,;+\infty[$ فإن $\int_I f(t)dt = \lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)dt$ .
- إذا كان $I = ]-\infty\,;a]$ فإن $\int_I f(t)dt = \lim_{x\to-\infty} \int_x^a f(t)dt$ .
- إذا كان $I = \mathbb{R} = ]-\infty\,;+\infty[$ فإن $\int_I f(t)dt = \lim_{x\to-\infty} \int_x^0 f(t)dt + \lim_{x\to+\infty} \int_0^x f(t)dt$ .

## قانون احتمال:

**تعريف:** ليكن $I$ مجال من $R$ و $f$ كثافة احتمال على $I$.

الدالة $p$ التي ترفق بكل مجال $[a\,;b]$ من المجال $I$، العدد $p([a\,;b]) = \int_a^b f(t)dt$ تسمى قانون احتمال على $I$.

**ملاحظات:**

- $p([a\,;b])$ هو مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى الممثل للدالة $f$ و محور الفواصل و المستقيمان ذات معادلتان: $x = a$ و $x = b$.
- $p([a\,;b]) \in [0\,;1]$
- $p(\{x_0\}) = 0$ ( لأن $\int_{x_0}^{x_0} f(t)dt = 0$ ). نقول أن الحادثة $\{x_0\}$ شبه مستحيلة.
- $p([a\,;b]) = p([a\,;b[) = p(]a\,;b]) = p(]a\,;b[)$
- $p([a\,;+\infty[) = p(]a\,;+\infty[)$ و $p(]-\infty\,;a]) = p(]-\infty\,;a[)$ .

## متغير عشوائي مستمر:

**تعاريف:**

- نسمي متغير عشوائي مستمر كل متغير يأخذ قيم من مجال $I$.
- ليكن $p$ قانون احتمال على المجال $I$ ذو كثافة $f$ .
- نقول أن المتغير العشوائي $X$ ، ذو قيم في $I$ ، يتبع قانون احتمال $p$ عندما يكون من أجل كل مجال $[a\,;b]$ من $I$ ، لدينا: $p(X \in [a\,;b]) = p(a \le X \le b) = \int_a^b f(t)dt$

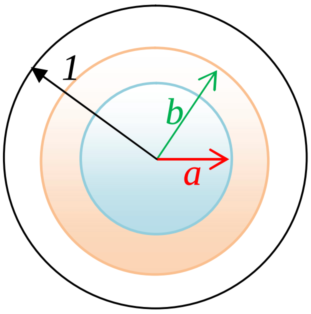
**ملاحظات:**

- $p([a\,;b]) = p(a \le X \le b)$
- $p(X \in [a\,;+\infty[) = p(X \ge a)$ و $p(X \in\, ]-\infty\,.a]) = p(X \le a)$ .
- $p(\{X = x_0\}) = 0$ . نقول أن الحادثة $(X = x_0)$ شبه مستحيلة.

**تمرين:** نرمي على هدف نصف قطره $1$ متر، علما أننا نصيب دائما الهدف. $X$ المتغير العشوائي الذي يعطي المسافة بين أثر الرمية و المركز. نقبل $X$ له كثافة ، الدالة $f$ المعرفة على $R$ كما يلي:

$$\begin{cases} f(x) = 2x & si \quad 0 \le x \le 1 \\ f(x) = 0 & si \quad x \notin [0\,;1] \end{cases}$$

1. أحسب الاحتمالات التالية: $p(X \le 0{,}3)$ ؛ $p(X > 0{,}3)$ ؛ $p(0{,}2 \le X \le 0{,}5)$ .
2. تحقق أنه إذا كان $0 \le a < b < 1$ فإن $p(a \le X \le b)$ يساوي نسبة الطوق (couronne) المعرفة بـــ $a$ و $b$ و مساحة الهدف.




**الحل:**

**1 حساب الاحتمالات:**

$$p(X \leq 0{,}3) = p(X < 0) + p(0 \leq X \ \leq 0{,}3) = 0 + \int_0^{0,3} 2t\,dt = [t^2]_0^{0,3} = 0{,}09$$

$$p(X > 0{,}3) = 1 - p(X \leq 0{,}3) = 1 - 0{,}09 = 0{,}91$$

$$p(0{,}2 \leq X \leq 0{,}5) = \int_{0,2}^{0,5} 2t\,dt = [t^2]_{0,2}^{0,5} = 0{,}25 - 0{,}04 = 0{,}21$$

**2 التحقق من أنه إذا كان $0 \leq a < b < 1$ فإن $p(a \leq X \leq b)$ يساوي نسبة الطوق (couronne) المعرفة بـ $a$ و $b$ و مساحة الهدف:**

لدينا: $p(a \leq X \leq b) = \int_a^b 2t\,dt = [t^2]_a^b = b^2 - a$ و $\frac{\text{مساحة الطوق}}{\text{مساحة الهدف}} = \frac{\pi b^2 - \pi a^2}{\pi(1)} = b^2 - a$

**ج- القانون المنتظم:**

**تعريف:**

نسمي قانون منتظم (أو قانون التوزيع المنتظم) على المجال $I = [a\,;b]$ $(a < b)$، قانون الاحتمال $p$ ذو الكثافة $f$ هي دالة ثابتة على المجال $I$.

في هذه الحالة، نقول أن المتغير العشوائي $X$ الذي يتبع هذا القانون التوزيع المنتظم على المجال $I = [a\,;b]$

**ملاحظة:** $\begin{cases} f(x) = \frac{1}{b-a} & si \quad x \in [a\,;b \\ f(x) = 0 & si \quad x \notin [a\,;b \end{cases}$

**مبرهنة:** $J = [\alpha\,;\,\beta] \subset [a\,;b]$

$$p(\alpha \leq X \leq \beta) = p([\alpha\,;\,\beta]) = \frac{\beta - \alpha}{b - a} = \frac{J \text{ طول}}{I \text{ طول}}$$

- **البرهان:** $p([\,;\,\beta]) = \int_\alpha^\beta \frac{1}{b-a}\,dx = \frac{\beta-\alpha}{b-a} = \frac{J \text{ طول}}{I \text{ طول}}$

**خاصية:** من أجل كل $x$ من المجال $[a\,;b]$، $p(X \leq x) = \frac{x-a}{b-a}$

- **البرهان:**

$$p(X \leq x) = p(]-\infty\,;a[) + p([a\,;x]) = 0 + \frac{x-a}{b-a} = \frac{x-}{b-}$$

مبرهنة:

الأمل الرياضي للمتغير العشوائي: $E(X) = \frac{a+b}{2}$

التباين: $V(X) = \frac{(b-a)}{12}$

البرهان:

$$E(X) = \int_a^b x\, f(x)dx = \int_a^b \left(\frac{1}{b-a}\right) x\ dx = \left[\frac{x^2}{2(b-a)}\right]_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$E(X^2) = \int_a^b x^2 f(x)dx = \int_a^b \left(\frac{1}{b-a}\right) x^2\ dx = \left[\frac{x^3}{3(b-a)}\right]_a^b = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{a^2+ab+b^2}{3}$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

**تنبيه:** اختيار عشوائيا عدد من مجال، نقطة من مستقيم، نقطة من دائرة، لحظة بين الواحدة و الثالثة ،إلخ...وضعيات تتبع قانون توزيع منتظم.

**تمرين01:** ابتداء من الساعة السابعة صباحا، تمر حافلات عند محطة $A$ كل ربع ساعة . يأتي شخص إلى المحطة $A$ بين الساعة السابعة صباحا و السابعة و النصف.

نفرض أن المدة من السابعة إلى الى وقت وصوله إلى المحطة $A$ هي متغير عشوائي موزع بانتظام على المجال $[0\ ,30]$ .

ما هو احتمال أن ينتظر الحافلة القادمة:

1. أقل من خمس دقائق ؟
2. أكثر من عشر دقائق ؟

**الحل:**

1. احتمال أن ينتظر الحافلة القادمة أقل من خمس دقائق

نرمز بـــ $X$ للمدة ، بالدقائق، بين السابعة وقت وصول الشخص و $E$ الحادثة: " الشخص ينتظر أقل من خمس دقائق "

بما أن الشخص ينتظر أقل من خمس دقائق و أن الحافلات تمر بالمحطة كل 15 دقيقة أي على $7h$ ثم على $7h15$ ثم على $7h30$فإن هذا الشخص يكون في المحطة على الأكثر 5 دقائق قبل وصول الحافلة

أي بين $7h10$ و $7h15$ أو $7h25$ و $7h30$ أي: $E = (10 < X < 15) \cup (25 < X < 30$

و بالتالي: $p(E) = p(10 < X < 15) + p(25 < X < 30) = \frac{15-10}{30-0} + \frac{30-25}{30-0} = \frac{10}{30} =$

2. احتمال أن ينتظر الحافلة القادمة أكثر من عشر دقائق

نرمز بـــ $F$ الحادثة: " الشخص ينتظر أكثر من عشر دقائق "

بما أن الشخص ينتظر أكثر من عشر دقائق وأن الحافلات تمر بالمحطة كل 15 دقيقة أي على $7h$ ثم على $7h15$ ثم على $7h30$فإن هذا الشخص يكون في المحطة على الأقل 10 دقائق قبل وصول الحافلة أي بين $7h$ و $7h5$ أو $7h15$ و $7h20$ أي

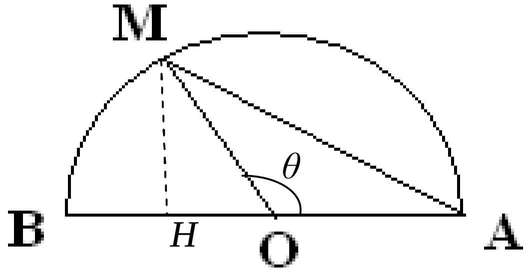
$E = (0 < X < 5) \cup (15 < X < 20$:

و بالتالي: $p(E) = p(0 < X < 5) + p(15 < X < 20) = \frac{5-0}{30-0} + \frac{20-15}{30-0} = \frac{10}{30} =$

**تمرين02:** نقطة $M$ مأخوذة عشوائيا من نصف الدائرة $\Gamma$ التي قطرها $[AB]$ ، مركزه $O$ و نصف قطره $1$.

ما هو الاحتمال $p$ حتى تكون مساحة المثلث $AOM$ أصغر أو تساوي $0,25$ ؟

**الحل:**




نتقبل أنه اختيار عشوائيات نقطة $M$ من على نصف دائرة $\Gamma$ معناه أن الزاوية $\theta = \widehat{AOM}$ تتبع قانون توزيع منتظم على المجال $[0\,;\,\pi]$. ( نعلم أن طول قوسمن دائرة متناسب مع الزاوية المركزية التي تحصره وبالتالي احتمال قوس هو: $\frac{\text{طول القوس}}{\text{طول نصف الدائرة}}$ وبالتالي $\theta$ تتبع قانون احتمال ذو توزيع منتظم )

نرمز بـــ $S$ لمساحة المثلث $AOM$. $S = \frac{OA \times MH}{2} = \frac{\sin\theta}{2}$

$S \leq 0{,}25$ معناه $\frac{\sin\theta}{2} \leq 0{,}25$ أي $\sin\theta \leq \frac{1}{2}$ أي $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}$ أو $\frac{5\pi}{6} \leq \theta \leq \pi$

$$p(S \leq 0{,}25) = p\left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}\right) + p\left(\frac{5\pi}{6} \leq \theta \leq \pi\right) = \frac{\left(\frac{\pi}{6} - 0\right)}{\pi - 0} + \frac{\left(\pi - \frac{5\pi}{6}\right)}{\pi - 0} = \frac{1}{3}$$

## القانون الأسي:

### دراسة تمهيدية:

ليكن $\lambda$ عدد حقيقي موجب تماما و $f$ دالة معرفة على $[0\,;+\infty[$ بـــ: $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ .

الدالة $f$ موجبة تماما و مستمرة و متناقصة تماما و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ .

لدينا: $\int_0^t f(x)dx = 1 - e^{-\lambda t}$ و $\lim\limits_{t \to +\infty} \int_0^t f(x)dx = 1$

كل العناصر موجودة للتعميم على المجال $[0\,;+\infty[$ ، مفهوم قانون احتمال ذو كثافة.

نضع: $p([a\,;b]) = \int_a^b f(x)dx$

نستنتج على الخصوص ، من أجل $t \geq 0$ ، $p([0\,;t]) = \int_a^t f(x)dx = 1 - e^{-\lambda t}$

و $p([t\,;+\infty[) = -1p([0\,;t]) = 1 - \left(1 - e^{-\lambda t}\right) = e^{-\lambda t}$

يمكن وضع التعريف التالي:

**تعريف:** ليكن $\lambda$ عدد حقيقي موجب تماما.

الدالة $f$ المعرفة على $[0\,;\,+\infty[$ بـ: $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ هي كثافة لقانون احتمال $p$ ، يسمى **قانون أسي ذو الوسيط $\lambda$.**

متغير عشوائي $X$ يتبع قانون أسي ذي الوسيط $\lambda$ $(\lambda > 0)$، عندما تكون كثافته الدالة $f$ المعرفة كما يلي:

$$\begin{cases} f(x) = \lambda e^{-\lambda x} & si \quad x \geq 0 \\ f(x) = 0 & si \quad x < 0 \end{cases}$$

**نتائج:** من أجل $a \geq$ ؛

- $p(X \leq a) = 1 - e^{-\lambda}$
- $p(X > a) = e^{-\lambda}$
- $p(a \leq X \leq b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda}$

**مبرهنة:** الأمل الرياضي للمتغير العشوائي: $E(X) = \frac{1}{\lambda}$

**البرهان:**

$$E(X) = \lim_{t \to +\infty} \int_0^t x\, f(x) dx = \lim_{t \to +\infty} \int_0^t \lambda x e^{-\lambda x}\, dx$$

نستعمل المكاملة بالتجزئة لحساب $\int_0^t x e^{-\lambda x}\, dx$

نضع: $\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = \lambda e^{-\lambda x} \end{cases}$ نستنتج $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -e^{-\lambda x} \end{cases}$

$$\int_0^t \lambda x e^{-\lambda x}\, dx = \left[-x e^{-\lambda x}\right]_0^t + \int_0^t e^{-\lambda x} dx = \left[-x e^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}\right]_0^t = -t e^{-\lambda t} - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} + \frac{1}{\lambda}$$

$$E(X) = \lim_{t \to +\infty} \left(-t e^{-\lambda t} - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} + \frac{1}{\lambda}\right) = \frac{1}{\lambda}$$

**تمرين:** المدة الزمنية ، بالدقائق، لمكالمة هاتفية هي متغير عشوائي يتبع القانون الأسي ذو وسيط $\lambda = 0,1$ .وصل أحمد أمام هاتف عمومي، لكن في نفس الوقت سبقه أمين. ما احتمال أن ينتظر أحمد:

أ) أكثر عشر دقائق ؟

ب) بين عشر و عشرين دقيقة ؟

**الحل:** $p(X > x) = e^{-\lambda x} = e^{-0,1x}$

أ) احتمال أن ينتظر أحمد أكثر من عشر دقائق:

$$p(X < 10) = e^{-0,1 \times 10} = e^{-1} \cong 0,36$$

ب) احتمال أن ينتظر أحمد بين عشر و عشرين دقيقة ؟

$$p(10 < X < 20) = \int_{10}^{20} 0,1 e^{-0,1\,x} dx = \left[-e^{-0,1\,x}\right]_{10}^{20} = -e^{-2} + e^{-1} \cong 0,233$$

**متغيرات بدون ذاكرة:**

- **تمهيد:**

نسمي $X$ المتغير العشوائي الذي يعطي مدة حياة بالسنين لمكون الكتروني، من البديهي أن $X$ تأخذ قيم من المجال $[0\,;\,+\infty$

الحادثة: $(X \geq t\,)$ معناه أن مدة حياة المكون الالكتروني تفوق $t$ سنة.

نقول أن مدة حياة هي بدون ذاكرة أو بدون شيخوخة عندما يكون احتمال أن يشتغل المكون $h$ سنة إضافية علما أنه يشتغل عند اللحظة $t$ مستقل عن $t$.

لنترجم الخاصية $p(X \geq t + h/X \geq t$ مستقل عن $t$.....$(H)$

على الخصوص من أجل $t=0$، $p(X \geq h/X \geq 0) = \frac{p((X \geq h) \cap (X \geq 0)}{p(X \geq 0)}$

نعلم أن الحادثة $(X \geq 0$ أكيدة و $(X \geq h) \cap (X \geq 0) = (X \geq h$

أي $p(X \geq 0) =$ : و $p((X \geq h) \cap (X \geq 0)) = p(X \geq h$

وبالتالي $(H)$ تُترجم بــ: **من أجل كل** $t \geq 0$ و $h \geq 0$ . $p(X \geq t + h/X \geq t) = p(X \geq h$

يمكن وضع التعريف التالي:

**تعريف:**

نقول أن المتغير العشوائي الموجب $X$ **بدون ذاكرة** ( أو بدون تقدم في السن )عندما:

**من أجل كل** $t \geq 0$ و $h \geq 0$ ؛ $p(X \geq t + h/X \geq t) = p(X \geq h)$

**مثال:** في المثال السابق، إذا كان $X$ بدون ذاكرة ، فإن إن احتمال أن مدة حياة المكون تفوق $10$سنين علما أن المكون قد عمل $7$ سنوات هو: $p(X \geq 10/X \geq 7) = p(X \geq 3$ .

- **مميزات القوانين الأسية:**

**مبرهنة:**

كل متغير عشوائي $X$ يتبع قانون أسي هو بدون ذاكرة و كل متغير عشوائي $X$ بدون ذاكرة يتبع قانون أسي.

➢ **البرهان:** نفرض أن $X$ متغير عشوائي يتبع قانون أسي ذو وسيط $\lambda$.

$$p(X \geq t + h/X \geq t) = \frac{p((X \geq t + h) \cap (X \geq t))}{p(X \geq t)} = \frac{p(X \geq t + h)}{p(X \geq t)} = \frac{e^{-\lambda(t+h)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda h} = p(X \geq h)$$

و بالتالي $X$ يتبع قانون بدون ذاكرة.

- **نصف العمر:** $X$ متغير عشوائي يتبع قانون أسي أي بدون ذاكرة.

نسمي نصف العمر المدة $T$ التي تحقق $p(X < T\,) = 0{,}5$.

- **نتيجة:**

إذا كان $\lambda$ وسيط $X$ فإن: $p(X < T\,) = 0{,}5$ يكافئ $1 - e^{-\lambda t} = 0{,}5$ يكافئ $T = \frac{ln}{\lambda}$ .