المؤسسة: ثانوية خالص سليمان - بشلول - بطاقة رقم: 01/ 12 الأستاذ: شدانــي عبد المالك

الحصة	تحليل	التاريخ	أكتوبر 2015
المحور	الدالة الأسية	القسم	3 علوم تجريبية
الموضوع	تعاريف و خواص	المدة	ساعتين
الكفاءات المستهدفة	توظيف خواص الدالة الأسية النيبرية	المعارف المكتسبة	خواص القوى (السنة الاولى ثانوي)
الوسائل البداغوجية	المسطرة ، الحاسوب ،	المراجع	الكتاب المدرسي

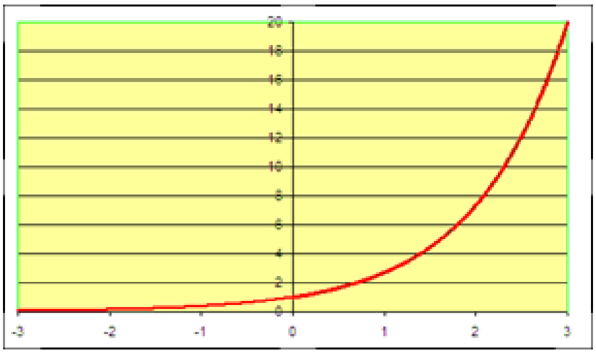
سير الدرس	مراحل الدرس	الزمن
نشاط استكشافي		

نشاط1: نشاط رقم 1 صفحة 75

مقدمة: تتم نمذجة العديد من الظواهر الفيزيائية و البيولوجية والاقتصادية و غيرها باستخدام دالة f متناسبة مع دالتها المشتقة f' . سوف نهتم هنا بدالة من هذا النوع و هي دالة تساوي دالتها المشتقة

فرضية: نقبل أنه توجد دالة f معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و تحقق الشرطين التاليين: $f'=f \quad (1)$ و $f(0)=1 \quad (2)$

1) باستعمال طريقة أولر و باختيار خطوة $h=0,005$ أنجز جدولا يتضمن القيم التقريبية لِـ$f(x)$ من أجل x ينتمي إلى $[-3;3]$ ثم أنشئ تمثيلا تقريبيا للدالة f.



h	x	f(x-h)=f(x)^(1-h)	x	f(x+h)=f(x)^(1+h)
0.005	0	1	0	1
	-0.01	0.995	0.01	1.005
	-0,01	0,990025	0,01	1,010025
	-0,02	0,985074875	0,02	1,015075125
	-0,02	0,980149501	0,02	1,020150501
	-0,03	0,975248753	0,03	1,025251253
	-0,03	0,970372509	0,03	1,030377509
	-0,04	0,965520647	0,04	1,035529397
	-0,04	0,960693044	0,04	1,040707044
	-0,05	0,955889578	0,05	1,045910579
	-0,05	0,95111013	0,05	1,051140132
	-0,06	0,94635458	0,06	1,056395833
	-0,06	0,941622807	0,06	1,061677812
	-0,07	0,936914693	0,07	1,066986201

2) h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$: $h(x)=f(x)f(-x)$

- <u>تبيان أن h دالة ثابتة على $\mathbb{R}$:</u>

الدالة h قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا،

$$h'(x)=f'(x)f(-x)+\left[-f'(-x)f(x)\right]=f(x)f(-x)-f(-x)f(x)=0$$

لاحظ انه لدينا : $f'=f$ (المعطيات)

بما أن من اجل x من $\mathbb{R}$: $h'(x)=0$ إذاً h داله ثابتة على $\mathbb{R}$.

- <u>استنتاج أنه من اجل كل x من $\mathbb{R}$، $f(x)f(-x)=1$:</u>

h داله ثابتة على $\mathbb{R}$ و $h(0)=f(0)\times f(0)=1$

و عليه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $h(x)=1$ أي $f(x)f(-x)=1$.

- <u>البرهان أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f(x)\neq 0$:</u>

نفرض أنه وجود a من $\mathbb{R}$ بحيث : $f(a)=0$ ومنه نجد: $f(a)f(-a)=0$

و هذا تناقض لكون أنه حسب السؤال السابق: $f(a)f(-a)=1$

الخلاصة: إذن من اجل كل x من $\mathbb{R}$: $f(x)\neq 0$.

- **إستنتاج أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f(x)>0$:**

f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ إذا فهي مستمرة على $\mathbb{R}$.

f مستمرة على $\mathbb{R}$ و لا تنعدم على $\mathbb{R}$ إذا فهي تحافظ على إشارتها و بما ان $f(0)=1$ و $1>0$ و إذا من اجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f(x)>0$

نتيجة: الدالة f موجبة تماما على $\mathbb{R}$.

3) نفرض أنه توجد دالة ثانية تحقق $g'=g$ و $g(0)=1$

بما ان الدالة f لا تنعدم على $\mathbb{R}$ ، نعتبر الدالة k المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ

$$k(x)=\frac{g(x)}{f(x)}$$

- **تبيان أن k دالة ثابتة على $\mathbb{R}$:**

k دالة قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ومنه من اجل كل x من $\mathbb{R}$:

$k'(x)=\frac{g'(x)f(x)-f'(x)g(x)}{f^2(x)}$ وبما ان $f'=f$ و $g'=g$ نجد:

$k'(x)=\frac{g(x)f(x)-f(x)g(x)}{f^2(x)}=0$ أي k دالة ثابتة على $\mathbb{R}$.

- **استنتاج أن $f=g$:**

k دالة ثابتة على $\mathbb{R}$ و $k(0)=\frac{g(0)}{f(0)}=1$ إذن من اجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $k(x)=1$

أي $\frac{g(x)}{f(x)}=1$ ومنه $g(x)=f(x)$.

الخلاصة: من اجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $g(x)=f(x)$ أي $f=g$.

4) **إثبات أن الدالة i المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $i(x)=\frac{f(x+y)}{f(x)}$ ثابتة :**

- باتباع نفس المنهجية السابقة نجد ان الدالة i ثابتة على $\mathbb{R}$.

- **إستنتاج أنه من اجل كل x من $\mathbb{R}$ ومن أجل y من $\mathbb{R}$ ، $f(x+y)=f(x)f(y)$:**

i ثابتة على $\mathbb{R}$ و $i(0)=\frac{f(0+y)}{f(0)}=f(y)$ إذن من اجل كل x من $\mathbb{R}$:

$i(x)=f(y)$ أي $\frac{f(x+y)}{f(x)}=f(y)$ ومنه $f(x+y)=f(x)f(y)$.

الخلاصة: من اجل كل x من $\mathbb{R}$ ومن أجل y من $\mathbb{R}$ ، $f(x+y)=f(x)f(y)$

- **إستنتاج أنه من اجل كل x من $\mathbb{R}$ ومن أجل y من $\mathbb{R}$ ، $f(x-y)=\frac{f(x)}{f(y)}$:**

من اجل كل x من $\mathbb{R}$ و y من $\mathbb{R}$ لدينا، $f(x-y)=f(x+(-y))=f(x)f(-y)$

و بما أن $f(y)f(-y)=1$ أي $f(-y)=\frac{1}{f(y)}$ (حسب النتيجة 3)

نجد: $f(x-y)=f(x)\frac{1}{f(y)}=\frac{f(x)}{f(y)}$.

	5) n عدد صحيح نسبي و j الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $j(x)=\dfrac{f(nx)}{[f(x)]^n}$ بنفس الأسلوب السابق نجد: $j'(x)=0$ أي أن j دالة ثابتة على $\mathbb{R}$. و بما أن $j(0)=\dfrac{f(0)}{[f(0)]^n}=1$ أي من اجل كل عدد حقيقي x : $j(x)=1$ ومنه نستنتج أن : $f(nx)=[f(x)]^n$.	
صياغة الكفاءة	**1/تعريف و مبرهنة:** توجد دالة وحيدة f تحقق الشرطين $f'=f$ و $f(0)=1$ تسمى الدالة الأسية (النيبيرية) و يرمز إليها بـ " exp " **نتائج:** من التعريف نجد $\exp(0)=1$ و $\exp'(x)=\exp(x)$ **2/خواص الدالة الأسية:** من أجل عددين حقيقيين y,x و $n\in\mathbb{Z}$ $1)\exp(x)>0$ $\quad 2)\exp(x+y)=\exp(x)\times\exp(y)$ $3)\exp(-x)=\dfrac{1}{\exp(x)}$ $\quad 4)\exp(x-y)=\dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$ $5)\exp(nx)=[\exp(x)]^n$ **3/العدد النيبيري e:** يسمى العدد $\exp(1)$ العدد النيبيري و يرمز له بـ e و يقدر $e=2,718281828$ **إصطلاحا :** من أجل كل عدد حقيقي x نضع : $\exp(x)=e^x$ و تقرأ e^x : "أسية x". **الخلاصة:** من أجل كل عددين حقيقيين y,x و n عدد صحيح: $e^0=1 \qquad e^{-x}=\dfrac{1}{e^x} \qquad (e^x)'=e^x \qquad e^{x-y}=\dfrac{e^x}{e^y}$ $e^x>0 \qquad e^{nx}=(e^x)^n \qquad e^{x+y}=e^x\times e^y$	
مرحلة التقويم و الاستثمار	**تطبيق1:** بسط العبارات التالية: $(e^x)^3e^{-2x} \qquad (e^x+e^{-x})^2-(e^x-e^{-x})^2 \qquad \dfrac{e^{3x}}{(e^{-x})^2e^x}$ **الحـــــــل:** • $(e^x)^3e^{2x}=e^{3x}\times e^{2x}=e^{3x+2x}=e^{5x}$ • $(e^x+e^{-x})^2-(e^x-e^{-x})^2=\left[(e^x)^2+2e^xe^{-x}+(e^{-x})^2\right]-\left[(e^x)^2-2e^xe^{-x}+(e^{-x})^2\right]$ $=(e^{2x}+2+e^{-2x})-(e^{2x}-2+e^{-2x})$ $=\cancel{e^{2x}}+2+\cancel{e^{-2x}}\cancel{-e^{2x}}+2\cancel{-e^{-2x}}$ $=4$ تطبيق رقم 02 و 03 صفحة102	

ملاحظات حول سير الحصة:..