الدالة الأسية 2015

الدرس الرابع

الكفاءة المستهدفة

- تدرج دراسة بعض الأمثلة لدوال من الشكل: $x \mapsto e^{-\lambda x^2}$ حيث($\lambda > 0$)

المكتسبات القبلية

- حساب النهايات عند اطراف مجموعة التعريف لدوال مالوفة
- استعمال مبرهنات وتعاريف
- استعمال المشتقات . طريقة اولر .تعريف الاشتقاق
- الدوال العددية

ضف لمعلوماتك اللوغاريتم مشتق من اسم الخوارزمي *Algoritmi الاسم اللاتيني . دالة الاس النبري*
لُوغارِيتْم (اسم) : عَدَد لِأَسَاس مَا هُو الْأُسّ الَّذِي يُرْفَع إِلَيه الْأَسَاس لِيَنْتُج ذَلِك الْعَدد مثلا 125 ناتجة عن الاس 3 للعدد 5
النيبري هو الثابت في القيمة يكون غالبا واضح في معظم العمليات مثل العدد باي ....الخ

التوقيت	سـيـــــــــــــر الدرس
	نشاط

وثائق التحضير	الوسائل البيداغوجية	نقد ذاتي
• دليل الأستاذ • الكتاب المدرسي • المنهاج • الهباج في الرياضيات • مذكرات شايبي امين	• السبورة •	

المؤسســــــة:	المستـــــــوى: الثالثة رياضيات
السنة الدراسية:	ميــدان التعلم: تحليل
التاريـــــــخ:	الوحدة التعلمية: الدالة الاسية
توقيت الحصة :	موضوع الحصة : دراسة الدالة $\exp(-\lambda x),\exp(-\lambda x^2)$

المكتسبات المستهدفة: دراسة دوال اسية مركبة

الأنشطة المقترحة وطبيعتها	الإنجاز (ســـير الحصة)	التعليمات والتوجيهات

نشاط 01:

8.4 دراسة الدالة $\exp(-\lambda x)$

1.8.4 تطبيقات $\lambda \succ 0$

تطبيق :

من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما λ، نعتبر الدوال f_λ المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f_\lambda(x)=e^{-\lambda x}$$

نرمز بِـ (C_λ) إلى المنحنيات الممثلة للدوال f_λ في معلم متعامد و متجانس $(O;I,J)$.

1. أحسب نهايتي الدالة f_λ عند $-\infty$ وعند $+\infty$. فسر بيانيا النتيجة الثانية.
2. أدرس اتجاه تغير الدوال f_λ ثم شكل جدول تغيراتها.
3. بين أن كل المنحنيات (C_λ) تمر من نقطة ثابتة يطلب تعيينها.
4. أرسم في نفس الشكل المنحنيات (C_1)، (C_2) و (C_3).
5. أدرس الأوضاع النسبية للمنحنيين (C_λ) و $(C_{\lambda'})$ من أجل عددين حقيقيين λ و λ' حيث $0<\lambda<\lambda'$.

الحل :

1-نهايتي الدالة f_λ عند $-\infty$ وعند $+\infty$. فسر بيانيا النتيجة الثانية.

لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty} f_\lambda(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-\lambda x}=+\infty$ لان $\lim\limits_{x\to-\infty}(-\lambda x)=+\infty$;= $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x}$ مركب دالتين

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} f_\lambda(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-\lambda x}=0$ لان $\lim\limits_{x\to+\infty}(-\lambda x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}=0$ مركب دالتين

2- اتجاه تغير الدوال f_λ ثم شكل جدول تغيراتها.

المشتقة: الدالة تقبل الاشتقاق حيث: $f_\lambda'(x)=-\lambda e^{-\lambda x}$

الاشارة : $f_\lambda'(x)=0$ يعني ان $-\lambda e^{-\lambda x}=0$ ومنه $e^{-\lambda x}\neq 0$

نعلم ان $e^{-\lambda x}\succ 0$ دوما وبما ان $-\lambda\prec 0$ فان $-\lambda e^{-\lambda x}\prec 0$

جدول التغيرات

x	$-\infty$ 0 $+\infty$
$f'(x)$	-
$f(x)$	$+\infty$ ↘ 1 ↘ 0

3-مهما كانت قيمة $\lambda\succ 0$ فان $-\lambda x=0$ من اجل $x=0$ وهذا كافي لان تكون كل المنحنيات (C_λ) تمر من نقطة ثابتة هي $(0,1)$

4-المنحنيات في نفس الشكل المنحنيات (C_1)، (C_2) و (C_3).

التعليمات والتوجيهات:

- تدرج دراسة بعض الأمثلة لدوال من الشكل: $x\mapsto e^{-\lambda x^2}$
- حيث $(\lambda>0)$
- $x\mapsto a^x$ حيث $(a>0)$ أو $x\mapsto x^a$ (حيث: $x>0$ و $a\in\mathbb{Q}$) بالنسبة لأي شعبة؟
- نقبل العلاقة: $a^b=e^{b\ln a}$ من أجل كل عددين حقيقيين a و b حيث $a>0$ و b كيفي.

8.4 دراسة الدالة $\exp(-\lambda x^2)$

2.8.4 تطبيقات $\lambda \succ 0$

تطبيق :

من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما λ، نعتبر الدوال g_λ المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$g_\lambda(x) = e^{-\lambda x^2}$$

نرمز بِـ (Γ_λ) إلى المنحنيات الممثلة للدوال g_λ في معلم متعامد و متجانس $(O;I,J)$.

1. أحسب نهايتي الدالة g_λ عند $-\infty$ وعند $+\infty$. فسر بيانيا النتيجتين.
2. أدرس اتجاه تغير الدوال g_λ ثم شكل جدول تغيراتها.
3. بين أن كل المنحنيات (Γ_λ) تمر من نقطة ثابتة يطلب تعيينها.
4. أرسم في نفس الشكل المنحنيات (Γ_1)، (Γ_2) و (Γ_3).
5. أدرس الأوضاع النسبية للمنحنيين (Γ_λ) و $(\Gamma_{\lambda'})$ من أجل عددين حقيقيين λ و λ' حيث $0 < \lambda < \lambda'$.

الحل :

1-نهايتي الدالة f_λ عند $-\infty$ وعند $+\infty$. فسر بيانيا النتيجة الثانية.

لدينا $\lim_{x \to -\infty} f_\lambda(x) = \lim_{x \to -\infty} e^{-\lambda x^2} = 0$ **لان** $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0; \lim_{x \to -\infty} (-\lambda x^2) = -\infty$ **مركب دالتين**

لدينا $\lim_{x \to +\infty} f_\lambda(x) = \lim_{x \to +\infty} e^{-\lambda x^2} = 0$ **لان** $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0; \lim_{x \to +\infty} (-\lambda x^2) = -\infty$ **مركب دالتين**

2- اتجاه تغير الدوال f_λ ثم شكل جدول تغيراتها.

المشتقة: الدالة تقبل الاشتقاق حيث: $f_\lambda'(x) = -2x\lambda e^{-\lambda x^2}$

الاشارة : $f_\lambda'(x) = 0$ **يعني ان** $-2\lambda x e^{-\lambda x^2} = 0$ **ومنه** $e^{-\lambda x^2} \neq 0$ **اي** $x = 0$

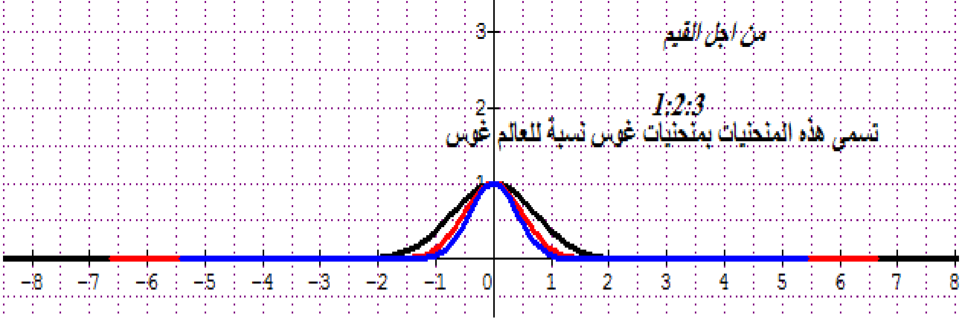
نعلم ان اشارة $e^{-\lambda x^2}$ **دوما تتعلق باشارة** $-\lambda x$

جدول التغيرات

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	1	-
$f(x)$	0 ↗	1	↘ 0

3-مهما كانت قيمة $\lambda \succ 0$ فان $-\lambda x = 0$ من اجل $x = 0$ وهذا كافي لان تكون كل المنحنيات (Γ_λ) تمر من نقطة ثابتة هي $(0,1)$

4-المنحنيات في نفس الشكل المنحنيات (Γ_1)، (Γ_2) و (Γ_3).



المسألة :

I_/ دالة مساعدة

f دالة عدد ية لمتغير حقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=1-(x^2-2x+2)e^{-x}$

1) أدرس التغيرات الدالة f

2) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حل وحيد α من المجال] 0.36 ، 0.35 [

3) أدرس اشارة الدالة f

II_/ الدالة المدروسة

لتكن الدالة g لمتغير حقيقي x المعرفة بـ : $g(x)=x-1+(x^2+2)e^{-x}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي منسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(0.\vec{i}.\vec{j})$

1) عين مجموعة التعريف الدالة g

2) بين أن اشارة الدالة المشتقة g' من اشارة الدالة f

4) بين أن $g(\alpha)=\alpha(1+2e^{-\alpha})$ ، ثم اعط حصرا لـ : $g(\alpha)$ وستنتج الاشارة

5) ادرس التغيرات الدالة g

6) أ . بين أن المستقيم $(\Delta): y=x-1$ معادلة مستقيم مقارب مائل لـ بجوار $(+\infty)$

ب . ادرس الوضعية النسبية لـ (C_g) و (Δ)

7) اكتب معادلة المماس (d) لـ (C_g) عند النقطة فاصلتها $x_0=0$

8) انشئ (d) (C_g) ،

9) عين الأعداد الحقيقية a,b,c بحيث تكون الدالة : $k(x)=(ax^2+bx+c)e^{-x}$

حل للمعادلة التفاضلية $y'=(x^2+2)e^{-x}$

10) مثل بيانيا الدالة k

الحل:

f دالة عددية لمتغير حقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=1-(x^2-2x+2)e^{-x}$

1) دراسة التغيرات الدالة f

النهايات : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} 1-(x^2-2x+2)e^{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty} 1-x^2e^{-x}+2xe^{-x}-2e^{-x}=1$

لان $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2e^{-x}=0;\ \lim\limits_{x\to+\infty} 2xe^{-x}=0;\ \lim\limits_{x\to+\infty} -2e^{-x}=0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} 1-(x^2-2x+2)e^{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty} 1-x^2e^{-x}+2xe^{-x}-2e^{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty} 1-x^2e^{-x}=-\infty$

لان $\lim\limits_{x\to-\infty} -x^2=-\infty;\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=+\infty$

المشتقة :

الدالة تقبل الاشتقاق :

$f'(x)=(x^2-2x+2)e^{-x}-e^{-x}(2x-2)$

ومنه $f'(x)=e^{-x}(x^2-4x+4)$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		+		+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	1

اشارة المشتقة :

$f'(x)\neq 0$ يعني ان $(x^2-4x+4)=0$ ومنه $x=2$ من اشارة (x^2-4x+4) موجبة دوما

2)المعادلة $f(x)=0$ تقبل حل وحيد α من المجال] 0.36 ، 0.35 [

$f(0.35)=1-(x^2-2x+2)e^{-x}=0.7$ و $f(0.37)=1-(x^2-2x+2)e^{-x}=0.1$

من خلال جدول التغيرات الدالة f متزايدة تماما فهي رتيبة ومستمرة على المجال] 0.36 ، 0.35 [

3) اشارة الدالة f من خلال جدول التغيرات يتضح ان الدالة

$f(x) \le 0 ...... x \in]-\infty ; \alpha]$ و $f(x) \ge 0 ...... x \in [\alpha ; +\infty[$

II/_ الدالة المدروسة

الدالة g لمتغير حقيقي x المعرفة بـ : $g(x) = x - 1 + (x^2+2)e^{-x}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي منسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(0.\vec{i}.\vec{j})$

1) مجموعة التعريف الدالة g هي $\mathbb{R}$

2) اشارة الدالة المشتقة g' من اشارة الدالة f

الدالة g تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة هي : $g'(x) = 1 - (x^2+2)e^{-x} + 2xe^{-x} = 1 - e^{-x}\left(x^2+2x+2\right)$

$g'(x) = f(x)$ اشارة g' من اشارة f

4) اثبات أن $g(\alpha) = \alpha(1+2e^{-\alpha})$

$g(x) = x - 1 + (x^2+2)e^{-x}$

، حصرا لـ : $g(\alpha)$ وستنتج الاشارة

نعلم ان $0.35 \ge \alpha \ge 0.36$ و $e^{-0.36} \ge e^{-\alpha} \ge e^{-0.35}$ اي $0.698 \ge e^{-\alpha} \ge 0.705$ ومنه $2,396 \ge 1+2e^{-\alpha} \ge 2.41$

ومنه $0.863 \ge \alpha\left(1+2e^{-\alpha}\right) \ge 0,846$ ومنه $g(\alpha) \succ 0$

5) تغيرات الدالة g

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$g(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

النهايات :

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} x - 1 + \underbrace{(x^2+2)e^{-x}}_{=0} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} x - 1 + (x^2+2)e^{-x} = \lim_{x\to-\infty} e^{-x}\left(\underbrace{xe^{x}}_{=0} - \underbrace{e^{x}}_{=0} + \underbrace{(x^2+2)}_{=+\infty}\right) = +\infty$$

6) أ . المستقيم $(\Delta) : y = x - 1$ معادلة مستقيم مقارب مائل لـ بجوار $(+\infty)$

$\lim_{x\to+\infty} g(x) - (x-1) = \lim_{x\to+\infty} (x^2+2)e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{x^2e^{-x}}_{=0} + 2e^{-x} = 0$ المستقيم (Δ) مقارب لـ (C_f) بجوار $(+\infty)$

ب . الوضعية النسبية لـ (C_f) و (Δ)

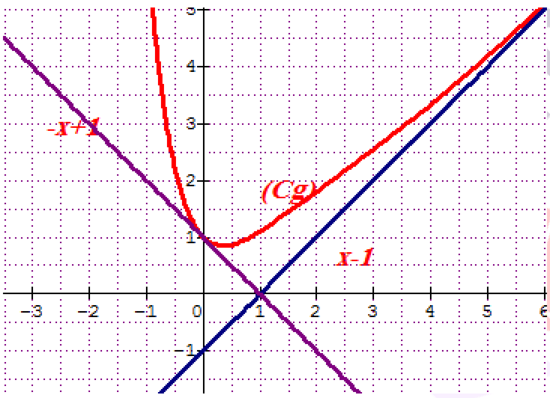
نعلم ان $g(x) - y = (x^2+2)e^{-x}$ ندرس اشارة $(x^2+2)e^{-x}$ لاحظ ان $(x^2+2) \succ 0$ و $e^{-x} \succ 0$ ومنه (C_f) فوق (Δ)

7) اكتب معادلة المماس (d) لـ (C_g) عند النقطة فاصلتها $x_0 = 0$

لدينا $g'(0) = 1 - e^0(2) = -1$ و $g(0) = 0 - 1 + (2)e^0 = 1$

ومنه $y = g'(0)x = g(0) = -x + 1$

8) الرسم لـ (d) (C_g) ،



9) الأعداد الحقيقية a, b, c

الدالة : $k(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$

حل للمعادلة التفاضلية $y' = (x^2+2)e^{-x} ...(1)$

يعني ان للمعادلة $y' = (x^2+2)e^{-x}$ حل هو $y = k(x)$

$y' = (2ax + b)e^{-x} - e^{-x}\left(ax^2 + bx + c\right)$

ومنه

$y' = e^{-x}\left(-ax^2 + x(2a - b) + b - c\right) ......(2)$

بالمطابقة بين (1) و (2) نجد $a = -1; b = -2; c = -4$

ومنه $k(x) = (-x^2 - 2x - 4)e^{-x}$

10) تمثيل بيانيا الدالة k