نهائي رياضيات وعلوم

2016 الدالة الأسية

الدرس الرابع

الكفاءة المستهدفة

- توظيف خواص الدالة الأسية النيبيرية.
- ـ حل مشكلات بتوظيف الدوال الآسية .
- ـ معرفة وتفسير النهايات : $\lim_{x \to +\infty} e^x / x = +\infty$, $\lim_{x \to -\infty} x e^x = 0$.
- ـ تعرف الدالة الأسية كحل خاص للمعادلة التفاضلية y = `y التي تحقق (0) y =1 .
- نبدأ بإنشاء حل تقريبي لهذه المعادلة باستخدام مجدول(بتطبيق طريقة أولر)ثم بعدها نقبل بوجود هذا الحل.

المكتسبات القبلية

- حساب النهايات عند اطراف مجموعة التعريف لدوال مالوفة
- استعمال مبرهنات وتعاريف
- استعمال المشتقات . طريقة اولر .تعريف الاشتقاق
- الدوال العددية

الاستاذ YousfiMath الدالة الأسية يوسفي عبد الرحمن

ضف لمعلوماتك اللوغاريتم مشتق من اسم الخوارزمي *Algoritmi* *الاسم اللاتيني . دالة الاس النبري*

لُوغارِيتْم (اسم) : عَدَد لِأَسَاس مَا هُو الأُسّ الَّذِي يُرْفَع إِلَيه الأَسَاس لِيَنْتُج ذَلِك الْعَدَد مثلا 125 ناتجة عن الاس 3 للعدد 5

النيبري هو الثابت في القيمة يكون غالبا واضح في معظم العمليات مثل العدد باي ....الخ

ســـــــــــــــير الدرس	التوقيت
نشاط 1: طريقة اولر (تطبيقات) 2:الدالة الاسية تعاريف وخواص 3: الدوال الاسية 4: الدوال الاسية عمليات 5: دراسة الدالة الاسية 6:دراسة الدالة $\exp \circ u$	

وثائق التحضير	الوسائل البيداغوجية	نقد ذاتي
• دليل الأستاذ • الكتاب المدرسي • المنهاج • الهباج في الرياضيات • مذكرات شايبي امين	• السبورة •	

المؤسسة:	المستوى: الثالثة رياضيات
السنة الدراسية:	ميدان التعلم: تحليل
التاريخ:	الوحدة التعلمية: الدالة الأسية
توقيت الحصة :	موضوع الحصة : الدالة الاسية طريقة اولر وتطبيقات تمهيدية (معادلة نفاضلية)

المكتسبات المستهدفة: التعرف على خصائص الدالة الاسية دراسة المعادلة التفاضلية ذات الخصائص $f(0)=1$ و $f'(x)=f(x)$

الأنشطة المقترحة وطبيعتها	الإنجاز (سير الحصة)	التعليمات والتوجيهات

نشاط 01:

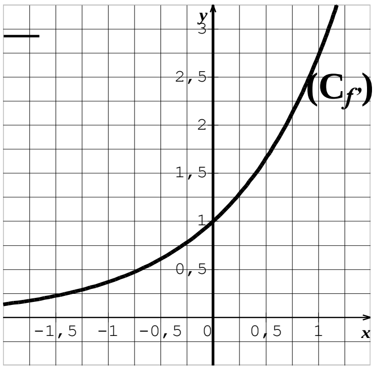
النشاط : ص 76 رقم01

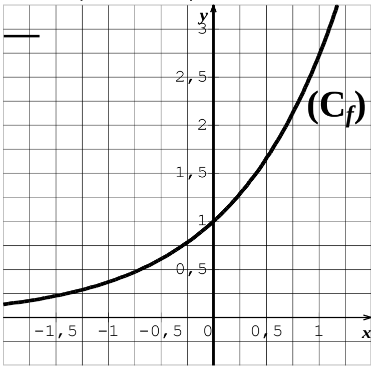
تذكير الدالة ثابتة على IR اذا كانت مشتقتها الأولى معدومة على IR

** 45دقيقة **

1.4 نشاط

إليك التمثيلان البيانيان (C_f) و $(C_{f'})$ لدالة f و دالتها المشتقة f' في معلمين مختلفين .





1- عين مجموعة تعريف كل من الدالتين f و f' .

2- أحسب كل من $f(0)$ و $f'(0)$.

3- أدرس إشارة كل من f و f' ثم اتجاه تغير كل منها .

4- عين جدول تغيرات كل من الدالتين f و f' .

5- ما هو تخمينك حول الدالتين f و f' .

6- نفرض أن $f=f'$ احسب f''' .

الحل: 1)- الدالتان f و f' معرفتان على $\mathbb{R}$

2)- $f(0)=1$ ، $f'(0)=1$

3)- دراسة إشارة كل من f و f' :

إن البيانين (C_f) و $(C_{f'})$ يقعان فوق محور الفواصل و عليه فمن أجل كل عدد حقيقي x فإن :

$f'(x)\succ 0$ و $f(x)\succ 0$ و عليه f و f' متزايدتان على $\mathbb{R}$

4)- تعيين جدول التغيرات :

x	$-\infty$ $+\infty$
$f''(x)$	+
$f(x)$	↗

x	$-\infty$ $+\infty$
$f'(x)$	+
$f(x)$	↗

5)- المخمنة حول f و f' :

نلاحظ أن : $f(0)=f'(0)=1$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} f'(x)=0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} f'(x)=+\infty$$

و نقول أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $f(x)=f'(x)$

6)- اذا فرضنا أن $f=f'$ فإن :

ومنه $f'''=f'=f$ إذن $f'''=f''=f$: $f'''=f$

النشاط مهم لمعرفة كيفية تمثيل منحنى الدالة وتمييزه

- تعرف الدالة الأسية كحل خاص للمعادلة التفاضلية $y'=y$ التي تحقق $y(0)=1$.

- نبدأ بإنشاء حل تقريبي لهذه المعادلة باستخدام مجدول (بتطبيق طريقة أولر) ثم بعدها نقبل بوجود هذا الحل.

- نقدم هذه الدالة في مرحلة مبكرة من السنة الدراسية قصد توظيفها في العلوم الفيزيائية.

- نستنتج من التعريف خواص الدالة الأسية. $\exp(x)>0$ ، $\exp(x+y)=\exp(x)\times\exp(y)$. الترميز e^x ، النهايات والمنحني الممثل لها.

- نبين من أجل كل عدد حقيقي a موجب تماما، أنّ المعادلة $e^x=a$ تقبل حلا وحيدا نرمز له بالرمز $\ln a$ ، يمكن القول حينئذ أن الدالة $\ln$ هي الدالة العكسية للدالة الأسية. لكن لا تعطى أي دراسة تفصيلية حول الدالة العكسية.

- تستنتج الخواص

تمرين مهم يساعد على البراهين في الدرس

طريقة اولر

مثال 1 لنعتبر الدالة f المعرفة بـ : $f(0)=1$ و $f'(x)=f(x)$

(C_f) تمثيلها البياني في معلم $(o,\vec{i},\vec{j})$

1) أنشئ المنحنى التقريبي (C_f) باستعمال طريقة أولر على المجال $[0;3]$ بخطوة $h=0{,}1$

2) أحسب القيمة التقريبية لـ $f(1)$

لنعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0;5]$ بـ : $g(1)=0$ و $g'(x)=\dfrac{1}{x}$

1) أنشئ المنحنى التقريبي (C_g) باستعمال طريقة أولر

2) عين القيمة التقريبية لـ $(g\circ f)(1)$

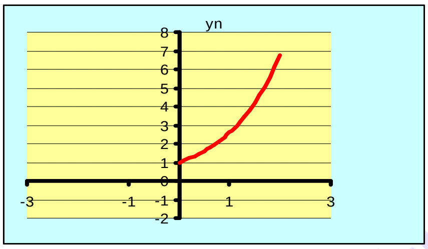
الحل لدينا : $f(0)=1$ و $f'(x)=f(x)$

ونعلم أن : $f(x_0+h)\approx f(x_0)+hf'(x_0)$ و منه نجد : $y_1=f(x_0)+hf(x_0)$

أي : $y_1=y_0(h+1)$ و $y_2=y_1(h+1)$ ومنه $y_n=y_{n-1}(h+1)$

إذن : الفواصل متتالية النقط $M_n(x_n;y_n)$ تشكل حدود متتالية حسابية أساسها $r=h$

و تراتيبها تشكل حدود متتالية هندسية أساسها $q=h+1$



h=	0,1										
xn	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
yn	1,00	1,1	1,21	1,33	1,46	1,61	1,77	1,95	2,14	2,36	2,59
xn	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2	
yn	2,85	3,14	3,45	3,8	4,18	4,59	5,05	5,56	6,12	6,73	

ابراز اهمية التقريب التالفي وكذلك معرفة خصائص الدالة الاسية

القيمة التقريبية لـ : $f(1)$ $f(1)\approx 2{,}6$

خواص الدالة f

1. لنعتبر الدالة f المعرفة على : $\mathbb{R}$ بـ: $h(x)=f(x)\times f(-x)$

(1) بين أن الدالة h ثابتة على : $\mathbb{R}$ علما ان : $f(x)\times f(-x)=1$

(2) برهن عكسيا انه من اجل كل x من $\mathbb{R}$: $f(x)\neq 0$

2. نفرض انه توجد دالة ثانية g تحقق $g`=g$ و $g(0)=1$ بما ان f لا تنعدم على $\mathbb{R}$

نعتبر الدالة k المعرفة على $\mathbb{R}$ ب $k(x)=g(x)/f(x)$

1) بين أن الدالة k ثابتة على : $\mathbb{R}$

2) استنتج انه من اجل كل x من $\mathbb{R}$: $g(x)=f(x)$

3. ليكن y عدد حقيقي ثابت نعتبر الدالة l المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $l(x)=f(x+y)/f(x)$

1) بين أن الدالة l ثابتة على : $\mathbb{R}$ و انه من اجل كل x من $\mathbb{R}$: $l(x)=f(y)$

2) استنتج انه من اجل كل x من $\mathbb{R}$ و انه من اجل كل y من $\mathbb{R}$:

$f(x+y)=f(y)\times f(x)$

3) استنتج انه من اجل كل x من $\mathbb{R}$ و انه من اجل كل y من $\mathbb{R}$:

$f(x-y)=f(x)/f(y)$

الجبرية والتحليلية للدالة اللوغاريتمية من خواص الدالة ln الأسية exp.

- تتم الإشارة إلى أن المنحنين الممثلين للدالتين ln و exp متناظرين بالنسبة للمنصف الأول في المعلم المتعامد والمتجانس وتبرير ذلك.

- توظف خواص الدوال اللوغاريتمية والأسية لحل معادلات ومتراجحات.

- يعطي تعريف دالة اللوغاريتم العشري (التي نرمز إلها بالرمز log) ويشار إلى أهمية تطبيقاتها في المواد الأخرى.

4. ليكن n عدد ا صحيحا نسبيا نعتبر الدالة φ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $\varphi(x)=f(nx)/[f(x)]^n$

1) عين الدالة المشتقة للدالة φ

2) استنتج انه من اجل كل x من $\mathbb{R}$: $f(nx)=[f(x)]^n$

الحل

a) لنعتبرالدالة f المعرفة على : $\mathbb{R}$ ب: $h(x)=f(x)\times f(-x)$

(1 h ثابتة على : $\mathbb{R}$ يعني ان : $h`(x)=0$ ومنه

ولدينا $h'(x)=f(x)'\times f(-x)+f(x)\times f'(-x)$

مشتق مركب دالتين $(f(-x))'=(-x)'f'(-x)$

$h'(x)=f(x)'\times f(-x)-f(x)\times f'(-x)=0$

اذن $h`(x)=0$ ومنه h ثابتة على : $\mathbb{R}$

h ثابتة على : $\mathbb{R}$ اي $h(0)=f(0)\times f(-0)=1$ ومنه $h(x)=f(x)\times f(-x)=1$

(2 البرهان عكسيا انه من اجل كل x من $\mathbb{R}$: $f(x)\neq 0$

نعلم ان $f(x)\times f(-x)=1$ و منه $f(x)\times f(-x)\succ 0$ يعني ان $f(x)\neq 0$

b) نفرض انه توجد دالة ثانية g تحقق $g`=g$ و $g(0)=1$ بما ان f لا تنعدم على $\mathbb{R}$

نعتبر الدالة k المعرفة على $\mathbb{R}$ ب $k(x)=g(x)/f(x)$

(1 الدالة k ثابتة على : $\mathbb{R}$ يعني ان $k'(x)=0$

$k(0)=g(0)/f(0)=1$ ومنه $k(x)=g(x)/f(x)=1$ ومنه k ثابتة على $\mathbb{R}$

$k'(x)=g(x)[f(x)-f'(x)]/[f(x)]^2$ بوضع $f'(x)=f(x)$

الشرط الواجب تحقيقه لان $f(x)\neq 0$ ومنه k ثابتة على $\mathbb{R}$

(2 استنتاج انه من اجل كل x من $\mathbb{R}$: $g(x)=f(x)$

بما ان k ثابتة على : $\mathbb{R}$ حتى يتحقق $g(x)=f(x)$ يجب ان يكون $k(x)=1$

ومنه $g(x)=f(x)$

c) ليكن y عدد حقيقي كيفي ثابت. نعتبر الدالة i المعرفة على $\mathbb{R}$ بِ $i(x)=\dfrac{f(x+y)}{f(x)}$

(1 بين أن i دالة ثابتة على $\mathbb{R}$ و أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $i(x)=f(y)$.

$i'(x)=[f'(x+y)f(x)-f'(x)f(x+y)]/[f(x)]^2$

ومنه $i'(0)=[f'(y)-f(y)]/[f(0)]^2=0$ و $i(0)=\dfrac{f(y)}{f(0)}=f(y)$

ومنه $i(x)=f(y)$

(2 اثبات ان $f(x+y)=f(x)f(y)$

لدينا $i(x)=\dfrac{f(x+y)}{f(x)}$ و $i(x)=f(y)$ ومنه $f(x+y)=f(x)f(y)$

اثبات ان $f(x-y)=\dfrac{f(x)}{f(y)}$

لدينا $f(x-y)=f(x+(-y))=f(x)f(-y)$ بما ان

$f(y)\times f(-y)=1...donc...f(-y)=1/f(y)$ ومنه $f(x-y)=\dfrac{f(x)}{f(y)}$

-2) نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بِ $h(x)=f(x)f(-x)$

اثبات أن h دالة ثابتة على $\mathbb{R}$.

لدينا : من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $h'(x)=f'(x)f(-x)-f(x)f'(-x)$

$$h'(x)=f(x)f(-x)-f(x)f(-x)$$

$h'(x)=0$ والدالة h ثابتة على R

استنتاج أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f(x)f(-x)=1 \quad (3)$

h دالة ثابتة علي R ومنه يوجد عدد حقيقي a بحيث : $h(x)=f(x)f(-x)=a$ ولدينا

$h(0)=f(0)f(-0)=1$ ومنه a =1

أي ان $f(x)f(-x)=1$

برهان بالخلف أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$. $f(x)\neq 0 \quad (4)$

نفرض انه يوجد عدد حقيقي x يحقق f(x) = 0 ومنه $0.f(-x)=1$

أي أن $0=1$ وهذا تناقض ينتج أن $f(x)\neq 0$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$.

ومنه ينتج $f(-x)=\dfrac{1}{f(x)}$

3) نفرض أنه توجد دالة ثانية g تحقق $g'=g$ و $g(0)=1$. بما أن الدالة f لا تنعدم على $\mathbb{R}$،

نعتبر الدالة k المعرفة على $\mathbb{R}$ بِ $k(x)=\dfrac{g(x)}{f(x)}$.

لنبين أن k دالة ثابتة على $\mathbb{R}$.

لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $k'(x)=\dfrac{g'(x).f(x)-g(x).f'(x)}{(f(x))^2}$

$$k'(x)=\frac{g(x).f(x)-g(x).f(x)}{(f(x))^2}=0$$

والدالة k ثابتة علي R

استنتاج أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $g(x)=f(x)$.

الدالة k ثابتة علي R ومنه يوجد عدد حقيقي حيث k(x) = a أي $\dfrac{g(x)}{f(x)}=a$

لكن $\dfrac{g(0)}{f(0)}=1$ ومنه a = 1 ينتج ان f(x) =g(x) أي ان الدالة f وحيدة

-4) ليكن y عدد حقيقي كيفي ثابت. نعتبر الدالة i المعرفة على $\mathbb{R}$ بِ $i(x)=\dfrac{f(x+y)}{f(x)}$

لنبين أن i دالة ثابتة على $\mathbb{R}$ و أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $i(x)=f(y)$.

لدينا: $i'(x)=\dfrac{f'(x+y)f(x)-f'(x)f(x+y)}{f^2(x)}$

$i'(x)=\dfrac{f(x)(f'(x+y)-f(x+y))}{f^2(x)}$ لان $i'(x)=\dfrac{f(x)(f(x+y)-f(x+y))}{f^2(x)}$

$i'(x)=0$ والدالة i ثابتة على R

ومنه يوجد عدد حقيقي a حيث $i(x)=a$

ولدينا : $\dfrac{f(0+y)}{f(0)}=a$ أي أن $i(0)=$ أي أن $f(y)=a$ أي أن $i(x)=f(y)$

ومنه $\dfrac{f(x+y)}{f(x)}=f(y)$ ينتج أن: $f(x+y)=f(x)f(y)$

استنتاج أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ و من أجل كل y من $\mathbb{R}$. $f(x-y)=f(x)/f(y)$

لدينا : $f(x-y)=f(x+(-y))$ ومنه $f(x-y)=f(x)f(-y)$

ينتج أن : $f(x-y)=\dfrac{f(x)}{f(y)}$ لأن $f(-y)=\dfrac{1}{f(y)}$

5) ليكن n عددا صحيحا نسبيا و لتكن j الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $j(x)=\dfrac{f(nx)}{[f(x)]^n}$

عين الدالة المشتقة للدالة j.

استنتج أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f(nx)=[f(x)]^n$

لدينا : $j'(x)=\dfrac{nf'(nx)[f(x)]^n-n[f(x)]^{n-1}f'(x)f(nx)}{[f(x)]^{2n}}$

$$j'(x)=\dfrac{nf'(nx)[f(x)]^n-n[f(x)]^{n-1}f(x)f(nx)}{[f(x)]^{2n}}$$

لأن $f=f'$ $j'(x)=\dfrac{n[f(x)]^n(f'(nx)-f(nx))}{[f(x)]^{2n}}$ اي $j'(x)=\dfrac{n(f'(nx)-f(nx))}{[f(x)]^n}$

ومن $f(nx)=f'(nx)$ نجد ان $j'(x)=0$

والدالة ثابتة j على R أي انه يوجد عدد حقيقي a حيث $j(x)=a$

ومنه $a=\dfrac{f(0)}{f(o)^n}=j(0)$ ومنه a = 1 أي $j(x)=1$ أي ان $\dfrac{f(nx)}{[f(x)]^n}=1$

ينتج ان : $f(nx)=[f(x)]^n$ (7)

تسمي الدالة الوحيدة f القابلة للاشتقاق علي R حيث f(0)=1 ، f '=f

الدالة الاسية النيبيرية ونرمز لها بالرمز EXP

تعريف: تسمى الدالة الوحيدة f القابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ بحيث $f'=f$ و $f(0)=1$ الدالة الأسية (النيبيرية).

و نرمز إليها بالرمز " exp ".

من أجل كل x من $\mathbb{R}$. $f(x)=\exp(x)$

المؤسســـــة:		المستـــــــــوى:	الثالثة رياضيات
السنة الدراسية:		ميـــدان التعلم:	تحليل
التاريـــــــــخ:		الوحدة التعلمية:	الدالة الأسية
توقيت الحصة :		موضوع الحصة :	الدالة الأ تعريف وخواص $x \mapsto \exp(x)$

المكتسبات المستهدفة: توظيف خواص الدالة الأسية النيبيرية.

الأنشطة المقترحة وطبيعتها	الإنجاز (ســير الحصة)	التعليمات والتوجيهات
نشاط 01: 1- للدالة f تحقق $f = f'$ جد f''' و f^4 2- نرمز لـ f بـ $\exp$ ونعتبر $f(0)=1$ ونعرف g كما يلي $g(x)=\exp(x)\exp(-x)$ جد g' واستنتج ان $g(x)=1$ هل يمكن ان تنعدم $\exp$ ؟ 3- بين $\exp(x) \succ 0$ اعتمدا $\exp(0)$ والبرهان بالخلف والقيم المتوسطة	**4/ الدالة الأسية** **2.4 مبرهنة وتعاريف** **مبرهنة:** توجد دالة وحيدة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ وتحقق الشروط التالية : $f' = f$ و $f(0)=1$ نرمز الى هذه الدالة بالرمز $\exp$ و نسميها الدالة الاسية النيبيرية .... وهذا يعني ان المعادلة التفاضلية $f' = f$ تقبل حلا وحيدا على $\mathbb{R}$ يحقق $f(0)=1$ **ملاحظة** الدالة الاسية هي حل الخاص للمعادلة التفاضلية $y' = y$ التي تحقق $y(0)=1$ **خاصية :** الدالة الاسية لا تنعدم في $\mathbb{R}$ أي من اجل كل x حقيقي $\exp(x) \neq 0$ **3.4 خواص الدالة الأسية** **خاصية :** الدالة الاسية قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و دالنها المشتقة $\exp(x)=\exp'(x)$ **خاصية :** الدالة الاسية مستمرة على $\mathbb{R}$ و $\exp(0)=1$ **خاصية :** الدالة الاسية موجبة تماما $\mathbb{R}$ أي من اجل كل x حقيقي $\exp(x) \succ 0$ **البرهان:** نستعمل مبرهنة القيم المتوسطة على المجال $[0,c]$ من اجل كل x حقيقي $\exp(x) \neq 0$ * $\exp(0)=1 \succ 0$ الدالة $\exp$ مستمرة وتقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ بفرض وجود عدد حقيقي c حيث $\exp(0).\exp(c) \prec 0$ يعني $\exp(x)=0$ تناقض **خواص جبرية :** من اجل كل عددين حقيقيين $x;y$ ومن اجل كل عدد صحيح نسبي n: : من اجل كل عددين حقيقيين $x;y$ ومن اجل كل عدد صحيح نسبي n لدينا : * $\exp(x) \neq 0$ * $\exp(-x)=\dfrac{1}{\exp(x)}$ * $\exp(x+y)=\exp(x)\times\exp(y)$ * $\exp(x-y)=\dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$ * $\exp(nx)=[\exp(x)]^n$	- تعرف الدالة الأسية كحل خاص للمعادلة التفاضلية $y'=y$ التي تحقق $y(0)=1$. - نبدأ بإنشاء حل تقريبي لهذه المعادلة باستخدام مجدول (بتطبيق طريقة أولر) ثم بعدها نقبل بوجود هذا الحل. - نقدم هذه الدالة في مرحلة مبكرة من السنة الدراسية قصد توظيفها في العلوم الفيزيائية. - نستنتج من التعريف خواص الدالة الأسية. $\exp(x)>0$، $\exp(x+y)=\exp(x)\times\exp(y)$. الترميز e^x، النهايات والمنحنى الممثل لها. - نبين من أجل كل عدد حقيقي a موجب تماما، أنّ المعادلة $e^x=a$ تقبل حلا وحيدا نرمز له بالرمز $\ln a$، يمكن القول حينئذ أن الدالة $\ln$ هي الدالة العكسية للدالة الأسية. لكن لا تعطى أي دراسة تفصيلية حول الدالة العكسية. - تستنتج الخواص

4.4 العدد e و الترميز e^x:

العدد e هو صورة العدد 1 بالدالة الاسية أي : $\exp(1)=e$ بالحاسبة نجد :

$e\approx 2.718281828$ من الخواص نجد $\exp(n)=e^n$

اصطلاحا نرمز ، من اجل كل عدد حقيقي x الى $\exp(x)$ ب e^x

- من أجل كل عدد صحيح نسبي n، $\exp(n)=\exp(n\times 1)=\left[\exp(1)\right]^n$.

لدينا إذن: من أجل كل عدد صحيح نسبي n، $\exp(n)=e^n$.

اصطلاحا نرمز، من أجل كل عدد حقيقي x، إلى $\exp(x)$ بِ e^x.

من أجل كل عدد حقيقي x، $\exp(x)=e^x$ و تقرأ e^x: "أسية x".

خاصية : العدد e هو عدد غير ناطق

ملاحظة: الترميز السابق متلائم مع خواص القوى في الحالة التي يكون فيها الأس عددا صحيحا.

باستعمال الاصطلاح السابق تكتب خواص الدالة الأسية كما يلي:

قواعد الحساب:

من أجل كل عددين حقيقيين x، y و من أجل كل عدد صحيح نسبي n لدينا:

- $e^0=1$ • $\exp'(x)=e^x$ • $e^{-x}=\dfrac{1}{e^x}$
- $e^{x+y}=e^xe^y$ • $e^{x-y}=\dfrac{e^x}{e^y}$ • $e^{nx}=\left(e^x\right)^n$

تمرين محلول1: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بِ: $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$

1.بين أن الدالة f فردية.

2.بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f(2x)=\dfrac{2f(x)}{1+\left[f(x)\right]^2}$

الحل: 1.من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $(-x)$ ينتمي إلى $\mathbb{R}$ و لدينا:

$$f(-x)=\frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}=\frac{\frac{1}{e^x}-1}{\frac{1}{e^x}+1}=\frac{\frac{1-e^x}{e^x}}{\frac{1+e^x}{e^x}}=-\frac{e^x-1}{e^x+1}=-f(x)$$

إذن الدالة f دالة فردية.

.2

$$\frac{2f(x)}{1+\left[f(x)\right]^2}=2\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)\Big/1+\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2$$

$$=\frac{2\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)}{\frac{\left(e^x+1\right)^2+\left(e^x-1\right)^2}{\left(e^x+1\right)^2}}=\frac{2\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)}{\frac{2\left(e^{2x}+1\right)}{\left(e^x+1\right)^2}}=\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)\frac{\left(e^x+1\right)^2}{\left(e^{2x}+1\right)}$$

و منه $\dfrac{2f(x)}{1+\left[f(x)\right]^2}=\dfrac{\left(e^x-1\right)\left(e^x+1\right)}{\left(e^{2x}+1\right)}=\dfrac{\left(e^{2x}-1\right)}{\left(e^{2x}+1\right)}=f(2x)$

و هكذا نجد أنه من أجل كل عدد حقيقي x، $f(2x)=\dfrac{2f(x)}{1+\left[f(x)\right]^2}$

الجبرية والتحليلية للدالة اللوغاريتمية من خواص الدالة ln الأسية exp.

- تتم الإشارة إلى أن المنحنين الممثلين للدالتين ln و exp متناظرين بالنسبة للمنصف الأول في المعلم المتعامد والمتجانس وتبرير ذلك.
- توظف خواص الدوال اللوغاريتمية والأسية لحل معادلات ومتراجحات.
- يعطى تعريف دالة اللوغاريتم العشري (التي نرمز إلها بالرمز log) ويشار إلى أهمية تطبيقاتها في المواد الأخرى.

يجب التركيز على اهمية هذه الخواص في دراسة الدالة الاسية

تطبيق f,g,h ثلاث دوال معرفة على $\mathbb{R}$ ب: $f(x)=e^{x}+2x$ و $g(x)=e^{x-1}$ و $h(x)=e^{-2x}$

1) عين اتجاه تغير كل دالة

2) اوجد علاقة بين g',g و ايضا بين h',h

الحل:1) الدالة f هي مجموع دالتين قابلتين للاشتقاق على $\mathbb{R}$: $x\mapsto \exp(x)..x\mapsto 2x$

$\exp(x)\succ 0$ و 2 معامل توجيه موجب ومنه الدالة f متزايدة على $\mathbb{R}$

الدالة g هي جداء الدالة $\exp(x)\succ 0$ متزايدة بعدد حقيقي موجب $\exp(-1)\succ 0$

ومنه $g'(x)=\exp'(x)\times\exp(-1)\succ 0$ الدالة g متزايدة على $\mathbb{R}$

$h(x)=\exp(-2x)$ ومنه $h(x)=\left[\exp(-x)\right]^{2}$ ومنه $h(x)=\left[\left(e^{-x}\right)\right]^{2}$

اذن $h'(x)=-2e^{x}\left[\left(e^{-x}\right)\right]^{3}=-2\left[\left(e^{-x}\right)\right]^{2}$ اذن متناقصة لان $h'(x)\prec 0$

2)علاقة بين g',g وايضا بين h',h

$g(x)=\exp(x-1)=\exp(x)\exp(-1)$ و

$g'(x)=\exp'(x)\exp(-1)=\exp(x)\exp(-1)$ ومنه $g'=g$

$h(x)=1/\exp(2x)$ ومنه $h'(x)=-2\exp(2x)/\exp(2x)^{2}=-2/\exp(2x)$

اذن $h'=-2h$

تطبيق 1)بين ان : $A=\left(e^{x}\right)^{3}=e^{3x}$ و $B=e^{(3-2x)}\times e^{(5x-7)}=e^{(-4+3x)}$ و

$C=e^{(3x-1)}/e^{(-3x)}=e^{(6x-1)}$

2)تحقق انه : $e^{(x)}/\left(e^{(x)}-x\right)=1/\left(1-xe^{-x}\right)$ و

$\left(e^{(x)}-e^{(-x)}\right)/\left(e^{(x)}+e^{(-x)}\right)=1-e^{-2x}/\left(1+e^{-2x}\right)$

تطبيقات

تطبيق 1 تحويل عبارة باستعمال خواص الدالة الأسية

1. لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي:
$f(x)=(e^{x}+e^{-x})^{2}-(e^{x}-e^{-x})^{2}$
أثبت أنّ f دالة ثابتة
2. أثبت أنّه من أجل كل عدد حقيقي x،
$e^{-x}-e^{-2x}=\frac{e^{x}-1}{e^{2x}}$
3. أثبت أنّه من أجل كل عدد حقيقي x : $e^{x}+e^{-x}-2\geqslant 0$

تطبيق 2 تحويل عبارة باستعمال خواص الدالة الأسية

نعتبر الدالة f المعرفة كما يلي: $f(x)=\frac{e^{2x}+2}{1-e^{2x}}$

1. عيّن D_f مجموعة تعريف الدالة f
2. أثبت أنّه من أجل كل $x\in D_f$، لدينا: $f(x)=\frac{2e^{-2x}+1}{e^{-2x}-1}$
3. أحسب، من أجل كل $x\in D_f$: $f(-x)+f(x)$ و فسر النتيجة بيانيا

خاصية

1) معادلة من الشكل : $e^{x}=a$ تقبل حل وحيد هو

من أجل كل عدد حقيقي موجب a $x=\ln a$ حيث "ln" يرمز إلى الدالة اللوغاريثمية النيبرية

مع $\ln e=1$ و $\ln 1=0$

2) مجموعة حلول المعادلة $e^{x}=e^{y}$ هي نفس مجموعة حلول المعادلة $x=y$

3) مجموعة حلول المتراجحة $e^{x}\leq e^{y}$ هي نفس مجموعة حلول المتراجحة $x\leq y$

المؤسســـــــة:	المستـــــــــوى: الثالثة رياضيات
السنة الدراسية:	ميــدان التعلم: تحليل
التاريـــــــــخ:	الوحدة التعلمية: الدالة الأسية
توقيت الحصة :	موضوع الحصة : دراسة الدالة الاسية

المكتسبات المستهدفة: دراسة تغيرات الدالة الأسية

الأنشطة المقترحة وطبيعتها	الإنجاز (سـير الحصة)	التعليمات والتوجيهات

نشاط 01:

نريد تعيين $\lim_{x\to+\infty} e^x$ و $\lim_{x\to-\infty} e^x$.

نعتبر الدالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ بِـ: $f(x)=e^x-x$.

1. بيّن أنّ الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$.
2. احسب $f(0)$ ثم استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب x، $e^x \geq x+1$.
3. عيّن نهاية الدالة $\exp$ عند $+\infty$ ثمّ استنتج نهايتها عند $-\infty$.

نشـــاط

6.4 دراسة الدالة الأسية

1.6.4 اتجاه التغير

خاصية : من أجل كل عدد حقيقي x، $e^x>0$.

البرهان: من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $e^x=e^{\frac{2x}{2}}=\left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2$ و بما أن $e^x\neq 0$ فإن من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $e^x>0$.

خاصية : الدالة الأسية متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

البرهان: من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $\exp'(x)=e^x$ و منه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $\exp'(x)>0$.

نتائج: من أجل كل عددين حقيقيين a و b لدينا: $e^a<e^b$ يعني $a<b$ و $e^a=e^b$ يعني $a=b$.

- من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $0<e^x<1$ يعني $x<0$ و $e^x>1$ يعني $x>0$.

2.6.4 النهايات

خاصية : (1) $\lim_{x\to+\infty} e^x=+\infty$. (2) $\lim_{x\to-\infty} e^x=0$.

البرهان:

- نعتبر الدالة f المعرفة على $[0;+\infty[$ بِـ $f(x)=e^x-x$. من أجل كل x من $[0;+\infty[$، $f'(x)=e^x-1$.

و بما أن من أجل كل x من $[0;+\infty[$ $e^x\geq 1$ فإن $f'(x)\geq 0$ و منه f متزايدة تماما على $[0;+\infty[$ و $f(0)=1$.

إذن من أجل كل x من $[0;+\infty[$، $f(x)\geq 0$ أي $e^x\geq x$. لدينا $\lim_{x\to+\infty} x=+\infty$ و منه $\lim_{x\to+\infty} e^x=+\infty$. من أجل كل عدد حقيقي x، $e^x=\frac{1}{e^{-x}}$ و بما أن $\lim_{x\to-\infty} e^{-x}=+\infty$ $\left(\lim_{x\to-\infty} -x=+\infty\right)$ فإن $\lim_{x\to-\infty} e^x=0$.

3.6.4 جدول التغيرات

x	$-\infty$ $\qquad$ 0 $\qquad$ $+\infty$
$\exp'(x)$	$+$
e^x	$0 \nearrow 1 \nearrow +\infty$

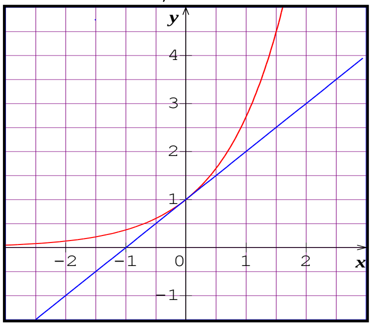
التعليمات والتوجيهات:

الترميز e^x، النهايات والمنحني الممثل لها.

- نبين من أجل كل عدد حقيقي a موجب تماما، أنّ المعادلة $e^x=a$ تقبل حلا وحيدا نرمز له بالرمز lna، يمكن القول حينئذ أن الدالة ln هي الدالة العكسية للدالة الأسية. لكن لا تعطى أي دراسة تفصيلية حول الدالة العكسية.

4.6,4 التمثيل البياني

- المنحنى (C) الممثل للدالة الأسية يقبل محور الفواصل كمستقيم مقارب لما يؤول x إلى $-\infty$.
- لدينا $\exp'(0)=1$ و $e^0=1$. إذن يقبل المنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة 0 مماسا $(\Delta): y = x+1$.



- من تعريف العدد المشتق لدينا:

$$\lim_{x\to 0}\frac{exp(0+x)-\exp(0)}{x}=\exp'(0)=1$$

إذن $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1}$

نتيجة: الدالة $x\mapsto 1+x$ هي أحسن تقريب تآلفي للدالة $x\mapsto e^x$ بجوار 0.

أي من أجل x قريب من 0 لدينا: $\boxed{e^x\approx 1+x}$.

نتائج :

لدينا الدالة $x\mapsto e^x$ متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ و عليه من أجل كل عددان حقيقيان a و b لدينا

$a=b$ تكافئ : $e^a=e^b$ ؛ $a>b$ تكافئ : $e^a>e^b$

$a<b$ تكافئ : $e^a<e^b$ ؛ $x>0$ تكافئ : $e^x>1$

$x<0$ تكافئ : $e^x<1$

5.6,4 تطبيقات معادلات و متراجحات

مهمة في دراسة اتجاه التغير

تطبيق: ادرس إشارة العبارة (e^x-1) وهذا حسب قيّم العدد الحقيقي x.

حل التطبيق : نحل المعادلة $e^x-1=0$ معناه $e^x=1$ ومعناه $e^x=e^0$ أي $x=0$.

$e^x-1>0$ معناه $e^x>1$ ومعناه $e^x>e^0$ أي $x>0$. وعليه $e^x-1<0$ معناه $x<0$

تطبيق حل في $\mathbb{R}$ المعادلات و المتراجحات التالية:

$e^{2x}+3=0\ (1)$ $e^{-2x+1}-1=0\ (2)$ $e^{-2x-1}-e^x<0\ (3)$ $e^{2x}>2-e^x\ (4)$

طريقة: المعادلة $e^{u(x)}=e^{v(x)}$ تعني $u(x)=v(x)$.

المتراجحة $e^{u(x)}\geq e^{v(x)}$ تعني $u(x)\geq v(x)$.

الحل:

1) تعني $e^{2x}=-3$. هذه المعادلة لا تقبل حلولا في $\mathbb{R}$ لأن من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $e^{2x}>0$. إذن $S=\phi$.

2) تعني $e^{-2x+1}=1$ أي $e^{-2x+1}=e^0$ أي $-2x+1=0$ و منه $x=0,5$ إذن $S=\{0,5\}$.

3) تعني $e^{-2x-1}<e^x$ أي $-2x-1<x$ أي $x>-\frac{1}{3}$ و منه $S=\left]-\frac{1}{3};+\infty\right[$.

4) تعني $e^{2x}+e^x-2\leq 0$. بوضع $e^x=X$ نحصل على $X^2+X-2\leq 0$

جذرا كثير الحدود X^2+X-2 هما -2 و 1 و منه $X^2+X-2\leq 0$ تعني $X<-2$ أو $X>1$

$X<-2$ تعني $e^x<-2$. هذه المتراجحة لا تقبل حلولا في $\mathbb{R}$.

$X>1$ تعني $e^x>1$ أي $x>0$. إذن مجموعة حلول المتراجحة (4) هي $S=]0;+\infty[$.

تمرين 6 ص 102: حل في $\mathbb{R}$ المعادلتين التاليتين: (1 $e^{-x^2}={1}/{e}$ (2 $e^{x+3}=e^{4/x}$

حل للتمرين: (1 $e^{-x^2}={1}/{e}$ معناه $e^{x^2}=e$ ومعناه $x^2=1$ أي $x=1$ أو $x=-1$

- تدرج دراسة بعض الأمثلة لدوال من الشكل: $x\mapsto e^{-\lambda x^2}$

- حيث $(\lambda>0)$

$x\mapsto a^x$ (حيث $a>0$) أو

$x\mapsto x^a$ (حيث: $x>0$ و $a\in\mathbb{Q}$) بالنسبة لأي شعبة؟

- نقبل العلاقة: $a^b=e^{b\ln a}$ من أجل كل عددين حقيقيين a و b حيث $a>0$ و b كيفي.

2) $e^{x+3}=e^{4/x}$ معناه $x+3=\frac{4}{x}$ و $x\neq 0$ ومعناه $x^2+3x-4=0$ و $x\neq 0$

يكافئ $(x-1)(x+4)=0$ و $x\neq 0$ أي $x=1$ أو $x=-4$

تمرين 7 ص 102: حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية:

1) $e^{x^2}=e^{-3(x+1)}$ 2) $e^{\frac{x+4}{6-x}}=e^{\frac{1}{x}}$ 3) $e^{2x+1}-(e^x)^3=0$.

حل للتمرين

1) $e^{x^2}=e^{-3(x+1)}$ معناه $x^2=-3x-3$ ومعناه $x^2+3x+3=0$

$\Delta=9-12=-4$ وعليه المعادلة لا تقبل حلول.

2) $e^{\frac{x+4}{6-x}}=e^{\frac{1}{x}}$ معناه $\frac{x+4}{6-x}=\frac{1}{x}$ و $x\in\mathbb{R}^*-\{6\}$ ومعناه $x^2+4x=6-x$

و $x\in\mathbb{R}^*-\{6\}$ يكافئ $x^2+5x-6=0$ و $x\in\mathbb{R}^*-\{6\}$ ويكافئ

$(x-1)(x+6)=0$ و $x\in\mathbb{R}^*-\{6\}$ أي $x=-6$ أو $x=1$

3) $e^{2x+1}-(e^x)^3=0$ معناه $e^{2x+1}=e^{3x}$ ومعناه $2x+1=3x$ أي $x=1$

تمرين 9 ص 102: حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية:

1) $e^{2x^2}\leq e^{5x+3}$ 2) $e^{x+1}>e^{-\frac{2}{x}}$ 3) $e^{x^2}>\left(e^3\right)^4 e^{-x}$ 4) $e^{x-x^2}\geq 1$

حل للتمرين

1) $e^{2x^2}\leq e^{5x+3}$ معناه $2x^2\leq 5x+3$ ومعناه $2x^2-5x-3\leq 0$

$\Delta=49$ ومنه $x'=\frac{5-7}{4}=-\frac{1}{2}$ و $x''=\frac{5+7}{4}=3$ وعليه $e^{2x^2}\leq e^{5x+3}$ معناه $x\in[-0.5;3]$

2) $e^{x+1}>e^{-2/x}$ معناه $x+1>-2/x$ و $x\neq 0$ ومعناه $x+1+\frac{2}{x}>0$ و $x\neq 0$ يكافئ

$\frac{x^2+x+2}{x}>0$ و $x\neq 0$

لدينا $\Delta=-7$ ومنه من أجل كل عدد حقيقي x، $x^2+x+2>0$ وعليه $e^{x+1}>e^{-2/x}$ معناه $x>0$.

3) $e^{x^2}>\left(e^3\right)^4 e^{-x}$ معناه $e^{x^2}>e^{-x+12}$ ومعناه $x^2>-x+12$ يكافئ

$x^2+x-12>0$ لدينا $\Delta=49$ ومنه $x'=\frac{-1-7}{2}=-4$ و $x''=\frac{-1+7}{2}=3$

وعليه $e^{x^2}>\left(e^3\right)^4 e^{-x}$ معناه $x\in\left]-\infty;-4\right[\cup\left]3;+\infty\right[$.

4) $e^{x-x^2}\geq 1$ معناه $-x^2+x\geq 0$ ومعناه $-x(x-1)\geq 0$ أي $x\in[0;1]$

تمرين 10 ص 102: حل في $\mathbb{R}$ المعادلة والمتراجحة التاليتين:

1) $\left(e^x-1\right)\left(e^x-e^2\right)=0$ 2) $\left(e^x-1\right)\left(e^x-e^2\right)>0$

حل للتمرين

1) $(e^x-1)(e^x-e^2)=0$ معناه $(e^x-1=0)$ أو $(e^x-e^2=0)$ ومعناه $(e^x=1)$ أو $(e^x=e^2)$ أي $x=0$ أو $x=2$

2) $(e^x-1)(e^x-e^2)>0$ معناه [$(e^x-1>0)$ و $(e^x-e^2>0)$]

أو[$(e^x-1<0)$ و $(e^x-e^2<0)$] ومعناه ($x>0$ و $x>2$) أو ($x<0$ و $x<2$) يكافئ

$x>2$ أو $x<0$ أي $x\in]-\infty;0[\cup]2;+\infty[$

x	$-\infty$	2	0	$+\infty$
(e^x-1)	-		+	
(e^x-e^2)	-	+		
الاشارة	+	-	+	

نشاط استثماري

الهدف من هذا النشاط : معرفة بعض النهايات الشهيرة للدالة الأسية و الخواص المتعلقة بها.

نعتبر الدالة f المعرفة بالعلاقة : $f(x)=e^x-x$ على $\mathbb{R}$

أثبت أن: $\lim_{x\to-\infty}e^x=0;\ \lim_{x\to+\infty}e^x=+\infty;\ \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty;\ \lim_{x\to-\infty}xe^x=0;\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$

الدالة f عبارة عن فرق دالتين قابلتين للإشتقاق على $\mathbb{R}$ فهي كذلك قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$

$f'(x)=e^x-1$ وبما أن الدال $x\mapsto e^x$ متزايدة تماما

لأن دالتها المشتقة موجبة تماما على $\mathbb{R}$ فان:

$f'(x)>0$ يكافئ $e^x>1\Leftrightarrow e^x>e^0$ يعني أن:

$x>0$ و منه الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}_+$

العدد 1 قيمة حدية صغرى للدالة f

ومنه $f(x)\geq1$ وذالك من أجل كل عدد حقيقي x و منه يأتي: $e^x\geq x$ و بما أن

$\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$ يأتي على التو $\lim_{x\to+\infty}e^x=+\infty$ حسب مبرهنة الحد الأدنى.و منه

$\lim_{x\to-\infty}e^x=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{e^{-x}}=0$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$ ↘	1	↗ $+\infty$

نعلم أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $e^x\geq x$

ومنه $\exp\left(\frac{x}{2}\right)^2\geq\left(\frac{x}{2}\right)^2\to e^x\geq\frac{x^2}{4}$

و بما أن $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{4}=+\infty$

وحسب نظرية الحصر $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$ ومنه $\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{-xe^{-x}}=0$

الدالة $f:x\mapsto e^x$ مستمرة وقابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ فهي تقبل الاشتقاق عند الصفر.ومنه

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{e^x-e^0}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

6.4.6 حساب بعض النهايات الاسية

تطبيق: اعتمادا على النهايات الشهيرة التالية احسب النهايات المعطاة

النهايات المعروفة سابقا $\boxed{\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty}$ و $\boxed{\lim_{x\to-\infty} e^x = 0}$

النهايات الشهيرة $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty}$ يمكن البرهان عليها انطلاقا من منحنى الدالة الاسية الذي هو عبارة عن قطع مكافئ باتجاه $+\infty$

النهايات الشهيرة $\boxed{\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0}$ يمكن البرهان عليها انطلاقا من النهاية السابقة بتغيير المتغير اي

$-x = y$ ومنه $\lim_{y\to+\infty} -ye^{-y} = \lim_{y\to+\infty} -\left(ye^{-y}\right) = \lim_{y\to+\infty} -\left(y/e^y\right) = -0$

النهايات الشهيرة $\boxed{\lim_{x\to0} \frac{e^x-1}{x} = 1}$ يمكن البرهان عليها باستعمال العدد المشتق

النهايات المعطاة:

1) $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x+2}{e^x-1}$ 2) $\lim_{x\to0} \frac{e^{2x}-e^x}{x}$ 3) $\lim_{x\to0} \frac{e^x-1}{e^{2x}-3e^x+2}$

4) $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x+1}{x^3}$ 5) $\lim_{x\to-\infty} x^2e^x$

الحــل: كل النهايات هي (ح ع ت)

1) $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x+2}{e^x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x\left(1+2/e^x\right)}{e^x\left(1-1/e^x\right)} = 1$

2) $\lim_{x\to0} \frac{e^{2x}-e^x}{x} = \lim_{x\to0} e^x\left(\frac{e^x-1}{x}\right) = 1$ لان $\boxed{\lim_{x\to0} \frac{e^x-1}{x} = 1}$

3) $\lim_{x\to0} \frac{e^x-1}{e^{2x}-3e^x+2} = \lim_{x\to0} \frac{\left(e^x-1\right)}{\left(e^x-2\right)\left(e^x-1\right)} = -1$

لان $e^{2x}-3e^x+2 = \left(e^x-2\right)\left(e^x-1\right)$

4) $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x+1}{x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^3}\left(1+1/e^x\right) = +\infty$ و 5) $\lim_{x\to-\infty} x^2e^x = +\infty$

التمرين 2 : حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية:

1) $e^{4x-3} = 2$

2) $e^{x^2-3x-3} = e$

3) $3e^{3x} - 2e^{2x} - e^x = 0$

التمرين 3 : حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية:

1) $2e^{2x} - 3e^x + 1 < 0$

2) $e^{2x} - e^x - 1 < 0$

3) $e^x - 2e^{-x} + 1 > 0$

التمرين 2 الجزء 3

لدينا $3e^{3x} - 2e^x - e^{2x} = 0$ بوضع $e^x = y$ تصبح المعادلة $3y^3 - 2y^2 - y = 0$

ومنه $\left(3y^2 - 2y - 1\right) = 0$ او $y = 0$ أي $e^x = y \neq 0$ ومنه الحل غير مقبول

معادلة من الدرجة 2 مميزها $\sqrt{\Delta} = 4$ حليها $y = -1/2 ... e^x \neq -1/2$ غير مقبول

و $y = 1 ... e^x = 1$ ومنه $e^x = e^0$ المعادلة تقبل حل وحيد $x = 0$

التمرين 3 الجزء 3

لدينا $e^{x}-2e^{-x}+1\succ 0$ بالضرب في e^{x} نجد $e^{2x}+e^{x}-2\succ 0$

لحل المتراجحة نحل اولا المعادلة $e^{2x}+e^{x}-2=0$

بوضع $e^{x}=y$ تصبح المعادلة $y^{2}+y-2=0$

معادلة من الدرجة 2 مميزها $\sqrt{\Delta}=\sqrt{5}$ حليها $y_1=\left(-1-\sqrt{5}\right)/2....e^{x}\neq\left(-1-\sqrt{5}\right)/2$ غير مقبول

و $y_2=\left(-1+\sqrt{5}\right)/2....e^{x}=\left(-1+\sqrt{5}\right)/2$ ومنه $e^{2x}+e^{x}-2=\left(e^{x}-y_1\right)\left(e^{x}-y_2\right)$

x	$-\infty$ $\quad y_1 \quad y_2 \quad$ $+\infty$	
$\left(e^{x}-y_1\right)$	الحل y_1 غير مقبول لانه سالب	
$\left(e^{x}-y_2\right)$	---	+

ومنه حلول المتراجحة : هي $x\in\left]\ln\left(\left(-1+\sqrt{5}\right)/2\right);+\infty\right[$

دراسة الدالة الأسية:

نشاط 3: نريد تعيين $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x}$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{x}$.

نعتبر الدالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f\left(x\right)=e^{x}-x$.

1. بيّن أنّ الدالة f متزايدة تماما على المجال $\left[0;+\infty\right[$.

2. احسب $f\left(0\right)$ ثم استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب x ، $e^{x}\geq x+1$.

3. عيّن نهاية الدالة $\exp$ عند $+\infty$ ثمّ استنتج نهايتها عند $-\infty$.

حل النشاط 3:

1. الدالة $\exp$ تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا $\exp'\left(x\right)=e^{x}$ ومنه $f'\left(x\right)=e^{x}-1$

$f'\left(x\right)=0$ معناه $e^{x}-1=0$ ومعناه $e^{x}=1$ يكافئ $e^{x}=e^{0}$ أي $x=0$؛

$f'\left(x\right)>0$ معناه $e^{x}-1>0$ ومعناه $e^{x}>1$ يكافئ $e^{x}>e^{0}$ أي $x>0$.

وعليه الدالة f متزايدة تماما على المجال $\left[0;+\infty\right[$.

2. لدينا $f\left(x\right)=e^{x}-x$ ومنه $f\left(0\right)=e^{0}-0=1$

بما أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $\left[0;+\infty\right[$ فإنّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $\left[0;+\infty\right[$ ، $f\left(x\right)\geq f\left(0\right)$ وهذا يعني $e^{x}-x\geq 1$ أي $e^{x}\geq x+1$.

3. لدينا من أجل كل عدد حقيقي موجب x، $e^{x}\geq x+1$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}x+1=+\infty$ إذن

$\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x}=+\infty$. $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{x}=\lim\limits_{t\to+\infty}e^{-t}=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{1}{e^{t}}=0$. الدالة $\exp$ متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

جدول تغيرات الدالة **exp**:

x	$-\infty$ $\quad 0 \quad 1 \quad$ $+\infty$
$\exp'\left(x\right)=e^{x}$	+
$\exp\left(x\right)=e^{x}$	0 ↗ 1 ↗ e ↗ $+\infty$

ملاحظة 1: الدالة $\exp$ تقبل الاشتقاق عند 0 إذن $\exp'\left(0\right)=e^{0}=1$ أي: $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{x}-e^{0}}{x-0}=1$

نتائج: $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{x}-1}{x}=1$

$\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x}=+\infty$	$\lim\limits_{x\to-\infty}e^{x}=0$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{x}-1}{x}=1$

ملاحظة 2: ليكن h عدد حقيقي قريب من 0. $\exp(0+h)\approx\exp(0)+h\exp'(0)$ أي $\exp(h)\approx 1+h$

التقريب التآلفي للعبارة e^{x} بجوار الصفر هو $1+x$.

التمثيل البياني للدالة **exp**: ينسب المستوي إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. نسمي $\mathcal{C}$ المنحني الممثل للدالة $\exp$.

معادلة (T) مماس المنحني $\mathcal{C}$ عند النقطة ذات الفاصلة 0: $y=\exp'(0)(x-0)+\exp(0)$ أي $y=x+1$.

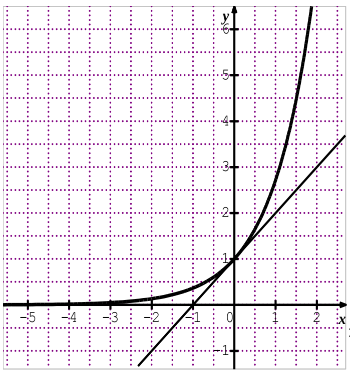
لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}=0$ إذن المنحني $\mathcal{C}$ يقبل مستقيما مقاربا معادلته $y=0$.

من أجل كل عدد حقيقي موجب x، $e^{x}\geq x+1$

إذن المنحني $\mathcal{C}$ يقع فوق المستقيم (T) في المجال $[0;+\infty[$.

تمرين 45 صفحة 104

f دالة معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\dfrac{e^{4x}-3}{e^{4x}+1}$.



1. بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x، $f(x)=\dfrac{1-3e^{-4x}}{1+e^{-4x}}$.
2. عيّن نهايتي الدالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$.
3. احسب $f'(x)$ وادرس إشارتها.
4. شكل جدول تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$.

حل التمرين:

1. تبيين أنّه من أجل كل عدد حقيقي x، $f(x)=\dfrac{1-3e^{-4x}}{1+e^{-4x}}$:

ليكن x عددا حقيقيا: $f(x)=\dfrac{e^{4x}-3}{e^{4x}+1}=\dfrac{e^{4x}\left(1-\dfrac{3}{e^{4x}}\right)}{e^{4x}\left(1+\dfrac{1}{e^{4x}}\right)}=\dfrac{\left(1-\dfrac{3}{e^{4x}}\right)}{\left(1+\dfrac{1}{e^{4x}}\right)}=\dfrac{1-3e^{-4x}}{1+e^{-4x}}$

2. تعيين نهايتي الدالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$:

لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{4x}=\lim\limits_{t\to-\infty} e^{t}=0$ وعليه $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{4x}-3}{e^{4x}+1}=-3$

ولدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-4x}=\lim\limits_{t\to-\infty} e^{t}=0$ وعليه $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-3e^{-4x}}{1+e^{-4x}}=1$

3. حساب $f'(x)$ ودراسة إشارتها: لدينا $f(x)=\dfrac{e^{4x}-3}{e^{4x}+1}$: نضع $u(x)=e^{x}$ و $v(x)=4x$ إذن $u[v(x)]=e^{v(x)}=e^{4x}$ ولدينا

$$[u\circ v]'(x)=u'[v(x)]\times u'(x)=4e^{4x}$$

ومنه $f'(x)=\dfrac{4e^{4x}\left(e^{4x}+1\right)-4e^{4x}\left(e^{4x}-3\right)}{\left(e^{4x}+1\right)^{2}}$ أي

$$f'(x)=\frac{4e^{4x}\left(e^{4x}+1-e^{4x}+3\right)}{\left(e^{4x}+1\right)^{2}}=\frac{16e^{4x}}{\left(e^{4x}+1\right)^{2}}$$

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x، $e^{4x}>0$ وبالتالي من أجل كل عدد حقيقي x، $f'(x)>0$

5. جدول تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	+
$f(x)$	$-3 \nearrow 1$

المؤسســـــــة:	المستـــــــــــوى: الثالثة رياضيات
السنة الدراسية:	ميـــدان التعلم: تحليل
التاريـــــــــخ:	الوحدة التعلمية: الدالة الأسية
توقيت الحصة :	موضوع الحصة : الدوال الأسية: $x \mapsto e^{kx}$

المكتسبات المستهدفة: تعريف وخصائص

الأنشطة المقترحة وطبيعتها	الإنجاز (سـير الحصة)	التعليمات والتوجيهات

نشاط 01:

نـــــشاط

**نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\dfrac{3e^x-1}{e^x+1}$

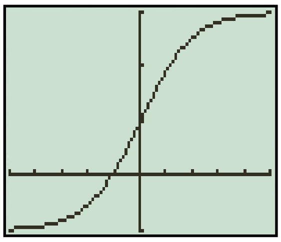
1. بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f(-x)+f(x)=2$. فسر بيانيا النتيجة.
2. بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f(x)=\dfrac{4e^x}{e^x+1}-1$.

الحل: ليكن x عددا حقيقيا كيفيا.

.1 $f(-x)+f(x)=\dfrac{e^x(3e^{-x}-1)}{e^x(e^{-x}+1)}+\dfrac{3e^x-1}{e^x+1}=\dfrac{3-e^x}{1+e^x}+\dfrac{3e^x-1}{e^x+1}=\dfrac{2e^x+2}{e^x+1}=\dfrac{2(e^x+1)}{e^x+1}$ ومنه

$f(-x)+f(x)=2$

المنحني الممثل للدالة f متناظر بالنسبة على النقطة $A(0;1)$.



.2 $\dfrac{3e^x-1}{e^x+1}=\dfrac{4e^x-e^x-1}{e^x+1}=\dfrac{4e^x}{e^x+1}-1=f(x)$.

4/الدالة الاسية

.1.5.4 حلول المعادلة

مبرهنة ليكن k عددا حقيقيا.

توجد دالة وحيدة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ بحيث $f'=kf$ و $f(0)=1$.

f هي الدالة $x \mapsto e^{kx}$.

البرهان:

الوجود :

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=e^{kx}$.. الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

*التأكد أن الدالة f تحقق $f'=kf$ و $f(0)=1$.

الوحدانية:

نفرض وجود دالة ثانية g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ بحيث $g'=kg$ و $g(0)=1$.

- نبرهن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $g(x)=f(x)$. أي : $f=g$

نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $h(x)=\dfrac{g(x)}{f(x)}$.

الدالة h قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ نبين ان الدالة h ثابتة ثم نستنتج انه : من أجل كل x من $\mathbb{R}$،

$g(x)=f(x)$. أي : $f=g$

اهمية هذه المعادلة في دروس الفيزياء

مبرهنة: ليكن k عددا حقيقيا.

الدوال f القابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ بحيث $f'=kf$ هي الدوال: $x\mapsto Ce^{kx}$ حيث Cعدد حقيقي ثابت.

1. أنجز برهانا لهذه المبرهنة.

2. عين كل الدوال f القابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ بحيث $f'(x)-2f(x)=0$.

3. من بين الدوال f حيث $f'(x)-2f(x)=0$ عين تلك التي منحناها البياني يمر من النقطة $A\left(\frac{1}{2};e^2\right)$.

الحل:

1. إذا كانت f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بِ $f(x)=Ce^{kx}$ فإنها قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا من أجل كل عدد حقيقي x، $f'(x)=C\times ke^{kx}=k\left(Ce^{kx}\right)=kf(x)$ و منه $f'=kf$.

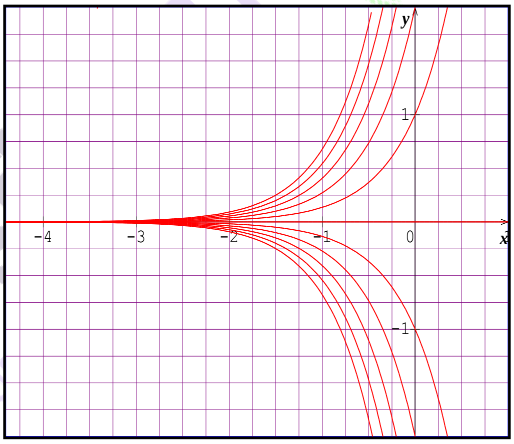
عكسيا إذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ بحيث $f'=kf$ نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بِ $g(x)=\frac{f(x)}{e^{kx}}$ الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $g'(x)=\frac{f'(x)e^{kx}-kf(x)e^{kx}}{e^{2kx}}=0$ و منه الدالة g ثابتة على $\mathbb{R}$. بوضع $g(x)=C$

من أجل كل x من $\mathbb{R}$ و بما أن $f(x)=g(x)e^{kx}$ يكون لدينا:

من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f(x)=Ce^{kx}$.

2. $f'(x)-2f(x)=0$ تعني $f'(x)=2f(x)$ و منه $f'=kf$ مع $k=2$.

الدوال f هي إذن الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=Ce^{2x}$ حيث Cعدد حقيقي ثابت.



التمثيلات المقابلة هي لدوال f معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=Ce^{2x}$

3. نبحث إذن عن الدالة f حيث $f(x)=Ce^{2x}$ مع $f\left(\frac{1}{2}\right)=e^2$ و بما أن $f\left(\frac{1}{2}\right)=Ce^{2\left(\frac{1}{2}\right)}=C\times e$ يكون لدينا $C\times e=e^2$ أي $C=e$. و منه $f(x)=e\times e^{2x}=e^{2x+1}$. إذن الدالة الوحيدة f حيث $f'(x)-2f(x)=0$ و التي يمر منحناها البياني من النقطة $A\left(\frac{1}{2};e^2\right)$ هي الدالة: $x\mapsto e^{2x+1}$

تمرين 12 ص 102

f دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث:

$f'=kf$ و $f(0)=\lambda$

مع k و λ عددان حقيقيان و $\lambda\neq 0$

لتكن لدالة g المعرفة بـ: $g=\dfrac{1}{\lambda}f$

1. تحقق أن $g'=kg$ و $g(0)=1$

2. استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x، $f(x)=\lambda\exp(kx)$

الحل: 1-لدينا $g=\dfrac{1}{\lambda}f$ ومنه $g'=\dfrac{1}{\lambda}f'$ ومنه $g'=\dfrac{1}{\lambda}kf \ ...(f'=kf)$

ومنه $g=\dfrac{1}{\lambda}f$ يعني $g'=kg$

ولدينا $g(0)=\dfrac{1}{\lambda}f(0)$ وبما ان $f(0)=\lambda$ فان $g(0)=\dfrac{1}{\lambda}\lambda=1$

2- من أجل كل عدد حقيقي x، $f(x)=\lambda\exp(kx)$ أي $f(x)=\lambda e^{kx}$

لاحظ ان $f'=kf$ و $f(0)=1$ حل هذه المعادلة هو $f(x)=e^{kx}$

أي من الشكل $f'/f=k$ دالتها الاصلية هي $\ln f=kx+c$ أي $f(x)=e^{kx}$

لدينا أن $g'=kg$ و $g(0)=1$ ومنه $g(x)=e^{kx}$ وبما ان $g=\dfrac{1}{\lambda}f$

فان $\dfrac{1}{\lambda}f(x)=e^{kx}$ اذن $f(x)=\lambda e^{kx}$

تمرين 13 ص 102

في كل حالة من الحالات التالية، عين الدالة الوحيدة

f القابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث:

1. $f'=-6f$ و $f(0)=-1$ الحل $f(x)=f(0)e^{-6x}$ أي $f(x)=-e^{-6x}$

2. $f'=-2f$ و $f(0)=\dfrac{1}{2}$ الحل $f(x)=f(0)e^{-2x}$ أي $f(x)=\frac{1}{2}e^{-2x}$

3. $f'=\sqrt{2}f$ و $f(0)=2$ الحل $f(x)=f(0)e^{\sqrt{2}x}$ أي $f(x)=2e^{\sqrt{2}x}$

2.5.4. دوال تحول المجموع الى جداء

مبرهنة

الدوال غير المعدومة f و القابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ بحيث:

من أجل كل عددين حقيقيين x و y، $f(x+y)=f(x)f(y)$

هي الدوال $x\mapsto e^{kx}$ حيث k عدد حقيقي.

مثال

f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ بحيث: $f'=kf$ و $f(0)=\lambda$

مع k و λ عددان حقيقيان و $\lambda\neq 0$

لتكن الدالة g المعرفة بـ: $g=\dfrac{1}{\lambda}f$

1) تحقق أن $g'=kg$ و $g(0)=1$

2) استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f(x)=\lambda\exp(kx)$

المؤسســـة:	المستـــوى: الثالثة رياضيات
السنة الدراسية:	ميــدان التعلم: تحليل
التاريـــخ:	الوحدة التعلمية: الدالة الاسية
توقيت الحصة :	موضوع الحصة : دراسة الدالة $\exp\circ u$

المكتسبات المستهدفة: حل معادلة تفاضلية من الشكل $y'=f(x)$، $y''=f(x)$ حيث f دالة مألوفة.

الأنشطة المقترحة وطبيعتها	الإنجاز (سير الحصة)	التعليمات والتوجيهات
نشاط 01:	(see below)	- تدرج دراسة بعض الأمثلة لدوال من الشكل: $x\mapsto e^{-\lambda x^2}$ ($\lambda>0$ حيث) - $x\mapsto a^x$ (حيث $a>0$) أو $x\mapsto x^a$ (حيث: $x>0$ و $a\in\mathbb{Q}$) بالنسبة لأي شعبة؟ - نقبل العلاقة: $a^b=e^{b\ln a}$ من أجل كل عددين حقيقيين a و b حيث $a>0$ و b كيفي.

7.4 دراسة الدالة $\exp\circ u$

1.7.4 النهايات

مثال: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بِ $f(x)=e^{-x+2}$.

لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x+2)=+\infty$ و بما أن $\lim\limits_{X\to+\infty}e^X=+\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x+2}=+\infty$ أي $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$.

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x+2)=-\infty$ و بما أن $\lim\limits_{X\to-\infty}e^X=0$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x+2}=0$ أي $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

2.7.4 اتجاه التغير

خاصية: إذا كانت u دالة معرفة على مجال I فإن للدالتين u و $\exp\circ u$ نفس اتجاه التغيرات على المجال I.

البرهان: نعلم أن الدالة " $\exp$ " متزايدة تماما على $\mathbb{R}$. إذن حسب المبرهنة الخاصة باتجاه تغير دالة مركبة يكون للدالتين u و $\exp\circ u$ نفس اتجاه التغيرات على المجال I.

مثال: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بِ $f(x)=e^{x^2-1}$.

نلاحظ أن $f=\exp\circ u$ حيث u هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بِ $u(x)=x^2-1$.

بما أن الدالة u متناقصة تماما على المجال $]-\infty;0]$ فإن الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;0]$.

$[0;+\infty[$ فإن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$

3.7.4 المشتقة

خاصية: إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I فإن الدالة $\exp\circ u$ قابلة للاشتقاق على I و لدينا من أجل كل x من I، $(\exp\circ u)'(x)=u'(x)e^{u(x)}$.

البرهان: إذا كانت الدالة u قابلة للاشتقاق على I و علما ان الدالة " $\exp$ " قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ فإن الدالة المركبة $\exp\circ u$ قابلة للاشتقاق على I و بتطبيق قاعدة حساب مشتقة دالة مركبة يكون لدينا: من أجل كل x من I،

$$(\exp\circ u)'(x)=u'(x)\times(\exp)'[u(x)]=u'(x)\times(\exp)[u(x)]$$

أي من أجل كل x من I، $(\exp\circ u)'(x)=u'(x)e^{u(x)}$.

مثال:

مشتقة الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بِ $f(x)=e^{x^2+x+1}$ هي $f'(x)=(2x+1)e^{x^2+x+1}$.

مشتقة الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بِ $g(x)=e^{\frac{1}{x}}$ هي $g'(x)=-\dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$.

تمرين: لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بِ $f(x)=e^{x^3+3x+1}$

1. أدرس تغيرات الدالة f.
2. أثبت أن المعادلة $f(x)=2$ تقبل حلا وحيدا على المجال $[-1,0]$.

الحل:

1. نلاحظ ان $u(x)=x^3+3x+1$ تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $u'(x)=3x^2+3$ لاتنعدم وهي موجبة يعني ان u متزايدة على $\mathbb{R}$ ومنه f متزايدة على $\mathbb{R}$

2. * الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$.

* الرتابة: الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$،

$$f'(x)=3(x^2+1)e^{x^3+3x+1}$$

و بما أن $3(x^2+1)>0$ و $e^{x^3+3x+1}>0$ فإن $f'(x)>0$ و منه الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

لدينا. $f(-1)=e^{-3}\approx 0,5$ و $f(0)=e\approx 2,71$. نلاحظ أن $f(-1)<2<f(0)$. إذن،

حسب مبرهنة القيم المتوسطة، المعادلة $f(x)=2$ تقبل حلا وحيدا α محصورا بين -1 و0. تعطينا الحاسبة $-0,11<\alpha<-0,10$.

الدالة المشتقة للدالة $\varphi : x \mapsto e^{g(x)}$

إذا كانت الدالة φ معرفة على مجال I وقابلة للإشتقاق على I فان الدالة $\varphi : x \mapsto e^{g(x)}$ تقبل الاشتقاق على هذا المجال ودالها المشتقة هي الدالة $\varphi : x \mapsto g'(x)\times e^{g(x)}$

مثال:

-1 الدالة $\varphi : x \mapsto e^{x^2-3x}$ معرفة وقابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ عندئذ دالتها المشتقة هي الدالة $\varphi : x \mapsto (3x^1-3)e^{x^2-3x}$

-2 عين الثوابت الحقيقية $\alpha;\beta$ حتى تكون الدالة $\varphi : x \mapsto (\alpha x^2+4x+\beta)e^{x^3+2x^2-9x+3}$ أصلية للدالة $\eta : x \mapsto 5e^{x^3+2x^2-9x+3}$

تطبيق:

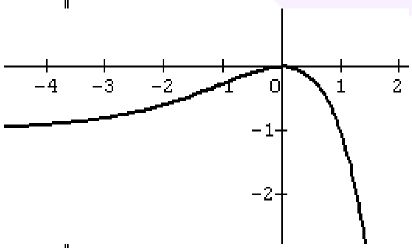
حل في $\mathbb{R}$ مايلي: $(x^2-4x+3)e^x=0$; (3) $e^{2x}-3e^x+2=0$; (2) $e^{x^2-1}=e$ (1)

$e^{2x-1}\le 2008;\quad xe^{2x}-x^2e^x>0$

أحسب النهايات التالية: $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-1)\dfrac{e^x}{x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-e^x}{-x+e^{-x}}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{x}$

نعتبر الدالة $f : x \mapsto \dfrac{x}{e^x-1}$ احسب الدالة المشتقة للدالة f. استنتج إشارتها ثم حدد اتجاه تغيراتها.

أنشئ التمثيل البياني لها في معلم متعامد ومتجانس.



لأن $f'(x)=\dfrac{(1-x)e^x-1}{(e^x-1)^2}\le 0$

مشتقة الدالة $x\mapsto(1-x)e^x-1$ هي $g'(x)=-xe^x$

يعني $g(x)=(1-x)e^x-1$ ومنه $(1-x)e^x-1\le 0$

من هنا الدالة $f : x \mapsto \frac{x}{e^x - 1}$ متناقصة تماما

نشاط: حل في $\mathbb{R}$ المعادلات و المتراجحات التالية:

$e^{2x} + 3 = 0 \quad (1) \qquad e^{-2x+1} - 1 = 0 \quad (2)$

$e^{-2x-1} - e^x < 0 \quad (3) \qquad e^{2x} > 2 - e^x \quad (4)$

طريقة: المعادلة $e^{u(x)} = e^{v(x)}$ تعني $u(x) = v(x)$.

المتراجحة $e^{u(x)} \geq e^{v(x)}$ تعني $u(x) \geq v(x)$.

الحل:

(1) تعني $e^{2x} = -3$. هذه المعادلة لا تقبل حلولا في $\mathbb{R}$ لأن من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $e^{2x} > 0$.إذن $S = \phi$.

(2) تعني $e^{-2x+1} = 1$ أي $e^{-2x+1} = e^0$ أي $-2x+1 = 0$ و منه $x = 0,5$ إذن $S = \{0,5\}$.

(3) تعني $e^{-2x-1} < e^x$ أي $-2x - 1 < x$ أي $x > -\frac{1}{3}$ و منه $S = \left]-\frac{1}{3}; +\infty\right[$.

(4) تعني $e^{2x} + e^x - 2 \leq 0$. بوضع $e^x = X$ نحصل على $X^2 + X - 2 \leq 0$

جذرا كثير الحدود $X^2 + X - 2$ هما -2 و 1 و منه $X^2 + X - 2 \leq 0$ تعني $X < -2$ أو $X > 1$

$X < -2$ تعني $e^x < -2$. هذه المتراجحة لا تقبل حلولا في $\mathbb{R}$.

$X > 1$ تعني $e^x > 1$ أي $x > 0$. إذن مجموعة حلول المتراجحة (4) هي $S =]0; +\infty[$.

نشاط: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$ و ليكن (C) منحنيها البياني.

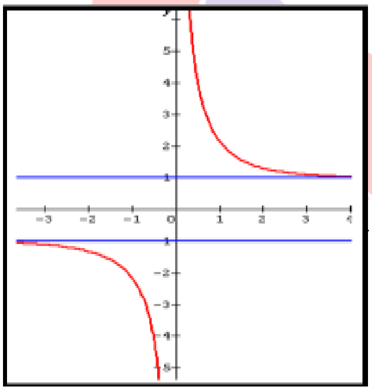
1. عين نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها. استنتج المستقيمات المقاربة لـ (C).

2. أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها. أرسم المنحنى (C) معلم متعامد و متجانس.

الحل:

- لدينا $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$ و منه $\lim_{x \to -\infty} \frac{e^x + 1}{e^x - 1} = -1$ إذن $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -1$.
- نعلم أن $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ و منه لدينا حالة عدم التعيين.

$\lim_{x \to +\infty} \frac{1 + e^{-x}}{1 - e^{-x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x(1 + e^{-x})}{e^x(1 - e^{-x})} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$ و بما أن $\lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$ فإن $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$.



- لدينا $\lim_{x \to 0}(e^x + 1) = 2$ و $\lim_{x \to 0}(e^x - 1) = 0$.

نعلم أن $e^x < 1$ يعني $x < 0$ و $e^x > 1$ يعني $x > 0$

و بالتالي $\lim_{x \xrightarrow{<} 0} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = +\infty$

يقبل المنحنى (C) ثلاث مستقيمات مقاربة معادلاتها:

$x = 0$، $y = -1$ و $y = 1$.

2) f قابلة للاشتقاق على المجالين $]-\infty; 0[$، $]0; +\infty[$

و لدينا $f'(x) = \frac{-2e^x}{(e^x - 1)^2}$ و بالتالي فالدالة f

متناقصة تماما على كل من المجالين $]-\infty; 0[$، $]0; +\infty[$.

مثال

لتكن الدالة g حيث $g(x)=x^2-1$ أدرس اتجاه التغيرات الدالة g على □

استنتج اتجاه التغيرات الدالة f حيث $f(x)=e^{x^2-1}$ $(f=\exp\circ g)$

الحل

الدالة g متناقصة تماما على المجال $]-\infty,0]$ و متزايدة تماما على المجال $[0,+\infty[$

بما أن الدالة f مركبة من الدالة g و $\exp$ على الترتيب و نعلم أن الدالة $\exp$ متزايدة تماما على □ نجد :

الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty,0]$ و متزايدة تماما على المجال $[0,+\infty[$

المؤسســـــة:		المستــــــوى:	الثالثة رياضيات
السنة الدراسية:		ميــدان التعلم:	تحليل
التاريــــخ:		الوحدة التعلمية:	الدالة الاسية
توقيت الحصة :		موضوع الحصة :	دراسة الدالة $\exp(-\lambda x),\exp(-\lambda x^2)$

المكتسبات المستهدفة: دراسة دوال اسية مركبة

الأنشطة المقترحة وطبيعتها	الإنجاز (سـير الحصة)	التعليمات والتوجيهات

نشاط 01:

8.4 دراسة الدالة $\exp(-\lambda x)$

1.8.4 تطبيقات $\lambda \succ 0$

تطبيق :

من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما λ ، نعتبر الدوال f_λ المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f_\lambda(x)=e^{-\lambda x}$$

نرمز بـ (C_λ) إلى المنحنيات الممثلة للدوال f_λ في معلم متعامد و متجانس $(O;I,J)$.

1. أحسب نهايتي الدالة f_λ عند $-\infty$ وعند $+\infty$. فسر بيانيا النتيجة الثانية.
2. أدرس اتجاه تغير الدوال f_λ ثم شكل جدول تغيراتها.
3. بين أن كل المنحنيات (C_λ) تمر من نقطة ثابتة يطلب تعيينها.
4. أرسم في نفس الشكل المنحنيات (C_1)، (C_2) و (C_3).
5. أدرس الأوضاع النسبية للمنحنيين (C_λ) و $(C_{\lambda'})$ من أجل عددين حقيقيين λ و λ' حيث $0<\lambda<\lambda'$.

الحل :

1-نهايتي الدالة f_λ عند $-\infty$ وعند $+\infty$. فسر بيانيا النتيجة الثانية.

لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty} f_\lambda(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-\lambda x}=+\infty$ لان $\lim\limits_{x\to-\infty}(-\lambda x)=+\infty ;\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=$ مركب دالتين

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} f_\lambda(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-\lambda x}=0$ لان $\lim\limits_{x\to+\infty}(-\lambda x)=-\infty ;\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$ مركب دالتين

2- اتجاه تغير الدوال f_λ ثم شكل جدول تغيراتها.

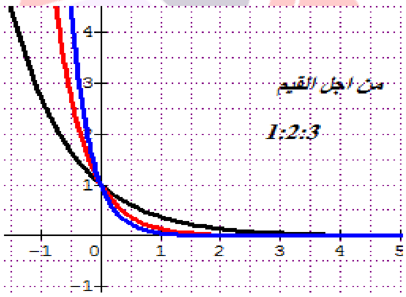
المشتقة: الدالة تقبل الاشتقاق حيث: $f_\lambda'(x)=-\lambda e^{-\lambda x}$

الاشارة: $f_\lambda'(x)=0$ يعني ان $-\lambda e^{-\lambda x}=0$ ومنه $e^{-\lambda x}\neq 0$

نعلم ان $e^{-\lambda x}\succ 0$ دوما وبما ان $-\lambda\prec 0$ فان $-\lambda e^{-\lambda x}\prec 0$

جدول التغيرات

x	$-\infty$ 0 $+\infty$
$f'(x)$	-
$f(x)$	$+\infty$ ↘ 1 ↘ 0



3-مهما كانت قيمة $\lambda\succ 0$ فان $-\lambda x=0$ من اجل $x=0$ وهذا كافي لان تكون كل المنحنيات (C_λ) تمر من نقطة ثابتة هي $(0,1)$

4-المنحنيات في نفس الشكل المنحنيات (C_1)، (C_2) و (C_3).

التعليمات والتوجيهات:

- تدرج دراسة بعض الأمثلة لدوال من الشكل: $x\mapsto e^{-\lambda x^2}$
- حيث $(\lambda>0)$ حيث $x\mapsto a^x$ $(a>0)$ أو $x\mapsto x^a$ (حيث: $x>0$ و $a\in\mathbb{Q}$) بالنسبة لأي شعبة؟
- نقبل العلاقة: $a^b=e^{b\ln a}$ من أجل كل عددين حقيقيين a و b حيث $a>0$ و b كيفي.

8.4 دراسة الدالة $\exp(-\lambda x^2)$

2.8.4 تطبيقات $\lambda \succ 0$

تطبيق :

من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما λ، نعتبر الدوال g_λ المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$g_\lambda(x) = e^{-\lambda x^2}$$

نرمز بـ (Γ_λ) إلى المنحنيات الممثلة للدوال g_λ في معلم متعامد و متجانس $(O;I,J)$.

1. أحسب نهايتي الدالة g_λ عند $-\infty$ وعند $+\infty$. فسر بيانيا النتيجتين.
2. أدرس اتجاه تغير الدوال g_λ ثم شكل جدول تغيراتها.
3. بين أن كل المنحنيات (Γ_λ) تمر من نقطة ثابتة يطلب تعيينها.
4. أرسم في نفس الشكل المنحنيات (Γ_1)، (Γ_2) و (Γ_3).
5. أدرس الأوضاع النسبية للمنحنيين (Γ_λ) و $(\Gamma_{\lambda'})$ من أجل عددين حقيقيين λ و λ' حيث $0 < \lambda < \lambda'$.

الحل :

1-نهايتي الدالة f_λ عند $-\infty$ وعند $+\infty$. فسر بيانيا النتيجة الثانية.

لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty} f_\lambda(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-\lambda x^2} = 0$ لان $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0; \lim\limits_{x\to-\infty}(-\lambda x^2) = -\infty$ مركب دالتين

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} f_\lambda(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-\lambda x^2} = 0$ لان $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0; \lim\limits_{x\to-\infty}(-\lambda x^2) = -\infty$ مركب دالتين

2- اتجاه تغير الدوال f_λ ثم شكل جدول تغيراتها.

المشتقة: الدالة تقبل الاشتقاق حيث: $f_\lambda'(x) = -2x\,\lambda e^{-\lambda x^2}$

الاشارة: $f_\lambda'(x) = 0$ يعني ان $-2\lambda x e^{-\lambda x^2} = 0$ ومنه $e^{-\lambda x^2} \neq 0$ اي $x = 0$

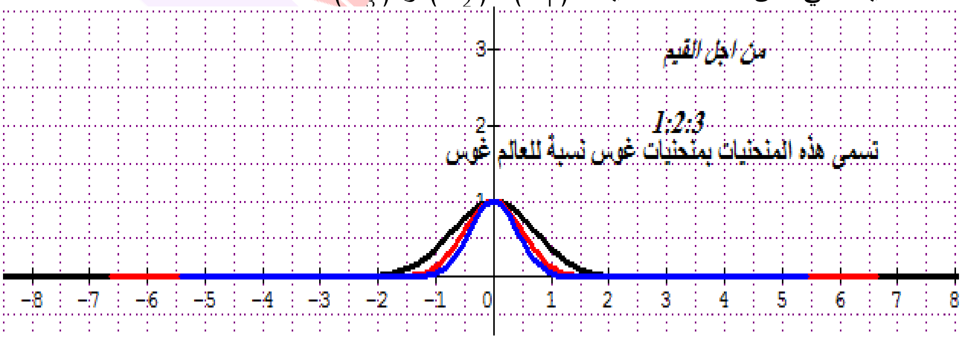
نعلم ان اشارة $e^{-\lambda x^2}$ دوما تتعلق باشارة $-\lambda x$

جدول التغيرات

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	1	-
$f(x)$	0 ↗	1	↘ 0

3-مهما كانت قيمة $0 \succ \lambda$ فان $-\lambda x = 0$ من اجل $x = 0$ وهذا كافي لان تكون كل المنحنيات (Γ_λ) تمر من نقطة ثابتة هي $(0,1)$

4-المنحنيات في نفس الشكل المنحنيات (Γ_1)، (Γ_2) و (Γ_3).



المسألة :

I_/ دالة مساعدة

f دالة عدد ية لمتغير حقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=1-(x^2-2x+2)e^{-x}$

1) أدرس التغيرات الدالة f

2) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حل وحيد α من المجال] 0.36 ، 0.35 [

3) أدرس اشارة الدالة f

II_/ الدالة المدروسة

لتكن الدالة g لمتغير حقيقي x المعرفة بـ : $g(x)=x-1+(x^2+2)e^{-x}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوى منسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(0.\vec{i}.\vec{j})$

1) عين مجموعة التعريف الدالة g

2) بين أن اشارة الدالة المشتقة g' من اشارة الدالة f

4) بين أن $g(\alpha)=\alpha(1+2e^{-\alpha})$ ، ثم اعط حصرا لـ : $g(\alpha)$ وستنتج الاشارة

5) ادرس التغيرات الدالة g

6) أ . بين أن المستقيم $(\Delta): y=x-1$ معادلة مستقيم مقارب مائل لـ بجوار $(+\infty)$

ب . ادرس الوضعية النسبية لـ (C_g) و (Δ)

7) اكتب معادلة المماس (d) لـ (C_g) عند النقطة فاصلتها $x_0=0$

8) انشئ (d) (C_g) ،

9) عين الأعداد الحقيقية a,b,c بحيث تكون الدالة : $k(x)=(ax^2+bx+c)e^{-x}$

حل للمعادلة التفاضلية $y'=(x^2+2)e^{-x}$

10) مثل بيانيا الدالة k

الحل:

f دالة عددية لمتغير حقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=1-(x^2-2x+2)e^{-x}$

1) دراسة التغيرات الدالة f

النهايات : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} 1-(x^2-2x+2)e^{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty} 1-x^2e^{-x}+2xe^{-x}-2e^{-x}=1$

لان $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2e^{-x}=0; \lim\limits_{x\to+\infty} 2xe^{-x}=0; \lim\limits_{x\to+\infty} -2e^{-x}=0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} 1-(x^2-2x+2)e^{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty} 1-x^2e^{-x}+2xe^{-x}-2e^{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty} 1-x^2e^{-x}=-\infty$

لان $\lim\limits_{x\to-\infty} -x^2=-\infty; \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=+\infty$

المشتقة :

الدالة تقبل الاشتقاق :

$f'(x)=(x^2-2x+2)e^{-x}-e^{-x}(2x-2)$

ومنه $f'(x)=e^{-x}(x^2-4x+4)$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	0	1

اشارة المشتقة :

$f'(x)\neq 0$ يعني ان $(x^2-4x+4)=0$ ومنه $x=2$ من اشارة (x^2-4x+4) موجبة دوما

2)المعادلة $f(x)=0$ تقبل حل وحيد α من المجال] 0.36 ، 0.35 [

$f(0.35)=1-(x^2-2x+2)e^{-x}=0.7$ و $f(0.37)=1-(x^2-2x+2)e^{-x}=0.1$

من خلال جدول التغيرات الدالة f متزايدة تماما فهي رتيبة ومستمرة على المجال] 0.36 ، 0.35 [

3) اشارة الدالة f من خلال جدول التغيرات يتضح ان الدالة

$f(x)\le 0 ...... x\in]-\infty;\alpha]$ و $f(x)\ge 0 ...... x\in[\alpha;+\infty[$

II/_ الدالة المدروسة

الدالة g لمتغير حقيقي x المعرفة بـ: $g(x)=x-1+(x^2+2)e^{-x}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي منسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(0.\vec{i}.\vec{j})$

1) مجموعة التعريف الدالة g هي $\mathbb{R}$

2) اشارة الدالة المشتقة g′ من اشارة الدالة f

الدالة g تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة هي : $g'(x)=1-(x^2+2)e^{-x}+2xe^{-x}=1-e^{-x}\left(x^2+2x+2\right)$

$g'(x)=f(x)$ اشارة g′ من اشارة f

4) اثبات أن $g(\alpha)=\alpha(1+2e^{-\alpha})$

$g(x)=x-1+(x^2+2)e^{-x}$

، حصرا لـ: $g(\alpha)$ وستنتج الاشارة

نعلم ان $0.35\ge\alpha\ge 0.36$ و $e^{-0.36}\ge e^{-\alpha}\ge e^{-0.35}$ اي $0.698\ge e^{-\alpha}\ge 0.705$ ومنه $2,396\ge 1+2e^{-\alpha}\ge 2.41$

ومنه $0.863\ge\alpha\left(1+2e^{-\alpha}\right)\ge 0,846$ ومنه $g(\alpha)\succ 0$

5) تغيرات الدالة g

النهايات :

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} x\underbrace{-1+(x^2+2)e^{-x}}_{=0}=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty} x-1+(x^2+2)e^{-x}=\lim_{x\to-\infty} e^{-x}\left(\underbrace{xe^{x}}_{=0}-\underbrace{e^{x}}_{=0}+\underbrace{(x^2+2)}_{=+\infty}\right)=+\infty$$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	
$g(x)$	$+\infty$	↘	$g(\alpha)$	↗	$+\infty$

6) أ. المستقيم $(\Delta): y=x-1$ معادلة مستقيم مقارب مائل لـ بجوار $(+\infty)$

$\lim_{x\to+\infty} g(x)-(x-1)=\lim_{x\to+\infty}(x^2+2)e^{-x}=\lim_{x\to+\infty}\underbrace{x^2e^{-x}}_{=0}+2e^{-x}=0$ المستقيم (Δ) مقارب لـ(C_f) بجوار $(+\infty)$

ب. الوضعية النسبية لـ(C_f) و (Δ)

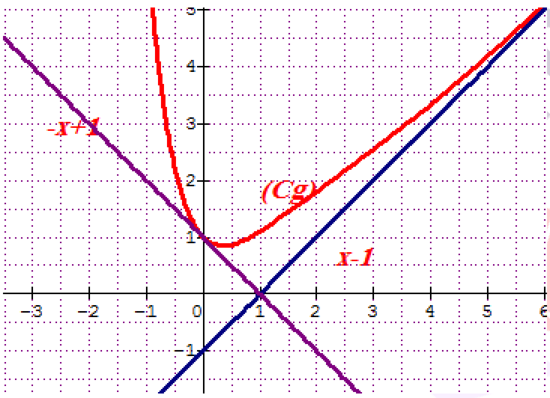
نعلم ان $g(x)-y=(x^2+2)e^{-x}$ ندرس اشارة $(x^2+2)e^{-x}$ لاحظ ان $(x^2+2)\succ 0$ و $e^{-x}\succ 0$ ومنه (C_f) فوق (Δ)

7) اكتب معادلة المماس (d) لـ(C_g) عند النقطة فاصلتها $x_0=0$

لدينا $g'(0)=1-e^{0}(2)=-1$ و $g(0)=0-1+(2)e^{0}=1$

ومنه $y=g'(0)x=g(0)=-x+1$

8) الرسم لـ(d) (C_g) ،



9) الأعداد الحقيقية a,b,c

الدالة: $k(x)=(ax^2+bx+c)e^{-x}$

حل للمعادلة التفاضلية $y'=(x^2+2)e^{-x}...(1)$

يعني ان للمعادلة $y'=(x^2+2)e^{-x}$ حل هو $y=k(x)$

ومنه $y'=(2ax+b)e^{-x}-e^{-x}\left(ax^2+bx+c\right)$

$y'=e^{-x}\left(-ax^2+x(2a-b)+b-c\right)......(2)$

بالمطابقة بين (1) و (2) نجد $a=-1;b=-2;c=-4$

ومنه $k(x)=(-x^2-2x-4)e^{-x}$

10) تمثيل بيانيا الدالة k