هذا الدرس موجه لجميع الشعب

الكفائات المستهدفة مفهوم التقريب التالفي

الأنشطة المقترحة وطبيعتها	الإنجاز (سـير الحصة)	التعليمات والتوجيهات

الأنشطة المقترحة وطبيعتها

نشاط 01:

1- أنشئ بآلة بيانية التمثيل البياني (C) للدالة f المعرفة على R كما يلي : $f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$ والتمثيل البياني للمستقيم (Δ) الذي معادلته: $y=2x$.

2- ادرس قابلية الاشتقاق للدالة f عند العدد 0 . ماذا تستنتج ؟

3- ناقش بيانيا وضعية البيان (C) بالنسبة للمستقيم (Δ). تأكد من صحة النتائج حسابيا . ماذا تستنتج ؟

الإنجاز (سـير الحصة)

2.1.3 الكتابة التفاضلية

التفسير العددى :

2.1.3 التقريب التالفي

التقريب التالفي للدالة ويقصد به اعطاء دالة ما صيغة دالة تآالفية

ويتم تطبيقه خصوصا في الفيزياء والاقتصاد

و تقريب الاعداد هو جزء هام جدا في الرياضيات ومعناه إزالة عدد كبير من الأرقام وتحويلها إلى عدد صحيح أو عدد عشرى منتهى وهو أداة مفيده جدا في الحياة اليومية فبفضل التقريب استطعنا اختصار كمية هائلة من الأعداد العشرية الضخمة إلى عدد صحيح يتكون من رقم إلى 5 أو 6 أرقام وكذلك نستطيع من خلاله تقدير كمية من المال وتقريب الزمن والمسافات

بالمختصر المفيد التقريب التالفي هو تحويل دالة من صيغتها الاساسية الى صيغة تالفية من اجل قيم صغيرة

ومن فوائده هو رسم الدوال بمعرفة المشتقة فقط دون الرجوع للدالة الاصلية

تعريف

f دالة معرفة على مجال مفتوح I من $\mathbb{R}$

إذا قبلت f الاشتقاق عند x من I فإنه توجد دالة ε بحيث من أجل كل عدد حقيقي h حيث $x+h$ ينتمي إلى I لدينا : $f(x+h)=f(x)+hf'(x)+h\varepsilon(h)\quad avec \lim\limits_{0}\varepsilon=0$

من أجل h قريب من 0 نكتب عندئذ : $f(x+h)\approx f(x)+hf'(x)$

يسمى $f(x)+hf'(x)$ التقريب التآلفي لـ $f(x+h)$ من أجل h قريب من 0 المرفق بالدالة f

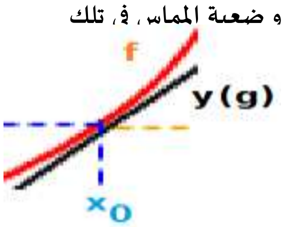
يعني انه

إذا قبلت الدالة f الاشتقاق عند x_0 فإن الدالة التآلفية : $x\mapsto f(x)(x-x_0)+f(x_0)$ هي تقريب تآلفي للدالة f بجوار x_0. أي أن المماس عند x_0 هو أحسن تقريب للدالة f عند x_0 .

توضيح

المقصود باحسن تقريب تالفي لدالة هو معادلة المماس يعني ان الدالة تاخذ وضعية المماس في تلك الحالة ومن اجل قيم صغيرة جدا عوضها في معادلة المماس g بدل الدالة f

لاحظ في الرسم المقابل الماخوذ من الشكل في الاسفل ان المنحنى بالاحمر والمماس بالاسود متقاربين



شرح بياني

بما أن الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال I إذن لدينا :

من أجل كل عدد حقيقي x من I

$$(1)\ldots\ f(x+h)=f(x)+hf'(x)+h\varepsilon(h)\qquad avec \lim\limits_{0}\varepsilon=0$$

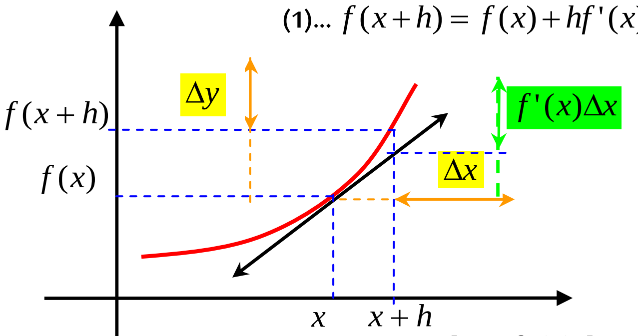
نضع : $\Delta x=(x+h)-x$

و $\Delta y=f(x+h)-f(x)$

(1) يكتب:

$$\Delta y=f'(x)\,\Delta x+\varepsilon(\Delta x)\Delta x$$

أين تقريب عندما يكون Δx قريب من 0 : $\Delta y\approx f'(x)\Delta x$



و منه يرمز لهذا التقارب بالكتابة النهائية : $dy=f'(x)dx$ و التي تسمى بالكتابة التفاضلية

التعليمات والتوجيهات

- التذكير بالنتائج المحصل عليها في السنة الثانية.
- ندرس أمثلة حول دوال من مثل: الدوال الناطقة (حاصل قسمة كثير حدود من الدرجة 2أو3 على كثير حدود من الدرجة 1أو2).
- الدوال الصماء $x\mapsto\sqrt{f(x)}$ ، حيث f دالة قابلة للاشتقاق الدوال المثلثية: $x\mapsto\cos(ax+b)$ ، $x\mapsto\sin(ax+b)$ ، $x\mapsto\tan(x)$.
- فيما يخص الدوال الصماء نتطرق إلى المماس الموازي لحامل محور التراتيب.
- يمكن الملاحظة أن كل دالة قابلة للاشتقاق على مجال هي دالة مستمرة على هذا المجال.

يستعمل هذا الترميز في العلوم الفيزيائية و بصفة عامة نكتب : $\frac{df}{dx}$ بدلا من f' و $\frac{d^2 f}{dx^2}$ بدلامن f'' و

هكذا $\frac{d^n f}{dx^n}$ بدلامن $f^{(n)}$

في الفيزياء

في الفيزياء العلاقة بين السرعة والتسارع

$$v(t_0+\Delta t)\approx f(t_0)+\Delta t . f'(t_0)$$

تطبيق

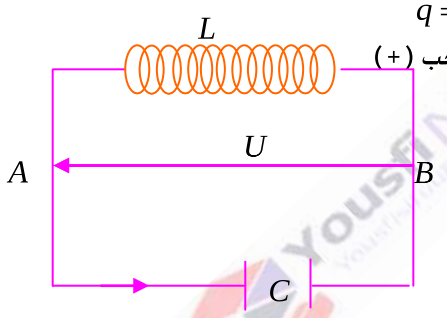
لتكن دارة كهربائية من الشكل : LC ، لدينا $q=CU$

حيث : q هي الشحنة المولد التي يأتي منها الاتجاه الموجب $(+)$

و أيضا :

$U=-L\frac{di}{dt}$ و $i=\frac{dq}{dt}$ ، حيث i هي شدة التيار

بين أن : $\frac{d^2q}{dt^2}+\frac{1}{LC}q=0$



تمرين: لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بِ $f(x)=x^2+2x+1$.

ليكن (C_f) رسمها البياني في المستوى المنسوب إلى معلم (O,I,J) .

- عين معادلة (T) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة A التي فاصلتها 0 .
- عين تقريبا تآلفيا للدالة f بجوار 0 .
- عين قيمة مقربة للعدد $(1.00004)^2$.

الحل: • الدالة f قابلة للاشتقاق عند كل نقطة x من $\mathbb{R}$ ، و $f'(x)=2x+2$ ،

إذن الدالة f قابلة للاشتقاق عند النقطة 0 و $\boxed{f'(0)=2}$ و بالتالي 2 هو معامل توجيه المماس (T) للمنحنى (C_f)

عند النقطة التي فاصلتها 0. لدينا $\boxed{f(0)=1}$ و منه معادلة للمماس (T) هي $y=f'(0)(x-0)+f(0)$

و نستنتج أن معادلة للمماس (T) هي $y=2x+1$.

• تقريب تآلفي لِ f بجوار 0 هو $y=f(0)+h\times f'(0)$ ومنه $y=2h+1$. او نكتب $f(x_0+h)=2h+1$ ويمكن القول ان الدالة $g:x\mapsto 2x+1$ هي أحسن تقريب تآلفي ل f .

• $(1.00004)^2=(1+4\times 10^{-5})^2$ و $f(x)=(1+x)^2$ و منه $f(x_0+h)=(1+x_0+h)^2$

نجد $h=0.00004$ قيمة مقربة للعدد $(1.00004)^2$ هي $y=2\left(4\times 10^{-5}\right)+1$ أي 1.00008

تمرين: $f:x\mapsto x^2$ الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$.

1.عين أحسن تقريب تآلفي للعدد $(2+h)^2$ عندما ينتهي h إلى 0

2. عين قيمة تقريبية لكل من الأعداد $(2,04)^2$ ؛ $(1,98)^2$ ؛ $(2,001)^2$.

الحل: أحسن تقريب تآلفي للعدد $(2+h)^2$ عندما ينتهي h إلى 0 الدالة تقبل الأشتقاق عند 2 و $f'(2)=4$ اذن

$$y=f(2)+f'(2)h=4+4h$$

عين قيمة تقريبية لكل من الأعداد: $(2,04)^2$. لدينا $2,04=2+0.04$ و $f(x)=(x)^2$ ومنه

القيمة المقربة ل $(2,04)^2$ هي $(2+0,04)^2$ أي $h=0.04$ ومنه $y=4+4(0.04)=4.16$

القيمة المقربة ل $(1,98)^2$ هي $(2-0,02)^2$ أي $h=-0.02$ ومنه $y=4+4(-0.02)=3.92$

- التذكير بالنتائج المحصل عليها في السنة

لماذا نستعمل التقريب التآلفي

التقريب التآلفي للدالة f من اجل x قريب من **0** هو $f\,(0+x)\simeq f\,(0)+xf\,'(0)$ و منه نتحصل على الجدول :

$f\,(x)$	$(1+x)^2$	$(1+x)^3$	$\sqrt{(1+x)}$	$\dfrac{1}{x+1}$	$\dfrac{1}{(x+1)^2}$	$\cos x$	$\sin x$
$f\,(x)$	$1+2x$	$1+3x$	$1+\frac{1}{2}x$	$1-x$	$1-2x$	1	x

لاحظ ان كل الدوال اخذت صيغة تالفية من الشكل $f\,(x)=ax+b$

كيفية تسهيل الحساب

من الجدول السابق $\dfrac{1}{x+1}=f(0.003)=\dfrac{1}{1+0.003}\simeq 1-0.003\simeq 0.997$

$$\frac{1}{x+1}=f(-0.02)=\frac{1}{1-0.02}\simeq 1-(-0.02)\simeq 1.02$$

$$(1+x)^3=(1+0.003)^3\simeq 1+3(0.003)=1.009$$

$$(1+x)^3=(1-0.02)^3\simeq 1+3(-0.02)=0.94$$

$$(1+x)^2=(1+0.001)^2\simeq 1+2(0.001)=1.002$$

$$(1+x)^2=(1-0.01)^2\simeq 1-2(0.01)=0.98$$

$$\sqrt{(1+x)}=\sqrt{1.004}\simeq 1+\frac{1}{2}(0.004)=1.002$$

$$\sqrt{(1+x)}=\sqrt{0.99}=\sqrt{1-0.01}\simeq 1+\frac{1}{2}(-0.01)=0.995$$

$$\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{1}{(1.01)^2}\simeq 1-0.04 \qquad \frac{1}{(x+1)^2}=\frac{1}{(0.99)^2}\simeq 1+0.02$$

2.1.3 طريقة اولر

تسمح طريقة أولر بإنشاء التمثيلات البيانية تقريبية لدالة f بمعرفة المشتقة $f\,'$ فقط و $y_0=f(x_0)$

كما ترتكز هذه الطريقة على التقريب التآلفي للدالة f من أجل h قريب من 0 نكتب عندئذ :

$$f(x_0+h)\approx f(x_0)+hf'(x_0)$$

خطوات الحساب و التعويض :

لانشاء يكفي أن نعلم النقط التالية : A_0 ، A_1 ، A_2 ،............ A_n حيث : $A_0(x_0;f(x_0))$

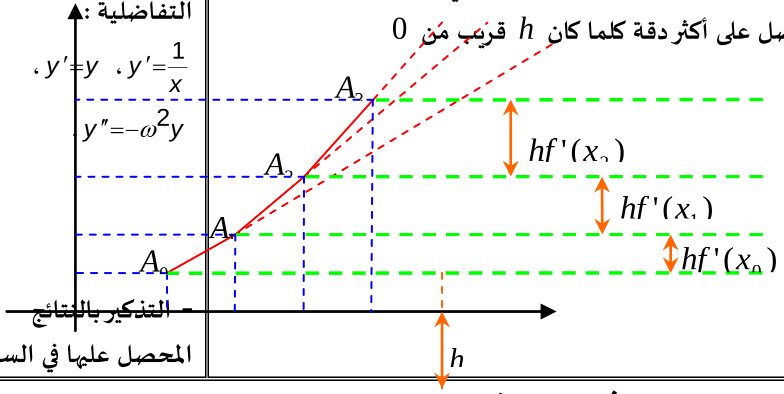
و $A_1(x_1;f(x_1))$ مع : $x_1=x_0+h$ و $y_1=f(x_0+h)$ و هي نقطة من المستقيم الذي معامل توجيهه $f'(x_0)$ و قريبة من المنحنى (C_f)

و $A_2(x_2;y_2)$ حيث : $x_2=x_1+h$ و $y_2=f(x_1)+hf'(x_1)$

....

و هكذا النقطة $A_n(x_n;y_n)$ حيث : $x_n=x_{n-1}+h$ و $y_n=f(x_{n-1})+hf'(x_{n-1})$

مع $n\geq 1$ بربط النقط A_0 ، A_1 ، A_2 .... A_n نحصل على تمثيل البياني للدالة f مرتبط بإختيار h الذي يسمى بالخطوة و نحصل على أكثر دقة كلما كان h قريب من 0



الثانية.

- ندرس أمثلة حول دوال من مثل: الدوال الناطقة (حاصل قسمة كثير حدود من الدرجة 2أو3 على كثير حدود من الدرجة 1أو2).
- الدوال الصماء $x\mapsto\sqrt{f(x)}$، حيث f دالة قابلة للاشتقاق الدوال المثلثية: $x\mapsto\cos(ax+b)$، $x\mapsto\sin(ax+b)$، $x\mapsto\tan(x)$.
- فيما يخص الدوال الصماء نتطرق إلى المماس الموازي لحامل محور التراتيب.
- يمكن الملاحظة أن كل دالة قابلة للاشتقاق على مجال هي دالة مستمرة على هذا المجال.

نشرح الكتابات $\dfrac{df}{dx}$، $\dfrac{d^2f}{dx^2}$ (المستعملة في الفيزياء) والكتابة $dy=f'(x).dx$.

- يمكن توظيف العلاقة $\Delta y\approx f'(x).\Delta x$ باستعمال مجدول لتقريب دالة تكون حلا لأحدى المعادلات التفاضلية: $y'=\dfrac{1}{x}$ ، $y'=y$ ، $y''=-\omega^2 y$

- التذكير بالنتائج المحصل عليها في السنة

*** لنعتبرالدالة f المعرفة بـ : $f(0)=1$ و $f'(x)=f(x)$

(C_f) تمثيلها البياني في معلم $(o,\vec{i},\vec{j})$

1) أنشئ المنحنى التقريبي (C_f) باستعمال طريقة أولر على المجال $[0;3]$ بخطوة $h=0,1$

2) أحسب القيمة التقريبية لـ $f(1)$

*** لنعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0;5]$ بـ : $g(1)=0$ و $g'(x)=\frac{1}{x}$

1) أنشئ المنحنى التقريبي (C_g) باستعمال طريقة أولر

2) عين القيمة التقريبية لـ $(g\circ f)(1)$

الحل

لدينا : $f(0)=1$ و $f'(x)=f(x)$

ونعلم أن : $f(x_0+h)\approx f(x_0)+hf'(x_0)$ و منه نجد : $y_1=f(x_0)+hf(x_0)$

أي : $y_1=y_0(h+1)$

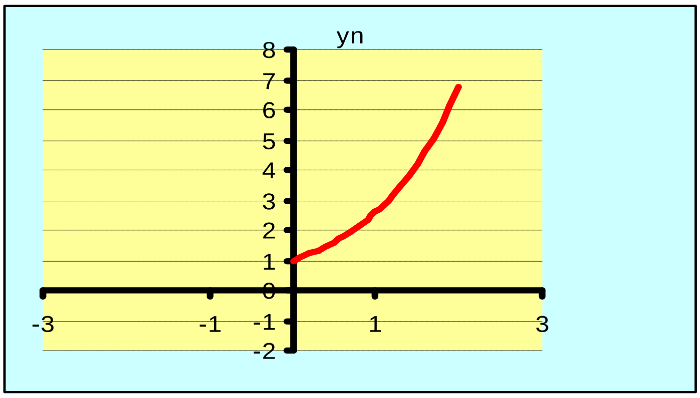
و $y_2=y_1(h+1)$

....

ومنه $y_n=y_{n-1}(h+1)$

إذن : الفواصل متتالية النقط $M_n(x_n;y_n)$ تشكل حدود متتالية حسابية أساسها $r=h$

و تراتيبها تشكل حدود متتالية هندسية أساسها $q=h+1$



h=	0,1										
xn	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
yn	1,00	1,1	1,21	1,33	1,46	1,61	1,77	1,95	2,14	2,36	2,59
xn	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2	
yn	2,85	3,14	3,45	3,8	4,18	4,59	5,05	5,56	6,12	6,73	

القيمة التقريبية لـ : $f(1)$ $f(1)\approx 2,6$

التفسير الفزيائي :

إذا كان قانون الحركة : $x\mapsto x(t)$ فإن : $x'(t_0)$ هو السرعة اللحظية في اللحظة t_o. إذا كان $x\mapsto v(t)$ هو قانون حركة فإن : $v'(t_0)$ هو التسارع في اللحظة t_o .

م

الثانية.

- ندرس أمثلة حول دوال من مثل: الدوال الناطقة (حاصل قسمة كثير حدود من الدرجة 2أو 3 على كثير حدود من الدرجة 1أو2).

- الدوال الصماء $x\mapsto\sqrt{f(x)}$ ، حيث f دالة قابلة للاشتقاق الدوال المثلثية:

$x\mapsto\cos(ax+b)$ ،

$x\mapsto\sin(ax+b)$ ،

$x\mapsto\tan(x)$.

- فيما يخص الدوال الصماء نتطرق إلى المماس الموازي لحامل محور التراتيب.

- يمكن الملاحظة أن كل دالة قابلة للاشتقاق على مجال هي دالة مستمرة على هذا المجال.

نشرح الكتابات $\frac{df}{dx}$ ، $\frac{d^2f}{dx^2}$ (المستعملة في الفيزياء) والكتابة $dy=f'(x).dx$.

- يمكن توظيف العلاقة $\Delta y\approx f'(x).\Delta x$ باستعمال مجدول لتقريب دالة تكون حلا لأحدى المعادلات التفاضلية :

$y'=\frac{1}{x}$ ، $y'=y$ ،

$y''=-\omega^2 y$.

2.3 قابلية الاشتقاق للدالة عند عدد :

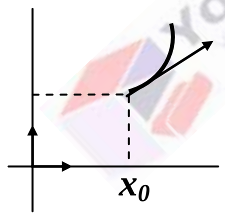
1.2.3 قابلية الإشتقاق على اليمين

تعريف 2

f دالة عددية معرفة على الأقل ، على مجال من الشكل
$[x_0 ; x_0+\alpha[$ حيث x_0 α عددان حقيقيان مع $\alpha > 0$ نقول عن الدالة f أنها تقبل
الاشتقاق عند x_0 من اليمين إذا وفق إذا كانت : $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ >}} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = l$
حيث ℓ_1 عدد حقيقي ويسمى العدد المشتق للدالة f عند x_0 من اليمين

التفسير البياني

* إذا قبلت الدالة f الاشتقاق في x_0 من اليمين فإن تمثيلها البياني يقبل
نصف المماس من اليمين و هو
معرف كما يلي :
من أجل $: x \geq x_0 : \quad y = \ell_1 (x - x_0) + f(x_0)$



مثال 1: الدالة f : $x \mapsto x\sqrt{x}$ قابلية للاشتقاق في 0 على اليمين لأنها معرفة على $[0 ; +\infty[$ و

$$\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ >}} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ >}} \frac{h\sqrt{h}}{h} = \lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ >}} \sqrt{h} = 0$$

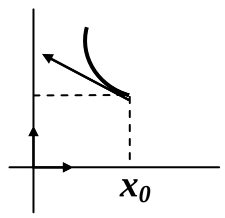
2.2.3 قابلية الإشتقاق على اليسار

تعريف 3

f دالة عددية معرفة على الأقل ، على مجال من الشكل
$]x_0 - \alpha ; x_0]$ حيث x_0 α عددان حقيقيان مع $\alpha > 0$ نقول عن الدالة f أنها تقبل
الاشتقاق عن x_0 من اليسار إذا وافق إذا كانت : $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ <}} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = l_2$
حيث ℓ_2 عدد حقيقي ويسمى العدد المشتق للدالة f عند x_0 من اليسار

التفسير البياني

* إذا قبلت دالة f الاشتقاق في x_0 من اليسار فإن تمثيلها البياني يقبل
نصف المماس من اليسار و هو
معرف كما يلي :
من أجل $y = \ell_1 (x - x_0) + f(x_0) \quad : x \leq x_0$

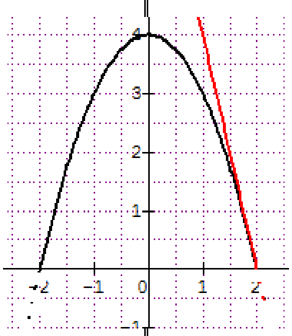


مثال

الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ ب $f(x) = |x^2 - 4|$ دراسة الاشتقاقية عند العدد 2

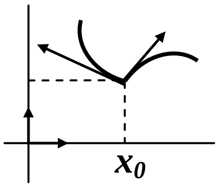
لدينا $\begin{cases} f(x) = x^2 - 4 ....x \in]-\infty;-2] \cup [2;+\infty[\\ f(x) = -x^2 + 4 ....x \in [-2;2] \end{cases}$

$$\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} \frac{-x^2+4}{x-2} = \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} \frac{-(x^2-4)}{x-2} = \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} -(x+2) = -4$$



الدالة تقبل الاشتقاق على يسار 2 وهي تقبل نصف مماس على اليسار معادلته
$$y = -4(x-2) + f(2) = -4x + 8$$

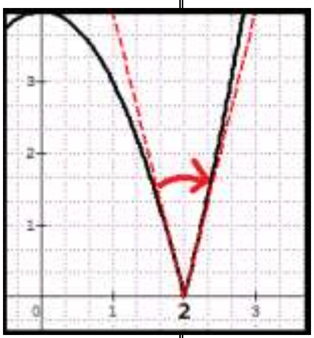
3.2.3 نقطة زاوية



* إذا كان العددان المشتقان ℓ_1 و ℓ_2 مختلفان فإن النقطة ذات الفاصلة x_0 تدعى نقطة زاوية.

مثال

الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ ب $f(x)=|x^2-4|$ دراسة الاشتقاقية عند العدد 2



لدينا
$$\begin{cases} f(x)=x^2-4.......x\in]-\infty;-2]\cup[2;+\infty[\\ f(x)=-x^2+4.......x\in[-2;2] \end{cases}$$

$$\lim_{\substack{x\to 2\\<}}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{\substack{x\to 2\\<}}\frac{-x^2+4}{x-2}=\lim_{\substack{x\to 2\\<}}\frac{-(x^2-4)}{x-2}=\lim_{\substack{x\to 2\\<}}-(x+2)=-4$$

الدالة تقبل الاشتقاق على يسار 2 وعددها المشتق 4-

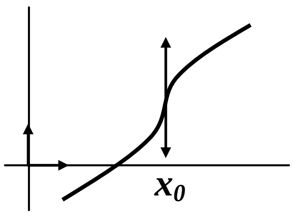
$$\lim_{\substack{x\to 2\\>}}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{\substack{x\to 2\\>}}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{\substack{x\to 2\\>}}\frac{(x^2-4)}{x-2}=\lim_{\substack{x\to 2\\>}}(x+2)=4$$

الدالة تقبل الاشتقاق على يمين 2 وعددها المشتق 4-

بما ان العدد المشتق على اليمين يختلف عن اليسار فالدالة لا تقبل الاشتقاق عند 2 وتقبل نقطة زاوية

4.2.3 مماس موازي لمحور التراتيب

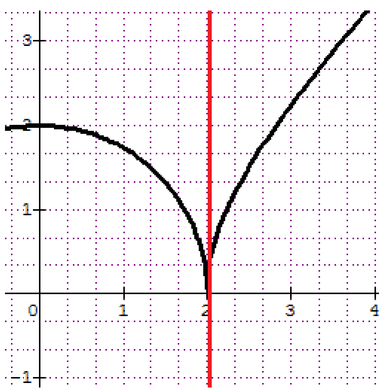
إذا كانت : $\lim_{h\to 0}\left|\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right|=+\infty$ فإن التمثيل البياني للدالة f يقبل مماسا عند النقطة ذات الفاصلة x_0 يوازي حامل محور الترتيب



مثال

الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ ب $f(x)=\sqrt{|x^2-4|}$ دراسة الاشتقاقية عند العدد 2

لدينا
$$\begin{cases} f(x)=\sqrt{x^2-4}.......x\in]-\infty;-2]\cup[2;+\infty[\\ f(x)=\sqrt{-x^2+4}.......x\in[-2;2] \end{cases}$$



دراسة الاشتقاق على اليسار نعلم ان $f'(x)=\frac{-2x}{2\sqrt{-x^2+4}}$

ومنه $\lim_{\substack{x\to 2\\<}}f'(x)=\lim_{\substack{x\to 2\\<}}\frac{-2x}{2\sqrt{-x^2+4}}=\lim_{\substack{y\to 0\\<}}\frac{-4}{y}=+\infty$

الدالة لا تقبل الاشتقاق على يسار 2

دراسة الاشتقاق على اليمين نعلم ان $f'(x)=\frac{2x}{2\sqrt{x^2-4}}$

ومنه $\lim_{\substack{x\to 2\\>}}f'(x)=\lim_{\substack{x\to 2\\>}}\frac{2x}{2\sqrt{x^2-4}}=\lim_{\substack{y\to 0\\>}}\frac{4}{y}=+\infty$

الدالة لا تقبل الاشتقاق على يمين 2

منحناها يقبل مماس موازٍ لمحور التراتيب عند الفاصلة 2

مثال :

الدالة f : $x \mapsto \sqrt{4-x}$ غير قابلية للاشتقاق في 4 على اليسار لأن :

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ <}} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ <}} \frac{\sqrt{-h}}{h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ <}} \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{-h}\cdot\sqrt{-h}} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ <}} \frac{1}{-\sqrt{-h}} = -\infty$$

مثال 3: الدالة f : $x \mapsto |x|$ قابلية الاشتقاق في 0 على اليمين لأنها معرفة على $\mathbb{R}$ و

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ >}} (|h| - |0|)\frac{1}{h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ >}} \frac{h}{h} = 1$$ وقابلية الاشتقاق في 0 على اليسار لأن :

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ <}} \frac{|h|-|0|}{h} == \lim_{\substack{h \to 0 \\ <}} \frac{-h}{h} = -1$$ لكن الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند 0 .

نتيجة: تكون الدالة f قابلة للاشتقاق في x_0 إذا وافقط إذا قبلت هذه الدالة نفس العدد المشتق من اليمين و من اليسار في x_0 .

2.3: الاستمرارية وقابلية الاشتقاق

مبرهنة

إذا كانت f قابلة للاشتقاق من أجل x_0 تكون هذه الدالة مستمرة عند x_0 .

ملاحظة : عكس هذه النظرية غير صحيح . فمثلا الدالة $x \mapsto x$ متسمرة عنده و لكنها غير قابلة للاشتقاق عند 0 كما سبق.

مثال تطبيقي:

الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ ب $f(x) = |x^2 - 4|$

1. بين أن f مستمرة عند 2
2. أكتب f بدون رمز القيمة المطلقة.
3. أدرس قابلية اشتقاق الدالة fعند 2.

الحل

الدالة مستمرة عند ال 2 لانها دالة كثير حدود

الكتابة دون رمز القيمة المطلقة

$$\begin{cases} f(x) = x^2 - 4 \ldots\ldots x \in]-\infty;-2] \cup [2;+\infty[\\ f(x) = -x^2 + 4 \ldots\ldots x \in [-2;2] \end{cases}$$

دراسة الاشتقاق:

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ <}} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{\substack{x \to 2 \\ <}} \frac{-x^2+4}{x-2} = \lim_{\substack{x \to 2 \\ <}} \frac{-(x^2-4)}{x-2} = \lim_{\substack{x \to 2 \\ <}} -(x+2) = -4$$

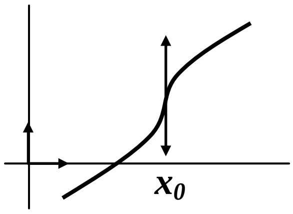
الدالة تقبل الاشتقاق على يسار 2 وعددها المشتق 4-

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} \frac{(x^2-4)}{x-2} = \lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} (x+2) = 4$$

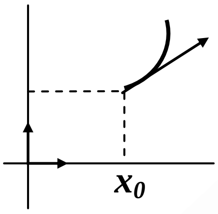
الدالة تقبل الاشتقاق على يمين 2 وعددها المشتق 4-

اذن الدالة لا تقبل الاشتقاق عند 2 لان العدد المشتق من اليمين يختلف عليه من اليسار

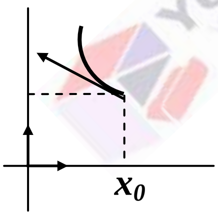
حالات خاصة : * إذا كانت : $\lim_{h \to 0} \left| \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \right| = +\infty$ فإن التمثيل البياني للدالة f يقبل مماسا عند النقطة ذات الفاصلة x_0 يوازي حامل محور الترتيب



* إذا قبلت الدالة f الاشتقاق في x_0 من اليمين فإن تمثيلها البياني يقبل نصف المماس من اليمين و هو معرف كما يلي :
من أجل $x \geq x_0$: $y - f(x_0) = \ell_1 (x - x_0)$

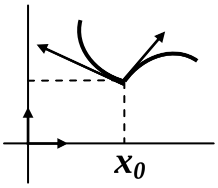


* إذا قبلت دالة f الاشتقاق في x_0 من اليسار فإن تمثيلها البياني يقبل نصف المماس من اليسار و هو معرف كما يلي :
من أجل $x \leq x_0$: $y - f(x_0) = \ell_1 (x - x_0)$



حيث ℓ_2 هو العدد المشتق للدالة f عند x_0 من اليسار.

* إذا كان العددان المشتقان ℓ_1 و ℓ_2 مختلفان فإن النقطة ذات الفاصلة x_0 تدعى نقطة زاوية.



3.4 نقطة الانعطاف

1.3 . مبرهنة

الدالة f المعرفة على مجال مفتوح يشمل العدد x_0 وقابلة للاشتقاق عند هاته النقطة المستقيم (Δ) مماس المنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة $A(x_0;f(x_0))$ المنحني (C_f) يخترق مماسه عند النقطة A. تسمى هذه النقطة. نقطة انعطاف للمنحني (C_f) وللحصول عليها ندرس الوضعية

ملاحظات

f دالة عددية معرفة على D_f وقابلة للأشتقاق مرتين على الأقل على D_f.
المنحني الممثل للدالة f يقبل نقطة انعطاف فاصلتها x_0 اذا وفقط اذا كان.
إذا انعدمت $f''(x)$ مغيرة إشارتها عند قيمة x_0 فإن المنحني الممثل للدالة f يقبل نقطة انعطاف $A(x_0;f(x_0))$.