القسم : 3ت رياضي المحـــور (الدوال الاسية و اللوغاريتمية (تابع))

الحصة:تحليل الموضوع: تعريف الدالة الاسية و نتائجه المدة القترحة : 2 ســــــاعة

المكتسبات القبلية	الكفاءات المستهدفة
1. تقريب اولر + الدالة الثابتة 2. مشتقة قسمة دالتين	• تعريف الدالة الاسية و نتائجه • قواعد الحساب بالدلة الاسية

مراحل سير الحصة

حل النشاط : ص76 — 55 د

الدرس :

الدالة الأسية

مبرهنة و تعريف: توجد دالة وحيدة f قابلة للاشتقاق على R بحيث $f'=f$ و $f(0)=1$. — 15 د

نرمز إلى هذه الدالة بالرمز " exp " و نسميها الدالة الأسية (النيبيرية).

ملاحظة: الدالة الأسية هي إذن الحل الخاص للمعادلة التفاضلية $y'=y$ التي تحقق $y(0)=1$.

نتائج: * $\exp(0)=1$. * من أجل كل عدد حقيقي x، $\exp'(x)=\exp(x)$.

2. خواص جبرية : من أجل كل عددين حقيقيين x، y و من أجل كل عدد صحيح نسبي n لدينا:

$$\exp(x)\neq 0 \quad (1) \qquad \exp(-x)=\frac{1}{\exp(x)} \quad (2)$$

$$\exp(x+y)=\exp(x)\times\exp(y) \quad (3) \qquad \exp(x-y)=\frac{\exp(x)}{\exp(y)} \quad (4)$$

$$\exp(nx)=\left[\exp(x)\right]^n \quad (5)$$

3. العدد e و الترميز e^x

* العدد e هو صورة العدد 1 بالدالة الأسية أي $e=\exp(1)$. تعطينا الحاسبة $e\approx 2{,}718281828$.

* من أجل كل عدد صحيح نسبي n، $\exp(n)=\exp(n\times 1)=\left[\exp(1)\right]^n$.

لدينا إذن: من أجل كل عدد صحيح نسبي n، $\exp(n)=e^n$.

اصطلاحا نرمز، من أجل كل عدد حقيقي x، إلى $\exp(x)$ بـِ e^x.

من أجل كل عدد حقيقي x، $\exp(x)=e^x$

ملاحظة: الترميز السابق متلائم مع خواص القوى في الحالة التي يكون فيها الأس عددا صحيحا.

باستعمال الاصطلاح السابق تكتب خواص الدالة الأسية كما يلي:

يتبـــــــــــع

الوسائل التعليمية	جهاز الحاسوب و العاكس
المراجع	الكتاب المدرسي

	قواعد الحساب: من أجل كل عددين حقيقيين x ، y و من أجل كل عدد صحيح نسبي n لدينا: * $e^0=1$ * $\exp'(x)=e^x$ * $e^{-x}=\frac{1}{e^x}$ * $e^{x+y}=e^x e^y$ * $e^{x-y}=\frac{e^x}{e^y}$ * $e^{nx}=(e^x)^n$ التقويم: تمارين :1/ ص102رقم 02 و 03 2/ ص 102 رقم 04 تمرين منزلي : ص رقم	40 د

القسم : 3ت رياضي **المحـــور :** الدوال الاسية و اللوغاريتمية (تابع)

الحصة : تحليل **الموضوع : الدوال الأسية:** $x \mapsto e^{kx}$ **المدة المقترحة :** 1 ســــاعة

الكفاءات المستهدفة	المكتسبات القبلية
* حلول المعادلة $f' = kf$ * دوال تحول المجموع إلى جداء	1. مشتقة قسمة دالتين 2. الخاصية الاساسية للدالة الاسية

15 د 3 د 15 د 3 د 20 د	**حل النشاط 1:** بين ان الدالة f المعرفة على R بـ : $f : x \mapsto e^{kx}$ حيث k عددا حقيقيا.هي الدالة الوحيدة التي تحقق: $f' = kf$ و $f(0) = 1$. **الحل :** اثبات الوحدانية : ناخذ الدالة h المعرفة علىR بِـ $h(x) = \dfrac{g(x)}{f(x)}$.ونبين انها ثابتة الدرس : **1. حلول المعادلة** $f' = kf$: مبرهنة : ليكن k عددا حقيقيا. توجد دالة وحيدة f قابلة للاشتقاق علىR بحيث $f' = kf$ و $f(0) = 1$. هي الدالة $f : x \mapsto e^{kx}$. برهان : انظر النشاط نشاط 2 : لتكن f دالة غير معدومة و قابلة للاشتقاق على R بحيث: من أجل كل x، y من R، $f(x+y) = f(x)f(y)$ 1/ احسب $f(0)$ من اجل $x = 0$ و $y = 0$ 2/ اشتق الطرفين بالنسبة إلى x مع اعتبار y ثابت حقيقي ثم احسب $f'(y)$ 3/ بوضع $k = f'(0)$ استنتج ان من أجل كل y منR، $f'(y) = kf(y)$. ثم من أجل كل x منR، $f(x) = e^{kx}$. 4/ بين انه اذاكانت f الدالة المعرفة علىR بِـ $f(x) = e^{kx}$ فانها تحقق: من أجل كل x، y منR، $f(x+y) = f(x)f(y)$ **2. دوال تحول المجموع إلى جداء** **مبرهنة:** الدوال غير المعدومة f و القابلة للاشتقاق علىR بحيث: من أجل كل عددين حقيقيين x و y، $f(x+y) = f(x)f(y)$ هي الدوال $x \mapsto e^{kx}$ حيث k عدد حقيقي. تقويم : 1. ص 102 رقم 12 2. ص 103 رقم 16 تطبيق منزلي : ص 102 رقم 15	**مراحل سير الحصة**
		الوسائل التعليمية
	الكتاب المدرسي	**المراجع**

القسم : 3ت رياضي **المحـــور :** الدوال الاسية و اللوغاريتمية (تابع)

الحصة : تحليل **الموضوع :** دراسة الدالة الأسية **المدة المقترحة :** 1 ســـــاعة

الكفاءات المستهدفة	المكتسبات القبلية
* دراسة الدالة الأسية	1 . نظريات النهايات و الحصر 2. تعريف العدد المشتق

30 د 25 د	نشاط مقترح: 1. ادرس تغيرات الدالة $\boxed{f : x \mapsto e^x - x}$ ثم استنتج اشارتها في R^+ ثم باستعمال نظرية الحصراوجد $\lim_{x \to +\infty} e^x$ ثم استنتج $\lim_{x \to -\infty} e^x$. 2. باستعمال العددالمشتق اوجد $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}$. 3. حدداتجاه تغير الدالة الاسية . 4. اعط جدول تغيرات الدالة الاسية. **1. اتجاه تغير الدالة الأسية** **خاصية1:** من أجل كل عدد حقيقي x، $e^x > 0$. **البرهان:** من أجل كل x من R ، $e^x = e^{2 \times \frac{x}{2}} = \left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2$ **خاصية2:** الدالة الأسية متزايدة تماما على R. **البرهان:** انظر النشاط **نتائج:** • من أجل كل عددين حقيقيين a و b لدينا: $e^a < e^b$ يعني $a < b$. • من أجل كل عددين حقيقيين a و b لدينا: $e^a = e^b$ يعني $a = b$. • من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $0 < e^x < 1$ يعني $x < 0$. • من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $e^x > 1$ يعني $x > 0$. **2. النهايات** خواص: (1) $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$. (2) $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$. (3) $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$. **البرهان:** انظر النشاط **3. جدول تغيرات ـ التمثيل البياني** *المنحنى (C) الممثل للدالة الأسية يقبل محور الفواصل كمستقيم مقارب لما يؤول x إلى $-\infty$ **نتيجة:** الدالة $x \mapsto 1 + x$ هي أحسن تقريب تآلفي للدالة $x \mapsto e^x$ بجوار 0 . <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$ 0 $+\infty$</td></tr><tr><td>$\exp'(x)$</td><td>+</td></tr><tr><td>e^x</td><td>0 ↗ 1 ↗ $+\infty$</td></tr></table> تقويم : تطبيق1/ ص 102 رقم 09 تطبيق2/ ص 103 رقم 26 تطبيق منزلي : ص 104 رقم 46	مراحل سير الحصة
		الوسائل التعليمية
	الكتاب المدرسي	**المراجع**

القسم : 3ت رياضي المحـــور : الدوال الاسية و اللوغاريتمية (تابع)

الحصة : تحليل الموضوع : دراسة الدالة $\exp\circ u$ المدة المقترحة : 1 ســـــاعة

الكفاءات المستهدفة	المكتسبات القبلية
* دراسة الدالة $\exp\circ u$	1 . المبرهنة الخاصة بنهاية دالة مركبة 2. المبرهنة الخاصة باتجاه تغير الدالة مركبة

مراحل سير الحصة	نشاط مقترح: **الدرس** **2. اتجاه التغيرات** **خاصية:** إذا كانت u دالة معرفة على مجال I فإن للدالتين u و $\exp\circ u$ نفس اتجاه التغيرات على المجال I. امثلة : **3. المشتقة** **خاصية:** إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I فإن الدالة $\exp\circ u$ قابلة للاشتقاق على I و لدينا من أجل كل x من I، $(\exp\circ u)'(x)=u'(x)e^{u(x)}$. امثلة : تقويم : تطبيق1/ ادرس تغيرات الدالة : $f : x \mapsto e^{\frac{x+1}{x-1}}$ ثم اعط جدول تغيراتها تطبيق منزلي : ص 104 رقم 45	20 د 15 د 20 د
الوسائل التعليمية		
المراجع	الكتاب المدرسي	

القسم : 3ت رياضي **المحـــور:** الدوال الاسية و اللوغاريتمية (تابع)

الحصة : تحليل **الموضوع :** الدالة اللوغاريتمية ونتائجها **المدة القترحة :** 1 ســـــاعة

المكتسبات القبلية	الكفاءات المستهدفة
1 . الدالة exp ونتائجها 2. مبرهنة القيم المتوسطة	* التعرف على الدالة **Ln** ونتائجها

مراحل سير الحصة		
مراحل سير الحصة	النشاط : الثاني ص 77 **1. اللوغاريتم النيبيري لعدد** **مبرهنة و تعريف:** من أجل كل عدد حقيقي a من $]0;+\infty[$ ، يوجد عدد حقيقي وحيد b بحيث $e^b=a$. يسمي هذا العدد " اللوغاريتم النيبيري للعدد a " و نرمز إليه بالرمز" $\ln a$ ". **مثال:** * العدد الحقيقي الوحيد b الذي يحقق $e^b=2$ هو إذن $\ln 2$. **2. تعريف الدالة " ln "** **تعريف:** نسمي " الدالة اللوغاريتمية النيبيرية " الدالة التي نرمز إليها بالرمز" ln " و التي ترفق بكل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$ العدد الحقيقي $\ln x$. **نتائج:** 1. من أجل كل x من $]0;+\infty[$ و من أجل كل y منR، $x=e^y$ يعني $y=\ln x$. 2. من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ، $e^{\ln x}=x$. 3. من أجل كل x منR، $\ln\left(e^x\right)=x$. 4 . بما أن $e^0=1$ فإن $\ln 1=0$ و بما أن $e^1=e$ فإن $\ln e=1$. **خاصية:** في معلم متعامد و متجانس، التمثيلان البيانيان للدالتين الأسية و اللوغاريتمية النيبيرية متناظران بالنسبة إلى المستقيم ذو المعادلة $y=x$ (المنصف الأول). **3. اتجاه تغير الدالة اللوغاريتمية النيبيرية** **خاصية:** الدالة اللوغاريتمية النيبيرية متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$. **نتائج:** من أجل كل عددين حقيقيين a و b من $]0;+\infty[$: 1. $\ln a=\ln b$ يعني $a=b$. 2. $\ln a<\ln b$ يعني $a<b$. 3. $\ln a>0$ يعني $a>1$ و $\ln a<0$ يعني $0<a<1$ كما أن $\ln 1=0$. تقويم : تطبيق1/ ص 102 رقم 09 تطبيق منزلي : ص 104 رقم 45	20 د 15 د 20 د
الوسائل التعليمية		
المراجع	الكتاب المدرسي	

القسم : 3ت رياضي المحـــور : الدوال الاسية و اللوغاريتمية (تابع)

الحصة : تحليل الموضوع : خواص الدالة اللوغاريتمية المدة المقترحة : 1 ســــــاعة

الكفاءات المستهدفة	المكتسبات القبلية
* خواص الدالة Ln	1 . * الدالة Ln ونتائجها 2 . * خواص الدالة exp

20 د 15 د 20 د	نشاط : الدرس **1. الخاصية الأساسية** **خاصية:** من أجل كل عددين حقيقيين a و b من $]0;+\infty[$ ، $\ln(ab)=\ln a+\ln b$. امثلة : **2. نتائج** **نتيجة1:** من أجل كل عددين حقيقيين a و b من $]0;+\infty[$ ، $\ln\left(\frac{1}{a}\right)=-\ln a$ و $\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln a-\ln b$ **ملاحظة:** (تبرهن بالتراجع) من أجل كل أعداد حقيقية a_1 ، a_2 ،...، a_n من $]0;+\infty[$ $\ln(a_1a_2...a_n)=\ln a_1+\ln a_2+...+\ln a_n$. **نتيجة2:** من أجل كل عدد حقيقي a من $]0;+\infty[$ ومن أجل كل عدد صحيح نسبي n $\ln(a^n)=n\ln a$ امثلة : **نتيجة3:** من أجل كل عدد حقيقي a من $]0;+\infty[$ ، $\ln(\sqrt{a})=\frac{1}{2}\ln a$. تقويم : تطبيق 1/ ص 106 رقم 62 تطبيق 2/ ص 107 رقم 67 (الفرع 3) تطبيق منزلي : ص 107رقم 66 و 68	مراحل سير الحصة
		الوسائل التعليمية
	الكتاب المدرسي	المراجع

القسم : 3ت رياضي **المحـــور: الدوال الاسية و اللوغاريتمية (تابع)** **يوم : 15/ 11 / 2009**

الحصة : تحليل **الموضوع : دراسة الدالة اللوغاريتمية** **المدة المقترحة : 1 ســـاعة**

المكتسبات القبلية	الكفاءات المستهدفة
1 . * **تعريف النهاية** 2 . * مشتقة مركب دالتين	دراسة الدالة **Ln**

مراحل سير الحصة

نشاط مقترح

20 د

الدرس

1. **النهايات** : $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \quad (1)$ و $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty \quad (2)$

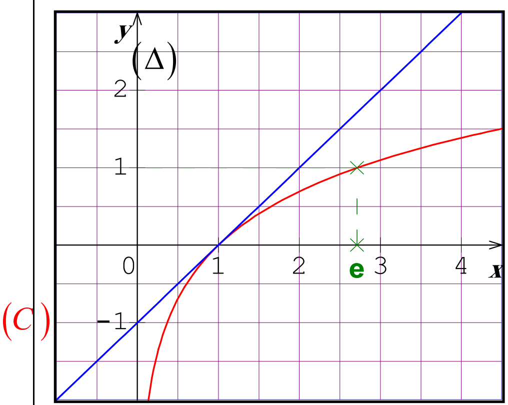
2. **الاستمرارية و الاشتقاقية**

<u>خواص:</u> الدالة " ln " مستمرة و قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ و لدينا من أجل كل x من $]0;+\infty[$; $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

15 د

3. **جدول تغيرات الدالة " ln "**

x	0	1	$+\infty$
$\ln'(x)$	‖	$+$	
$\ln x$	‖ $-\infty$	0	$+\infty$



20 د

• باستعمال تعريف العدد المشتق نجد: $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$ أو $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$

تقويم : تطبيق 1/ ص رقم

الوسائل التعليمية	
المراجع	الكتاب المدرسي

القسم : 3ت رياضي المحـــور: الدوال الاسية و اللوغاريتمية (تابع)

الحصة : تحليل الموضوع : دالة اللوغاريتمية العشري المدة المقترحة : 1 ســـــاعة

الكفاءات المستهدفة	المكتسبات القبلية
* التعرف على دالة اللوغاريتمية العشري	1 . خواص الدالة Ln

مراحل سير الحصة	النشاط : لتكن f الدالة المعرفة بـ : $f(x)=\frac{\ln x}{\ln 10}$. 1* عين مجموعة تعريف f . 2* احسب : $f(1)$ و $f(10)$. 3* ادرس تغيرات الدالة f . 4* بين ان من اجل كل a و b من $]0;+\infty[$ فان : أ) $f(ab)=f(a)+f(b)$ ب) $f\left(\frac{a}{b}\right)=f(a)-f(b)$ 5* بين انه اذا كان x عددا حقيقيا حيث $10^n \leq x \leq 10^{n+1}$ فان $n \leq f(x) \leq n+1$ الدرس 1. دالة اللوغاريتم العشري تعريف: نسمي دالة اللوغاريتم العشري الدالة التي نرمز إليها بالرمز" log " و المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $\log x=\frac{\ln x}{\ln 10}$ 2. خواص خاصية1: من أجل كل عددين حقيقيين a و b من $]0;+\infty[$، $\log(ab)=\log a+\log b$. امثلة : نتائج: 1. من أجل كل عددين حقيقيين a و b من $]0;+\infty[$، $\log\left(\frac{a}{b}\right)=\log a-\log b$. 2. من أجل كل عدد حقيقي a من $]0;+\infty[$ و من أجل كل عدد صحيح نسبي n، $\log(a^n)=n\log a$. حالة خاصة: من أجل كل عدد صحيح نسبي n، $\log(10^n)=n$ لأن $\log 10=1$. خاصية2: الدالة " log " متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$. نتيجة: إذا كان x عددا حقيقيا حيث $10^n \leq x \leq 10^{n+1}$ فإن $n \leq \log x \leq n+1$ تقويم : تطبيق1/ ص 109 رقم 98 , 100 و 101 تطبيق منزلي : ص 109 رقم 99	20 د 15 د 20 د
الوسائل التعليمية		
المراجع	الكتاب المدرسي	

القسم : 3ت رياضي **المحـــــور:** الدوال الاسية و اللوغاريتمية (تابع)

الحصة : تحليل **الموضوع :** دراسة الدالة $\ln\circ u$ **المدة المقترحة :** 1 ســـــاعة

الكفاءات المستهدفة	المكتسبات القبلية
* دراسة الدالة $\ln\circ u$	1. نظرية نهاية مركب دالتين 2. نظرية مشتقة مركب دالتين

20 د 15 د 20 د	النشاط : لتكن f الدالة المعرفة بـ : $f(x) = \ln\frac{1}{x-2}$. 1* عين مجموعة تعريف f . 2* ادرس تغيرات الدالة f . 3* اعط جدول تغيرات الدالة f . 4* بين ان من اجل كل y من R فان : $f(x) = y$ تقبل حلا واحدا. ثم حل المعادلة $f(x) = y$. اي عبر بالحساب عن x بدلالة y . **الدرس** 1. **النهايات** لحساب نهاية الدالة " $\ln\circ u$ " نستعمل نظرية نهاية مركب دالتين . امثلة : **2. اتجاه التغيرا ت** **خاصية:** إذا كانت u دالة معرفة و موجبة تماما على مجال I فإن للدالتين u و $\ln\circ u$ نفس اتجاه التغيرات على المجال I. امثلة : **3. المشتقة** **خاصية:** إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق و موجبة تماما على مجال I فإن الدالة $\ln\circ u$ قابلة للاشتقاق على I و لدينا من أجل كل x من I، $(\ln\circ u)'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$. تقويم : تطبيق1/ ص 108 رقم 84 و 88 تطبيق منزلي : ص 109 رقم 95	مراحل سير الحصة
		الوسائل التعليمية
	الكتاب المدرسي	**المراجع**

القسم : 3ت رياضي   المحـــور: الدوال الاسية و اللوغاريتمية (تابع)

الحصة : تحليل   الموضوع : المعادلة التفاضلية من الشكل $y' = ay + b$ المدة المقترحة : 1 ســـاعة

الكفاءات المستهدفة	المكتسبات القبلية

	اعمال موجهة	
2 د 10 د 2 د 6 د 10 د 2 د	* حل المعادلة التفاضلية $y' = ay + b$ هو تعيين كل الدوال f القابلة للاشتقاق على R و التي تحقق من أجل كل عدد حقيقي x: $f'(x) = af(x) + b$ حيث a و b عددان حقيقيان مع $a \neq 0$. **1. المعادلة التفاضلية $y' = ay$ مع $a \neq 0$** **تمرين موجه1 :** نعتبر المعادلة التفاضلية: $(E)\quad y' = ay$ حيث $a \neq 0$ • بين أن الدالة f المعرفة على R بـِ: $f(x) = Ce^{ax}$ حيث C عدد حقيقي هي حل للمعادلة التفاضلية (E). • نفرض أن الدالة g حل للمعادلة التفاضلية (E). أثبت أن الدالة h المعرفة على R بـِ : $h(x) = e^{-ax}g(x)$ دالة ثابتة على R , ثم استنتج عبارة $g(x)$. **مبرهنة1:** a عدد حقيقي غير معدوم. الحلول على R للمعادلة التفاضلية $y' = ay$ هي الدوال $x \mapsto Ce^{ax}$ حيث C عدد حقيقي ثابت كيفي. **تطبيق1:** حل في R المعادلة التفاضلية: $3y' - 2y = 0$. **2. المعادلة التفاضلية $y' = ay + b$ مع $a \neq 0$** **تمرين موجه2 :** نعتبر المعادلة التفاضلية: $(E')\quad y' = ay + b$ حيث $a \neq 0$ * أثبت أن الدالة f المعرفة على R بـِ: $f(x) = Ce^{ax} - \frac{b}{a}$ حيث C عدد حقيقي كيفي هي حل للمعادلة (E'). * نفرض أن الدالة g حل للمعادلة التفاضلية (E'). لتكن h الدالة المعرفة على R بـِ $h(x) = g(x) + \frac{b}{a}$ - أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x، $h'(x) = ah(x)$. - استنتج من مبرهنة1 عبارة $h(x)$ و من ثم عبارة $g(x)$. **مبرهنة:** a و b عددان حقيقيان مع a غير معدوم. الحلول على R للمعادلة التفاضلية $y' = ay + b$ هي الدوال $x \mapsto Ce^{ax} - \frac{b}{a}$ حيث C عدد حقيقي ثابت كيفي. يتبـــــــــع	مراحل سير الحصة
		الوسائل التعليمية
	الكتاب المدرسي	المراجع

تد

تطبيق3: نعتبر المعادلة التفاضلية (1) $\quad 2y' + y = 1$

1. حل المعادلة (1),
2. عين الحل f للمعادلة (1) بحيث $f(-1) = 2$.

3.

القسم : 3ت رياضي المحـــور: الدوال الاسية و اللوغاريتمية (تابع)

الحصة : تحليل الموضوع : دراسة الدالة $\ln\circ u$ المدة المقترحة : 1 ســـــاعة

المكتسبات القبلية	الكفاءات المستهدفة
1. نظرية نهاية مركب دالتين 2. نظرية مشتقة مركب دالتين	* دراسة الدالة $\ln\circ u$

مراحل سير الحصة		
مراحل سير الحصة	النشاط : لتكن f الدالة المعرفة بـ : $f(x) = ln\frac{1}{x-2}$. 1* عين مجموعة تعريف f . 2* ادرس تغيرات الدالة f . 3* اعط جدول تغيرات الدالة f . 4* بين ان من اجل كل y من R فان : $f(x) = y$ تقبل حلا واحدا. ثم حل المعادلة $f(x) = y$. اي عبر بالحساب عن x بدلالة y . **الدرس** 1. **النهايات** لحساب نهاية الدالة " $\ln\circ u$ " نستعمل نظرية نهاية مركب دالتين . امثلة : 2. **اتجاه التغيرا ت** **خاصية:** إذا كانت u دالة معرفة و موجبة تماما على مجال I فإن للدالتين u و $\ln\circ u$ نفس اتجاه التغيرات على المجال I . امثلة : 3. **المشتقة** **خاصية:** إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق و موجبة تماما على مجال I فإن الدالة $\ln\circ u$ قابلة للاشتقاق على I و لدينا من أجل كل x من I، $(\ln\circ u)'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$. تقويم : تطبيق1/ ص 108 رقم 84 و 88 تطبيق منزلي : ص 109 رقم 95	20 د 15 د 20 د
الوسائل التعليمية		
المراجع	الكتاب المدرسي	

القسم : 3ت رياضي المحـــور: الدوال الاسية و اللوغاريتمية (تابع)

الحصة : تحليل الموضوع : قوى عدد حقيقي موجب تماما المدة المقترحة : 1 ســـــاعة

الكفاءات المستهدفة	المكتسبات القبلية
• خواص قوى عدد حقيقي	1. خواص الدالة **Ln**

المراحل	النشاط	الزمن
مراحل سير الحصة	النشاط الاول ص 120 **1. تعاريف** **تعريف1:** نضع $a^b = e^{b\ln a}$ من أجل كل عددين حقيقيين a و b حيث $a>0$ و b كيفي. **مثال:** $2^{\sqrt{3}} = e^{\sqrt{3}\ln 2} \approx 3,3219$ **تعريف2:** a عدد حقيقي موجب تماما. تسمى الدالة f المعرفة على R بِـ $f(x) = a^x = e^{x\ln a}$ ، الدالة الأسية ذات الأساس a. **2. قواعد الحساب** **خواص:** من أجل كل عددين حقيقيين موجبين تماما a، b و من أجل كل عددين حقيقيين x، y لدينا: (1) $\ln(a^x) = x\ln a$ (2) $a^x a^y = a^{x+y}$ (3) $a^{-y} = \frac{1}{a^y}$. (4) $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ (5) $(a^x)^y = a^{xy}$. (6) $(ab)^x = a^x b^x$. (7) $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$. تقويم : تمرين : ص 134 رقم 09 , 10 و 12	20 د 15 د 20 د
الوسائل التعليمية		
المراجع	الكتاب المدرسي	

القسم : 3ت رياضي **المحـــور:** الدوال الاسية و اللوغاريتمية (تابع)

الحصة : تحليل **الموضوع :** الدالة " الجذر النوني " **المدة المقترحة :** 1 ســـــاعة

المكتسبات القبلية	الكفاءات المستهدفة
1. نظرية القيم المتوسطة	• الدالة " الجذر النوني "

20 د

النشاط الثاني ص 120

3. الدالة " الجذر النوني "

تمهيد: الدالة $f_n : x \mapsto x^n$ ، حيث n عدد طبيعي غير معدوم مستمرة و متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$

x	0	$+\infty$
x^n	0 ↗	$+\infty$

كما أن $f_n(0)=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)=+\infty$. إذن من أجل كل عدد حقيقي موجب a، المعادلة $x^n=a$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[0;+\infty[$.

15 د

مبرهنة وتعريف: من أجل كل عدد حقيقي موجب a و من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، يوجد عدد حقيقي موجب وحيد b يحقق $b^n=a$. يسمى b الجذر النوني للعدد a و نرمز إليه بالرمز $\sqrt[n]{a}$.

تسمى الدالة المعرفة على $[0;+\infty[$ حيث $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ ، الدالة الجذر النوني.

مثال: $\sqrt[n]{0}=0$ ، $\sqrt[n]{1}=1$ ، $\sqrt[3]{8}=2$ ، $\sqrt[4]{81}=3$ ، $\sqrt[4]{4}=\sqrt{2}$.

خاصية1: من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما a و من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$

البرهان: نعلم أن $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n=a$ و بما أن $\sqrt[n]{a}$ هو الحل الموجب الوحيد للمعادلة $x^n=a$

فإن $\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$.

تقويم : تمرين : ص 135 رقم 34 و 35

20 د

مراحل سير الحصة

الوسائل التعليمية	
المراجع	الكتاب المدرسي

القسم : 3ت ر   المحـــور: الدوال الاسية و اللوغاريتمية (تابع)

الحصة : تحليل   الموضوع : دراسة الدوال: $x \mapsto a^x$ و $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ المدة المقترحة : 1 ســـــاعة

المكتسبات القبلية	الكفاءات المستهدفة
1. مركب دالتين واتجاه تغيراتها	• دراسة الدالة : " $f_a : x \mapsto a^x$ "

مراحل سير الحصة

نشاط مقترح:

20 د

a عدد حقيقي موجب تماما يختلف عن 1 . و f_a الدالة العددية المعرفة على R بـ : $f_a(x) = a^x$.

1* بين ان f_a هي مركب دالة u تتبعها الدالة exp يطلب تعيينالدالة u .

2* اوجد الدالة المشتقة للدالة f_a . ثم استنتج اتجاه تغيراتها .

3* احسب النهايات عند $+\infty$ و $-\infty$ للدالة f_a .

4* اعط جدول تغيرات الدالة f_a .

الدرس

1. الدالة : " $f_a : x \mapsto a^x$ " مع a عدد حقيقي موجب تماما يختلف عن 1 .

اتجاه التغير الدالة f_a :

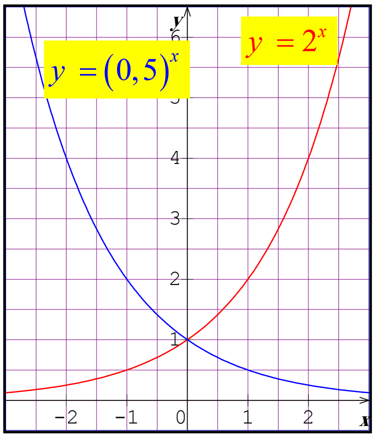
* إذا كان $0 < a < 1$ فإن الدالة f_a متناقصة تماما على R.

* إذا كان $a > 1$ فإن الدالة f_a متزايدة تماما على R.

15 د

جدول التغيرات و التمثيل البياني للدالة f_a:

x	$-\infty$	$+\infty$
$f_a(x)$ $0 < a < 1$	$+\infty$ ↘	0
x	$-\infty$	$+\infty$
$f_a(x)$ $a > 1$	0 ↗	$+\infty$



تقويم : تمرين : ص136 رقم 35

يتبــــــــــــع:اقلب الصفحة

20 د

الوسائل التعليمية	
المراجع	الكتاب المدرسي

2. الدالة $x \longmapsto \sqrt[n]{x}$

نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، و من أجل x من $[0;+\infty[$ ، $g_n(x)=\sqrt[n]{x}=x^{\frac{1}{n}}$.

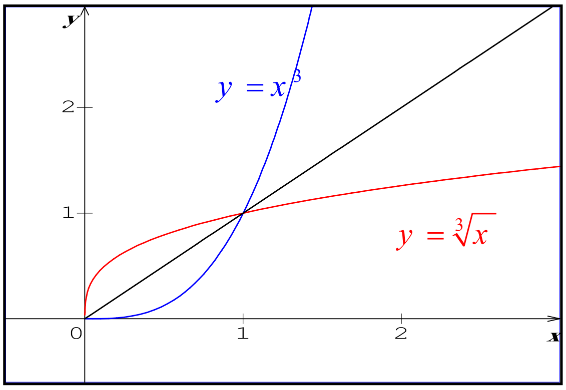
g_n قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ و $g_n'(x)=\frac{1}{n}\times x^{\frac{1}{n}-1}$ و منه $g_n'(x)>0$. إذن g_n متزايدة تماما على $[0;+\infty[$

x	0	$+\infty$
$g_n'(x)$	$\|\|$	$+$
$g_n(x)$	0 ↗	$+\infty$

ملاحظة

* الدالة g_n غير قابلة للاشتقاق عند " 0 "

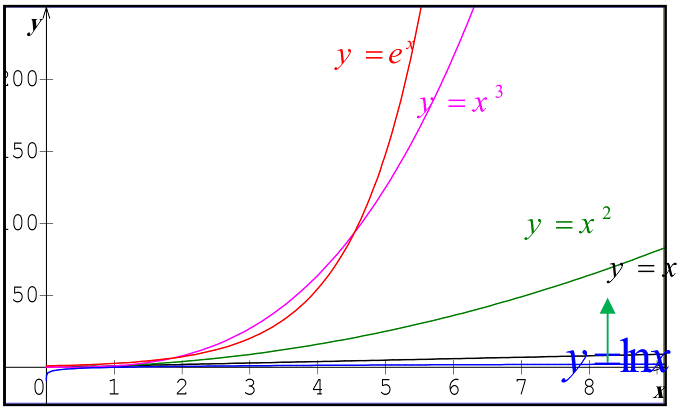
* $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[n]{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{n}\ln x}=+\infty$



القسم : 3ت رياضي المحـــور: الدوال الاسية و اللوغاريتمية (تابع)

الحصة : تحليل الموضوع : التزايد المقارن المدة القترحة : 1 ســــــاعة

الكفاءات المستهدفة	المكتسبات القبلية
*المقارنة بين x^n , e^x و lnx عندما x يكون كبير بالقدر الكافي	1. استعمال المجدول

مراحل سير الحصة	النشاط الثالث ص 121 **التزايد المقارن** **1. التزايد المقارن للدالتين** $x \mapsto e^x$ **و** $x \mapsto x$ **خواص:** $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \quad (1)$ و $\lim_{x \to -\infty} xe^x = 0 \quad (2)$ **2. التزايد المقارن للدالتين** $x \mapsto \ln x$ **و** $x \mapsto x$ **خواص:** $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \quad (1)$ و $\lim_{x \to 0} x \ln x = 0 \quad (2)$ **3. التزايد المقارن للدالتين** exp **و** ln **مع الدالة** $x \mapsto x^n$ $(n \epsilon N^*)$ **خواص:** $\lim_{x \to -\infty} x^n e^x = 0 \quad (2)$ $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \quad (1)$ $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0 \quad (1)$ $\lim_{x \to 0} x^n lnx = 0$ *(2  **خلاصة:** كل الدوال $x \mapsto e^x$ ، $x \mapsto \ln x$ و $x \mapsto x^n$ $(n \epsilon N^*)$ تؤول إلى $+\infty$ لما يؤول x إلى $+\infty$ إلا أن سلوكها مختلف. عند اللانهاية تتفوق الدالة الأسية على الدالة قوة و تتفوق الدالة قوة على الدالة اللوغاريتمية النيبيرية. تقويم : تمرين : ص 135 رقم 34 و 35	20 د 15 د 20 د
الوسائل التعليمية	الحاسوب و العاكس	
المراجع	الكتاب المدرسي	

القسم : 3ت رياضي المحــــور: الدوال الاسية و اللوغاريتمية (تابع) يوم : 23/ 11 / 2009

الحصة : تحليل الموضوع : التزايد المقارن المدة المقترحة : 1 ســـــــاعة

المكتسبات القبلية	الكفاءات المستهدفة
1. استعمال المجدول 2. دراسة تغيرات دالة و استنتاج اشارتها	*المقارنة بين x^n , e^x و lnx عندما x يكون كبير بالقدر الكافي

مراحل سير الحصة

نشاط مقترح: 20 د

التزايد المقارن

1. التزايد المقارن للدالتين $x \mapsto e^x$ و $x \mapsto x$

خواص: $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \quad (1)$ و $\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0 \quad (2)$ 15 د

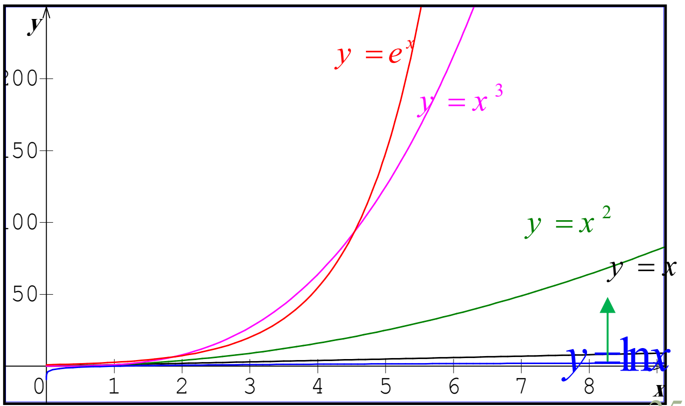
2. التزايد المقارن للدالتين $x \mapsto \ln x$ و $x \mapsto x$

خواص: $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \quad (1)$ و $\lim_{x\to 0} x\ln x = 0 \quad (2)$

3. التزايد المقارن للدالتين exp و ln مع الدالة $x \mapsto x^n$ $(n\epsilon N^*)$

خواص: $\lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0 \quad (2)$ $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \quad (1)$ $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0 \quad (1)$

$\lim_{x\to 0} x^n lnx = 0$ *(2



خلاصة: كل الدوال $x \mapsto e^x$ ، $x \mapsto \ln x$ و $x \mapsto x^n$ $(n\epsilon N^*)$ تؤول إلى $+\infty$ لما يؤول x إلى $+\infty$ إلا أن سلوكها مختلف.

عند اللانهاية تتفوق الدالة الأسية على الدالة قوة و تتفوق الدالة قوة على الدالة اللوغاريتمية النيبيرية.

تقويم : تمرين : ص 135 رقم 34 و 35

20 د

الوسائل التعليمية	الحاسوب والعاكس
المراجع	الكتاب المدرسي

القسم : 3ت رياضي المحـــور: القسمـــة فـي Z

الحصة : حساب الموضوع : قابلية القسمة في Z المدة المقترحة : 1 ســـــاعة

الكفاءات المستهدفة	المكتسبات القبلية
* استعمال خواص قابلية القسمة في Z	1. قواسم عدد صحيح

20 د 15 د 20 د	نشاط الاول: ص 42 1. قابلية القسمة في Z **تعريف:** a و b عددان صحيحان و a غير معدوم. القول أن العدد a يقسم العدد b يعني وجود عدد صحيح k حيث : $b=ka$. نقول كذلك a قاسم للعدد b أو نقول كذلك b مضاعف للعدد a . * نكتب $a\|b$ ونقرأ a يقسم b. **أمثلة:** **ملاحظة:** في Z للعددين a و $-a$ نفس القواسم . 2. **خواص** **خاصية1:** a ، b ، c ثلاثة أعداد صحيحة غير معدومة . إذا كان a يقسم b و b يقسم c فإن a يقسم c . **خاصية2:** a و b عددان صحيحان و a غير معدوم. إذا كان a يقسم b فإنه من أجل كل عدد صحيح m ، a يقسم mb **خاصية3:** a و b عددان صحيحان و a غير معدوم. إذا كان a يقسم b فإنه من أجل كل عدد صحيح غير معدوم m ، ma يقسم mb **خاصية4:** a ، b و c ثلاثة أعداد صحيحة و a غير معدوم. إذا كان a يقسم العددين b و c فإنه من أجل كل عددين صحيحين m و n فان a يقسم $mb+nc$ **أمثلة:** 3.القسمة الإقليدية في Z **مبرهنة:** a عدد صحيح و b عدد طبيعي غير معدوم . توجد ثنائية وحيدة (q,r) من الأعداد الصحيحة حيث: $a=bq+r$ و $0\leq r<b$. * تسمى عملية البحث عن الثنائية (q,r) بالقسمة الإقليدية للعدد a على العدد b. يسمى q و r بهذا الترتيب حاصل و باقي القسمة الإقليدية للعدد a على العدد b . **ملاحظة:** يمكن تمديد مفهوم القسمة الإقليدية لعدد صحيح a على عدد صحيح غير معدوم b . ونحصل على $a=bq+r$ و $0\leq r<\|b\|$. **أمثلة:** تقويم : تمرين : ص 56 رقم 09 , 10 و 12	مراحل سير الحصة
	الحاسوب و العاكس	**الوسائل التعليمية**
	الكتاب المدرسي	**المراجع**

القسم : 3ت رياضي المحـــور: القسمـــة فـــي Z (تابع) يوم :

الحصة : حساب الموضوع : قابلية القسمة في Z المدة المقترحة : 1 ســـــاعة

المكتسبات القبلية	الكفاءات المستهدفة
1. القسمة الاقليدية في Z	* القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين و خواصه * خوارزمية إقليدس

مراحل سير الحصة		
	نشاط الثالث: ص 43 **1. القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين** a عدد طبيعي غير معدوم . نرمز بـ D_a إلى مجموعة قواسم العدد a . **مثال:** **ملاحظة:** مجموعة قواسم 0 هي Z^* . **تعريف:** a و b عددان طبيعيان غير معدومين. D_a و D_b مجموعتا قواسم a و b على الترتيب . $D_a \cap D_b$ هي مجموعة القواسم المشتركة للعددين a و b . يسمى أكبر عنصر من المجموعة $D_a \cap D_b$ بالقاسم المشترك الأكبر للعددين a و b . و نرمز له بـ $PGCD(a;b)$. **مثال:** **ملاحظات:** * $PGCD(a;a)=a$ و $PGCD(1;a)=1$ * $PGCD(0;a)=a$ (a غير معدوم) . * مجموعة القواسم المشتركة لعددين طبيعيين غير معدومين هي مجموعة قواسم قاسمهما المشترك الأكبر. **2. خواص القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين** **خاصية1:** a و b عددان طبيعيان غير معدومين حيث $a<b$. r باقي قسمة a على b . $PGCD(a;b)=PGCD(b;r)$ **البرهان:** **مثال:** **خوارزمية إقليدس** **خاصية2:** القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين غير معدومين a و b هو آخر باقي غير معدوم في سلسلة قسمات خوارزمية إقليدس . **أمثلة:** تقويم : تمرين 1: ص 57 رقم 25 و 33 2: ص 57 رقم 29	20 د 15 د 20 د
الوسائل التعليمية	الحاسوب و العاكس	
المراجع	الكتاب المدرسي	

القسم : 3ت رياضي المحـــور: القسمـــة فـي Z (تابع)

الحصة : حساب الموضوع : القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين (تابع) المدة المقترحة : 1 ســـــاعة

الكفاءات المستهدفة	المكتسبات القبلية
* القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين و خواصه * خوارزمية إقليدس	2. القسمة الاقليدية في Z

مراحل سير الحصة		
مراحل سير الحصة	نشاط مقترح : a , b و k اعداد صحيحة غير معدومة * باخذ $a=90$, $b=117$ و $k=11$ أ / احسب : $PGCD(ka\,;kb)$ و $k\,PGCD(a\,;b)$. ب/ خمن خاصية ثم برهن التخمين . ج/ احسب $PGCD\left(\frac{a}{d};\frac{b}{d}\right)$ حيث $d=PGCD(a;b)$. د/ خمن خاصية ثم برهن التخمين . الدرس خاصية3: a و b عددان طبيعيان غير معدومين . k عدد طبيعي غير معدوم. $PGCD(ka\,;kb)=k\,PGCD(a\,;b\,)$ مثال: تعريف: a و b عددان طبيعيان غير معدومين. يكون العددان a و b أوليين فيما بينهما إذا و فقط إذا كان قاسمهما المشترك الأكبر يساوي 1 . خاصية4: a و b عددان طبيعيان غير معدومين . d قاسم مشترك للعددين a و b . نضع $a=da'$ و $b=db'$ يكون d القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b إذا و فقط إذا كان العددان الطبيعيان a' و b' أوليين فيما بينهما . 3* تمديد القاسم المشترك الأكبر لعددين صحيحين تعريف: a و b عددان صحيحان غير معدومين. القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b هو العدد الطبيعي الوحيد d حيث $d=PGCD(\lvert a\rvert;\lvert b\rvert)$ خاصية: a و b عددان صحيحان غير معدومين . k عدد صحيح غير معدوم. $PGCD(ka;kb)=\lvert k\rvert PGCD(a;b)$ مثال: تقويم : تمرين 1: ص 57 رقم 26 , 32 و 34 2: ص 58 رقم 39	20 د 15 د 20 د
الوسائل التعليمية	الحاسوب و العاكس	
المراجع	الكتاب المدرسي	

القسم : 3ت رياضي   المحـــور: القسمـــة في Z (تابع)

الحصة : حساب   الموضوع : اعمال موجهة   المدة المقترحة : 1 ســـــاعة

الكفاءات المستهدفة	المكتسبات القبلية
* *	.1

مراحل سير الحصة	تمرين:1* أثبت أن b يقسم $3n^2+12n+12$. * استنتج أن b يقسم a إذا و فقط إذا كان b يقسم 8. * ما هو باقي قسمة a على b في كل حالة من الحالات الأخرى ؟ * تأكد أن $a=(3n+5)(n+2)+n+10$. ما هو باقي قسمة a على c ؟ تقويم : تمرين 1: ص59 رقم56 و 57	25 د 30 د
الوسائل التعليمية	الحاسوب و العاكس	
المراجع	الكتاب المدرسي	

القسم : 3ت رياضي **المحـــور:** القسمـــة فـي Z (تابع)

الحصة : حساب **الموضوع :** الموافقات في Z **المدة المقترحة :** 1 ســــــاعة

المكتسبات القبلية	الكفاءات المستهدفة
1. مضاعف عدد صحيح	* تعريف الموافقات في Z * خواص الموافقات في Z

مراحل سير الحصة	نشاط مقترح : a و b عددان صحيحان و n عدد طبيعي غير معدوم. برهن ان:(a و b لهما نفس الباقي في القسمة الإقليدية على n) تكافئ($b-a$ مضاعف لـ n). **تعريف الموافقات في Z:** n عدد طبيعي غير معدوم. القول أن عددين صحيحين a و b متوافقان بترديد n يعني أن a و b لهما نفس الباقي في القسمة على n. و نرمز $a \equiv b[n]$ و نقرأ a يوافق b بترديد n . **ملاحظات:** * من أجل كل عدد صحيح x ، $x \equiv 0[1]$. * ترميز آخر $a \equiv b(n)$. **مبرهنة:** a و b عددان صحيحان و n عدد طبيعي غير معدوم. a و b لهما نفس الباقي في القسمة الإقليدية على n ، إذا و فقط إذا كان $b-a$ مضاعف لـn . **نتيجة:** a و b عددان صحيحان و n عدد طبيعي غير معدوم. a و b متوافقان بترديد n إذا و فقط إذا كان $b-a$ مضاعف لـ n . **. خواص: خاصية1:** n عدد طبيعي غير معدوم يختلف عن 1 . كل عدد صحيح a يوافق باقي قسمته على n ، بترديد n . **خاصية2:** n عدد طبيعي غير معدوم. من أجل كل عدد صحيح a لدينا $a \equiv a[n]$. **خاصية3:** n عدد طبيعي غير معدوم. a و b عددان صحيحان . إذا كان $a \equiv b[n]$ فإن $b \equiv a[n]$ **خاصية4:** n عدد طبيعي غير معدوم. a ، b و c أعداد صحيحة. إذا كان($a \equiv b[n]$ و $b \equiv c[n]$) فإن $a \equiv c[n]$. **خاصية5:** n عدد طبيعي غير معدوم. a ، b ، c و d أعداد صحيحة: إذا كان ($a \equiv b[n]$ و $c \equiv d[n]$) فإن $a+c \equiv b+d[n]$. **خاصية6:** n عدد طبيعي غير معدوم. a ، b ، c و d أعداد صحيحة: إذا كان ($a \equiv b[n]$ و $c \equiv d[n]$) فإن $a \times c \equiv b \times d[n]$. **خاصية7:** n عدد طبيعي غير معدوم. a و b عددان صحيحان. من أجل كل عدد صحيح k ، إذا كان $a \equiv b[n]$ فإن $k \times a \equiv k \times b[n]$. **خاصية8:** n و p عددان طبيعيان غير معدومين. a و b عددان صحيحان. إذا كان $a \equiv b[n]$ فإن $a^p \equiv b^p[n]$. تقويم : تمرين 1: ص78 رقم03 و 10 تمرين 2: ص79 رقم 28	10 د 20 د 25 د
الوسائل التعليمية		
المراجع	الكتاب المدرسي	

القسم : 3ت رياضي المحـــور: القسمـــة فــي Z (تابع)

الحصة : حساب الموضوع : التعداد المدة المقترحة : 1 ســـــاعة

المكتسبات القبلية	الكفاءات المستهدفة
1. كتابة عددبدلالة قوى للعدد عشرة	* العد وفق اساس

مراحل سير الحصة		
	حل النشاط الثالث : ص 67 **الدرس** **التعداد.** **مبرهنة:** x عدد طبيعي غير معدوم أكبر تماما من 1. كل عدد طبيعي a أكبر من أو يساوي x يكتب بطريقة وحيدة على الشكل $a = qx^n + r_{n-1}x^{n-1} + r_{n-2}x^{n-2} + ...+ r_2x^2 + r_1x + r_0$ حيث $0 < q < x$ و $0 < r_i < x$ مع $i\in\{0,1,2,\dots\dots,n-1\}$ **2. التعداد ذو الأساس x.** **قاعدة:** x عدد طبيعي غير معدوم أكبر تماما من 1. يعتمد التعداد ذو الأساس x على الاصطلاحين التاليين : 1) إذا كان $a < x$ (a عدد طبيعي) a يمثل برمز وحيد يسمى رقما. 2) إذا كان $a > x$ (a عدد طبيعي) من المبرهنة السابقة فان a ينشر بطريقة وحيدة وفق العدد x : $a = qx^n + r_{n-1}x^{n-1} + r_{n-2}x^{n-2} + ...+ r_2x^2 + r_1x + r_0$ حيث $0 < q < x$ و $0 < r_i < x$ مع $i\in\{0,1,2,\dots\dots,n-1\}$ يمثل العدد a كما يلي $a = \overline{q\,r_{n-1}\,r_{n-2}\dots r_1\,r_0}$. الكتابة $a = \overline{q\,r_{n-1}\,r_{n-2}\dots r_1\,r_0}$ هي كتابة العدد a في النظام ذي الأساس x . إذا كان $x = 10$ ، نكتب : $a = q\,r_{n-1}\,r_{n-2}\dots r_1\,r_0$ تقويم : تمرين 1: ص79 رقم34 و35 تمرين 2: ص80 رقم 49	15 د 15 د 25 د
الوسائل التعليمية		
المراجع	الكتاب المدرسي	

القسم : 3ت رياضي المحـــور: القسمـــة فـي Z (تابع)

الحصة : حساب الموضوع : اعمال موجهة المدة المقترحة : 1 ســـــاعة

الكفاءات المستهدفة	المكتسبات القبلية
* حل المعادلة ذات المجهولين الصحيحين y,x : $ax+by=c$ ....(*)	1. الموافقة في Z

مراحل سير الحصة	**1 دراسة مثال .** نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول $(x;y)$: $5x-8y=3$ ...(1) . · تأكد أن $(7;4)$ حل للمعادلة (1) . · أثبت أنه إذا كان $(x;y)$ حلا للمعادلة (1) فإن $5x\equiv 3\,[8]$. · عين الأعداد الصحيحة x حيث : $5x\equiv 3\,[8]$. · أثبت أن كل حلول المعادلة(1) هي من الشكل $(8k+7;5k+4)$ حيث k عدد صحيح. **2. دراسة الحالة العامة .** نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول$(x;y)$: $ax+by=c$ ....(*) حيث a ، b ، و c أعداد طبيعية . أثبت أن المعادلة (*) تقبل حلول إذا وفقط إذا كان a و b أوليين فيما بينهما أو يقبل c القسمة على$PGCD(a;b)$. * أثبت أنه إذا كان $(x;y)$ حلا للمعادلة فإن $ax\equiv c[b]$. * أثبت أنه إذا كان $(x;y)$ حلا للمعادلة فإن $bx\equiv c[a]$. **3. تطبيق .** · حل في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول $(x;y)$: $7x+12y=5$. · حل في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول $(x;y)$: $20x-45y=5$. · حل في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول $(x;y)$: $6x-8y=9$.	20 د 20 د 20 د
الوسائل التعليمية		
المراجع	الكتاب المدرسي	

القسم : 3ت رياضي المحـــور: الاعداد الاولية

الحصة : حساب الموضوع : الاعداد الاولية المدة المقترحة : 1 ســـــــاعة

الكفاءات المستهدفة	المكتسبات القبلية
* الاعداد الاولية تعريف وخواص	1 .

	مراحل سير الحصة	
15 د 25 د 20 د	نشاط مقترح : 1* عين قواسم الاعداد التالية: 2, 3, 5 , 7 , 11 , 13 , 17 , 19 . ماذا تلاحظ ؟ 2* اوجد باقي القسمة الاقليدية لكل من الاعداد : 97 , 131 , 371 على 2ثم 3 ثم5 ثم 7 ثم 11 ثم 13 ثم 17 ثم 19الى انتحصل على الباقي 0 اومربع القسوم عليه اكبر من المقسوم . **الأعداد الأولية .** **تعريف:** القول أن العدد الطبيعي n عدد أولي معناه أن n يقبل قاسمين بالضبط فيN : 1 و n نفسه . **2. خواص .** **خاصية1:** كل عدد طبيعي n أكبر تماما من 1 يقبل على الأقل قاسما أوليا . **البرهان:** ليكن n عددا طبيعيا أكبر تماما من 1 . *- إذا كان n أوليا فإن n يقسم n والخاصية محققة . * إذا كان n غير أولي فإن n يقبل على الأقل قاسما يختلف عن 1 وعن n . ليكن p أصغر قاسم للعدد n يختلف عن 1 وعن n. نفرض p غير أولي و منه يوجد عدد طبيعي d يقسم p حيث $1< d < p$. و بالتالي d يقسم n و هذا تناقض (لأن $d < p$ و p أصغر قاسم للعدد n) و منه p عدد أولي والخاصية محققة . **خاصية2:** كل عدد طبيعي n غير أوّلي أكبر تماما من 1 يقبل قاسما أوّليا a حيث $a < \sqrt{n}$ **البرهان:** ليكن n عددا طبيعيا غير أوّلي أكبر تماما من 1 . n يقبل قاسما d يختلف عن 1 و عن n ومنه $n = dd'$ حيث d' عدد طبيعي غير معدوم . $d' \geq 2$ (لأن إذا كان $d' = 1$ فإن $d = n$ و هذا تناقض) نفرض $d < d'$ و منه $d^2 < d\,d'$ أي $d^2 < n$ و بالتالي $a < \sqrt{n}$. من الخاصية 1: d يقبل على الأقل قاسما أوّلياً a و هو كذلك قاسم أولي للعدد n . بما أن لدينا $a < d$ و $d < \sqrt{n}$ نستنتج أن $a < \sqrt{n}$. **خاصية3:** مجموعة الأعداد الأوّلية غير منتهية . **البرهان:** نستعمل البرهان بالخلف . نفرض أن مجموعة الأعداد الأولية منتهية . ليكن p أكبر عدد من مجموعة الأعداد الأولية . نسمي N جداء كل الأعداد الأولية من 2 إلى p .أي $N = 2.3.5.7 \ldots\ldots p$ ليكن N' العدد الطبيعي حيث أن: $N' = N + 1$. باقي قسمة N' على 2 ، 3 ، 5 ، ... أو p تعطي الباقي دوما 1 . إذن N' غير قابل للقسمة على 2 ، 3 ، 5 ، ... أو p . إذا كان N' أوليا فإن $p < N'$ و هذا تناقض . إذا كان N' غير أولي فإن N' يقبل قاسما أوليا أكبر من p (الخاصية 1) و هذا تناقض . إذن مجموعة الأعداد الأولية غير منتهية . **تقويم : تمرين ص 106 رقم 04 , 06 , 14 و 15**	
		الوسائل التعليمية
	الكتاب المدرسي	المراجع

القسم : 3ت رياضي المحـــور: الاعداد الأولية (تابع)

الحصة : حساب الموضوع : المضاعف المشترك الأصغر لعددين. المدة المقترحة : 1 ســــــاعة

المكتسبات القبلية	الكفاءات المستهدفة
1 .	* المضاعف المشترك الأصغر لعددين وخواصه.

مراحل سير الحصة	**نشاط مقترح :** بالاعتماد على : " كل عدد طبيعي $n>1$ غير أوّلي يقبل قاسما أوّليا a حيث $a<\sqrt{n}$ " . * برهن ان : " كل عدد طبيعي غير أوّلي n حيث $n\geq 2$ يمكن تحليله إلى جداء عوامل أولية " . **2. تحليل عدد طبيعي إلى جداء عوامل أولية.** **مبرهنة:** كل عدد طبيعي غير أوّلي n حيث $n\geq 2$ يمكن تحليله إلى جداء عوامل أولية . **البرهان:** **ملاحظة:** (نقبل بدون برهان) أن كل عدد طبيعي n يقبل تحليلا وحيدا إلى جداء عوامل أولية . **خاصية:** a و b عددان طبيعيان كلاهما أكبر تماما من 1. يكون العدد b قاسما للعدد a إذا وفقط إذا كان كل عامل أولي في تحليل b موجودا في تحليل a و بأس إما مساو و إما أصغر من أسه في تحليل a. **البرهان:** **المضاعف المشترك الأصغر لعددين.** **تعريف:** a و b عددان طبيعيان غير معدومين. M_a مجموعة مضاعفات a، M_b مجموعة مضاعفات b $M_a \cap M_b$ هي مجموعة المضاعفات المشتركة للعددين a و b يسمى أصغر عنصر غير معدوم من المجموعة $M_a \cap M_b$ المضاعف المشترك الأصغر للعددين a و b و نرمز له $PPCM(a;b)$. **ملاحظات:** * $PPCM(a;a)=a$ و $PPCM(1;a)=a$ * مجموعة المضاعفات المشتركة لعددين طبيعيين غير معدومين هي مجموعة المضاعفات المضاعف المشترك الأصغر لهما . **2. تمديد المضاعف المشترك الأصغر لعددين صحيحين** **تعريف:** a و b عددان صحيحان غير معدومين. المضاعف المشترك الأصغر للعددين a و b هو أصغر عدد طبيعي m غير معدوم حيث $m=PPCM(\|a\|;\|b\|)$. **3 . خاصية للمضاعف المشترك الأصغر لعددين طبيعيين** **خاصية:** a و b عددان طبيعيان غير معدومين. k عدد صحيح غير معدوم. $PPCM(ka;kb)=\|k\|PPCM(a;b)$. **البرهان:** **تقويم : تمرين ص 107 رقم 20 , 34 و 35**	10 د 25 د 20 د
الوسائل التعليمية		
المراجع	الكتاب المدرسي	

القسم : 3ت رياضي المحـــور: الاعداد الأولية (تابع)

الحصة : حساب الموضوع : المضاعف المشترك الأصغر لعددين (تابع) المدة المقترحة : 1 ســـــاعة

المكتسبات القبلية	الكفاءات المستهدفة
1 .	*حساب $PGCD$ و $PPCM$ باستعمال التحليل إلى جداء عوامل أولية والعلاقة بينهما .

مراحل سير الحصة		
	نشاط مقترح : 1* حلل كل من العددين : $a = 336$ و $b = 1326$ الى جداء عوامل اولية . **2*** اوجد $PGCD(a,b)$ ثم حلله الى جداء عوامل اولية . **3*** ماذا تلاحظ بالنسبة لعوامل تحليل $PGCD(a,b)$ وعوامل تحليل كل من a و b . **4.حساب القاسم المشترك الأكبر باستعمال التحليل إلى جداء عوامل أولية.** **خاصية:** القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين a و b كلاهما أكبر تماما من 1 هو جداء العوامل الأولية المشتركة في تحليلي العددين a و b بحيث يؤخذ كل عامل من هذه العوامل مرة واحدة و بأصغر أس . **البرهان:** **مثال :** **5.حساب المضاعف المشترك الأصغر باستعمال التحليل إلى جداء عوامل أولية.** **خاصية:** المضاعف المشترك الأصغر لعددين طبيعيين a و b كلاهما أكبر تماما من 1 هو جداء العوامل الأولية المشتركة وغير المشتركة في تحليلي العددين a و b بحيث يؤخذ كل عامل من هذه العوامل مرة واحدة و بأكبر أس. **البرهان:** **مثال :** **6.العلاقة بين المضاعف المشترك الأصغر و القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين** **خاصية:** جداء عددين طبيعيين a و b كلاهما أكبر تماما من 1 مساو لجداء قاسمهما المشترك الأكبر ومضاعفهما المشترك الأصغر. بعبارة أخرى $PGCD(a,b) \times PPCM(a,b) = a \times b$ **البرهان:** **مثال :** **تقويم : تمرين ص 108 رقم 38 و 40**	15 د 25 د 20 د
الوسائل التعليمية		
المراجع	الكتاب المدرسي	

القسم : 3ت رياضي **المحـــور:** **الاعداد والحساب (تابع)**

الحصة : حساب **الموضوع :** مبرهنتا بيزو وغوص **المدة المقترحة :** 1 ســـــاعة

المكتسبات القبلية	الكفاءات المستهدفة
1 .	* مبرهنة بيزو و تطبيقاتها

مراحل سير الحصة	**نشاط مقترح : 1*** برهن ان: إذا وجد عددان صحيحان u و v حيث : $au+bv=1$ فان a و b أوليين فيما بينهما **2*** برهن ان: إذا كان d القاسم المشترك الأكبر لعددين صحيحين a و b فإنه يوجد عددان صحيحان u و v حيث: $au+bv=d$ باعتبار عكس **1***صحيح كذلك. **3*** برهن ان: إذا كان a عددا أوليا لايقسم العدد الطبيعي b فإن a أولي مع b . **4*** باستعمال **1***وعكسها برهن ان: إذا كان a عددا أوليا مع عددين صحيحين b و c فإن a أولي مع جدائهما $b\times c$. **الدرس** **مبرهنة بيزو .** **مبرهنة:** يكون عددان صحيحان a و b أوليين فيما بينهما إذا و فقط إذا وجد عددان صحيحان u و v حيث : $au+bv=1$ **تطبيقات مبرهنة بيزو** **خواص .** **خاصية1:** إذا كان d القاسم المشترك الأكبر لعددين صحيحين a و b فإنه يوجد عددان صحيحان u و v حيث: $au+bv=d$ **البرهان:** **خاصية2:** إذا كان a عددا أوليا فإن a أولي مع كل الأعداد التي لا يقسمها . **البرهان:** **خاصية3:** إذا كان a عددا أوليا مع عددين صحيحين b و c فإن a أولي مع جدائهما $b\times c$. **البرهان:** **تقويم : تمرين ص 108 رقم 48 , 49 , 50 و53** **تمرين ص 109 رقم 54**	20 د 10 د 20 د
الوسائل التعليمية		
المراجع	الكتاب المدرسي	

القسم : 3ت ر المحـــور: الاعداد والحساب (تابع)

الحصة : هندسة الموضوع : مبرهنتا بيزو وغوص المدة القترحة : 1 ســـــاعة

المكتسبات القبلية	الكفاءات المستهدفة
1 .	* مبرهنة غوص و تطبيقاتها

مراحل سير الحصة	**نشاط مقترح :** a ، b و c ثلاثة أعداد صحيحة غير معدومة . **1*)** برهن ان: إذا كان a يقسم الجداء bc و كان a أوليا مع b ، فإن a يقسم c . **2*)** باستعمال **1*)** برهن ان: إذا كا ن p عدداولي يقسم الجداء ab ، فإن p يقسم a أو p يقسم b **3*)** برهن ان: إذا كان العدد الطبيعي a مضاعفا للعددين الطبيعيين b و c وكان b و c أوليين فيما بينهما فإن a مضاعف للجداء bc . **الدرس** **مبرهنة غوص .** **مبرهنة:** a ، b و c ثلاثة أعداد صحيحة غير معدومة . إذا كان a يقسم الجداء bc و كان a أوليا مع b ، فإن a يقسم c . **البرهان:** **تطبيقات مبرهنة غوص** **خواص .** **خاصية1:** a و b عددان طبيعيان غير معدومين و p عدد أولي . إذا كان p يقسم الجداء ab ، فإن p يقسم a أو p يقسم b. **البرهان:** **خاصية2:** a ، b و c أعداد طبيعية غير معدومة . إذا كان a مضاعفا للعددين b و c وكان b و c أوليين فيما بينهما فإن a مضاعف للجداء bc . **البرهان:** **تقويم : تمرين ص 109 رقم 56 , 58 , 60 و 61**	20 د 10 د 20 د
الوسائل التعليمية		
المراجع	الكتاب المدرسي	

القسم : 3ت ر المحـــور: الجداء السلمي في الفضاء يوم : 03/ 01 / 2010

الحصة : هندسة الموضوع : الجداء السلمي في الفضاء المدة المقترحة : 1 ســــاعة

المكتسبات القبلية	الكفاءات المستهدفة
1 . تعريف وخواص الجداء السلمي في المستوي	* تعريف و خواص الجداء السلمي في الفضاء * العبارة التحليلية للجداء السلمي في الفضاء

20 د

حل النشاطين الاول والثاني ص 194 :

الــــدرس

10 د

تعريف الجداء السلمي في الفضاء:

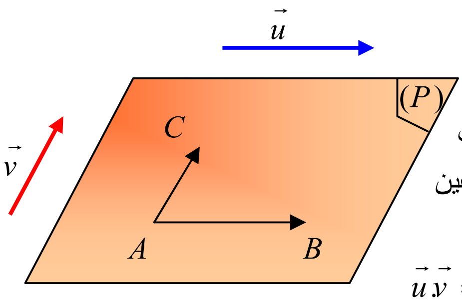
$\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعان من الفضاء . A ، B و C ثلاث نقط

حيث $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$

يوجد على الأقل مستو (P) يشمل النقط A ، B و C بحيث

الجداء السلمي للشعاعين $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ هو الجداء السلمي للشعاعين

$\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{AC}$ في المستوي (P)



ملاحظة : في المستوي لدينا : $\vec{u}\,\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$

و هي عبارة مستقلة عن تمثيل $\vec{u}$ و $\vec{v}$ وبالتالي مستقلة عن المستوي (P)

خواص : كل خواص الجداء السلمي في المستوي تطبق على الأشعة من نفس المستوي في الفضاء

نتائج : $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ شعاعان من الفضاء ينتميان إلى نفس المستوي ، k عدد حقيقي

لدينا : $\vec{u}\,\vec{u}=\frac{1}{2}\|\vec{u}\|^2$ ، $\vec{u}\,\vec{v}=\vec{v}\,\vec{u}$ ، $(k\vec{u}).\vec{v}=\vec{u}.(k\vec{v})=k(\vec{u}\,\vec{v})$ ،

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+2\vec{u}\,\vec{v}+\|\vec{v}\|^2$$

خاصية : $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ و $\vec{w}$ أشعة من الفضاء . لدينا $\vec{u}(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\,\vec{v}+\vec{u}\,\vec{w}$

تعريف : يكون الشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدين إذا و فقط إذا كان $\vec{u}\,\vec{v}=0$

ملاحظة : $\vec{0}$ عمودي على كل شعاع من الفضاء.

العبارة التحليلية :

في أساس متعامد و متجانس ليكن $\vec{u}(x,y,z)$ و $\vec{v}(x',y',z')$

لدينا : $\vec{u}\,\vec{v}=x.x'+y.y'+z.z'$

نتيجة : لتكن النقطتين $A(x_A,y_A,z_A)$ و $B(x_B,y_B,z_B)$ في معلم متعامد و متجانس من الفضاء

لدينا $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$

تقويم : تمرين ص 208 رقم 01 , 02 و06

25 د

مراحل سير الحصة

الوسائل التعليمية		
المراجع	الكتاب المدرسي	

القسم : 3ت ر　　　　المحـــور: الجداء السلمي في الفضاء(تابع)

الحصة : هندسة　　　　الموضوع : الجداء السلمي في الفضاء(تابع)　　　　المدة المقترحة : 1 ســـاعة

المكتسبات القبلية	الكفاءات المستهدفة
1 .	* التعامد في الفضاء

مراحل سير الحصة

20 د

حل النشاط الثالث ص 194 :

الـــــدرس

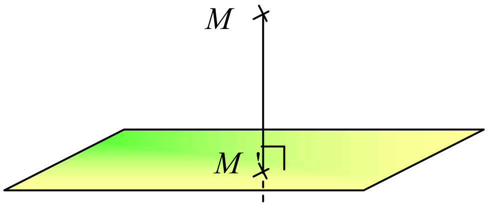
10 د

التعامد :

تعريف : الإسقاط العمودي في الفضاء :

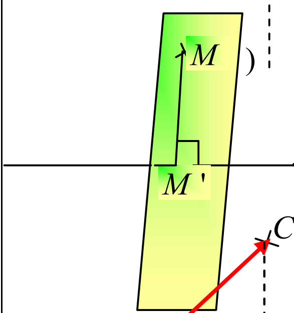
- <u>الإسقاط العمودي على مستو</u>

ليكن (P) مستو ، M نقطة من الفضاء .
المستقيم العمودي على (P) و الذي يشمل M يقطع (P) في نقطة وحيدة 'M .
'M هو المسقط العمودي للنقطة M على (P)



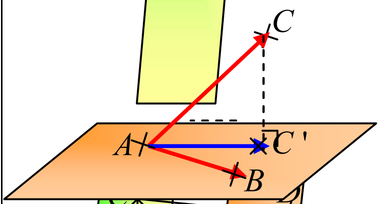
- <u>الإسقاط العمودي على مستقيم</u>

(D) مستقيم ، M نقطة من الفضاء .
المستوي العمودي على (D) و الذي يشمل M يقطع (D) في نقطة وحيدة 'M .
' M هو المسقط العمودي لـ M على (D)

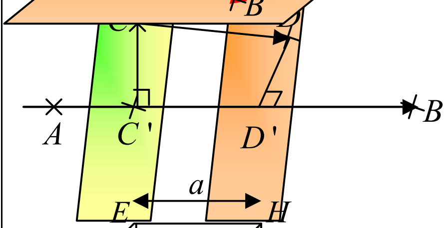


نتائج :

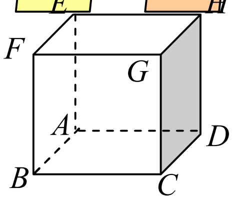
➤ A ، B نقطتان من المستوي (P) و C نقطة لا تنتمي إلى (P)
لدينا : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC'}$
حيث 'C المسقط العمودي لـ C على (P)



➤ $\vec{u}=\overrightarrow{AB}\neq\vec{0}$ و $\vec{v}=\overrightarrow{CD}$
لدينا $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{C'D'}$
حيث 'C و 'D المسقطان العموديان للنقطتين C و D
على الترتيب على المستقيم (AB)



مثال : نعتبر المكعب ABCDEFGH الذي ضلعه a
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}=a^2$



تقويم : تمرين ص 210 رقم 22

25 د

		الوسائل التعليمية
	الكتاب المدرسي	المراجع

• القسم : 3ت ر المحـــور: الجداء السلمي في الفضاء(تابع)

الحصة : هندسة الموضوع : المعادلة الديكارتية لمستو المدة المقترحة : 1 ســـــاعة

المكتسبات القبلية	الكفاءات المستهدفة
1 . الجداء السلمي لشعاعين 2 . العبارة التحليلية للجداء السلمي	* المعادلة الديكارتية لمستو

مراحل سير الحصة	**نشاط مقترح: 1/** M نقطة من (P) الذي يشمل A و $\vec{n}$ ناظمي له **تكافئ** $\vec{n}.\overrightarrow{AM}=0$. **2/** مجموعة النقط M(x ; y ; z) التي تحقق $ax+by+cz+d=0$ حيث a ، b و c أعداد حقيقة غير معدومة معا هي مستو و $\vec{n}(a;b;c)$ شعاع ناظمي له . الــــــدرس **المعادلة الديكارتية لمستو** **1.تعريف :** كل شعاع غير معدوم عمودي على شعاعين غير مرتبطين خطيا من مستو (P) هو شعاع عمودي على (P) **نتيجة :** إذا كان $\vec{n}$ شعاعا ناظميا (عموديا) على(P) فإن $\vec{n}$ عمودي على كل شعاع من المستوي(P) . و بالتالي كل مستقيم موجه بالشعاع $\vec{n}$ هو مستقيم عمودي على (P) . ☜ **تمييز مستو :** $\vec{u}$ شعاع غير معدوم . A نقطة من الفضاء مجموعة النقط M من الفضاء والتي تحقق $\vec{n}.\overrightarrow{AM}=0$ هي المستوي (P) الذي يشمل A و $\vec{n}$ شعاع ناظمي له **برهان :** **خاصية :** كل مستو، $\vec{n}(a;b;c)$ شعاع ناظمي له يقبل معادلة ديكارتية من الشكل : $ax+by+cz+d=0$ حيث d عدد حقيقي و بالعكس فإن مجموعة النقط M(x ; y ; z) التي تحقق $ax+by+cz+d=0$ حيث a ، b و c أعداد حقيقة غير معدومة معا هي مستو و $\vec{n}(a;b;c)$ شعاع ناظمي له . **برهان :** **حالات خاصة** * ≺ معادلة ديكارتية للمستوي $(o;\vec{i};\vec{j})$ هي $z=0$ * ≺ معادلة ديكارتية للمستوي $(o;\vec{j};\vec{k})$ هي $x=0$ * ≺ معادلة ديكارتية للمستوي $(o;\vec{i};\vec{k})$ هي $y=0$ (P) و (P') مستويان . $\vec{n}$ و $\vec{n}'$ ناظميان لهما على الترتيب . ≺ (P) يوازي (P') معناه يوجد k حقيقي حيث $\vec{n}=k.\vec{n}'$ ≺ (P) عمودي على (P') معناه $\vec{n}.\vec{n}'=0$ **تقويم : تمرين ص 209 رقم 12** , 13 و 14	20 د 10 د 25 د
الوسائل التعليمية		
المراجع	الكتاب المدرسي	

القسم : 3ت ر   المحـــور: الجداء السلمي في الفضاء(تابع)

الحصة : هندسة   الموضوع : المعادلة الديكارتية لمستو (تابع)   المدة المقترحة : 1 ســـــاعة

الكفاءات المستهدفة	المكتسبات القبلية
* بعد نقطة عن مستو * المرجح في الفضاء	1 . الجداء السلمي لشعاعين 2 . العبارة التحليلية للجداء السلمي

مراحل سير الحصة

15 د

حل النشاط الخامس:

الــــــدرس

بعد نقطة عن مستو

في معلم متعامد و متجانس ، نعتبر المستوي (P) حيث $ax+by+cz+d=0$

و $(a,b,c)\neq(0,0,0)$ معادلة ديكارتية له . A نقطة إحداثياتها $(x_A;y_A;z_A)$.

10 د

البعد بين A و (P) هو العدد الحقيقي الموجب $\dfrac{|ax_A+by_A+cz_A+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

المرجح

مبرهنة : $\{(A_1;a_1),(A_2;a_2),\dots,(A_n;a_n)\}$ جملة لـ n نقطة مثقلة حيث $\sum_{i=1}^{n}a_i\neq 0$

توجد نقطة وحيدة G تحقق: $a_1\overrightarrow{GA_1}+a_2\overrightarrow{GA_2}+.....+a_n\overrightarrow{GA_n}=\vec{0}$

تسمّى G مرجح الجملة .

➢ عندما تتساوى المعاملات غير المعدومة a_i ، تسمى G مركز ثقل الجملة .

مبرهنة : من أجل كل نقطة M من الفضاء يكون :

$$a_1\overrightarrow{MA_1}+a_2\overrightarrow{MA_2}+.....+a_n\overrightarrow{MA_n}=(a_1+a_2+.....+a_n)\overrightarrow{MG}$$

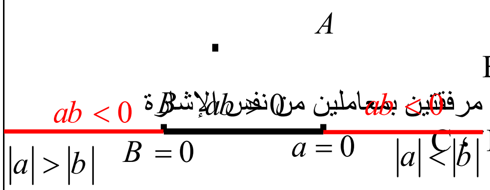
☜ **التمييز بالمرجح :**

A ، B ، C ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة

❶ المستقيم (AB) هو مجموعة مراجيح للنقطتين A ، B

❷ القطعة [AB] هي مجموعة مراجيح للنقطتين A ، B مرفقتين بمعاملين من نفس الإشارة

❸ المستوي (ABC) هو مجموعة مراجيح للنقط A ، B ، C



برهان :

تقويم : ■ تمرين ص 210 رقم 23

■ تمرين ص 211 رقم 36

30 د

الوسائل التعليمية	
المراجع	الكتاب المدرسي

القسم : 3ت ر المحـــور: الجداء السلمي في الفضاء(تابع) يوم :

الحصة : أ. موجهة الموضوع : المعادلة الديكارتية لمستو (تابع) المدة المقترحة : 1 ســـــاعة

المكتسبات القبلية	الكفاءات المستهدفة
1 .	*

مراحل سير الحصة	**الموضوع الاول :** A ، B ، C ثلاث نقط من الفضاء ، ليست على استقامة واحدة . k عدد حقيقي من المجال [-1 ; 1] G_k مرجح الجملة $\left\{\left(A;k^2+1\right),\left(B;k\right);\left(C;-k\right)\right\}$. 1) مثل النقط A ، B ، C و I منتصف [BC] ثم أنشئ النقطتين G_1 و G_2 2) a) بين أنه من أجل كل k من المجال [-1 ; 1] لدينا : $\overrightarrow{AG_k}=\frac{-k}{k^2+1}\overrightarrow{BC}$ b) شكل جدول تغيرات الدالة f المعرفة على المجال [-1 ; 1] كما يلي : $f(x)=\frac{-x}{x^2+1}$ c) استنتج مجموعة النقط G_k لما k يمسح المجال [-1 ; 1] 3) عين (E) مجموعة النقط M من الفضاء حيث : $\left\Vert 2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\Vert=\left\Vert 2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\Vert$ 4) عين (F) مجموعة النقط M من الفضاء حيث $\left\Vert 2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\Vert=\left\Vert 2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\Vert$ 5) الفضاء منسوب الآن إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ ، النقط A ، B ، C تأخذ الإحداثيات (0 ; 0 ; 2) ، (-1 ; 2 ; 1) و (-1 ; 2 ; 5) على الترتيب . a) عين إحداثيات G_1 و G_2 ، تحقق أن (E) و (F) يتقاطعان. b) أحسب نصف قطر الدائرة (C) تقاطع (E) و (F) .	8 د 6 د 9 د 5 د 8 د 8 د 8 د 5 د
الوسائل التعليمية		
المراجع	الكتاب المدرسي	

القسم : 3ت ر   المحـــور: الجداء السلمي في الفضاء(تابع)

الحصة : هندسة   الموضوع : المستقيمات والمستويات في الفضاء   المدة المقترحة : 1 ســــاعة

المكتسبات القبلية	الكفاءات المستهدفة
1 * المستوي في الفضاء	*التمثيل الوسيطي لمستقيم في الفضاء * تقاطع المستقيمات و المستويات

15 د

حل النشاط

المستقيمات في الفضاء: الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس . (D) مستقيم من الفضاء يشمل النقطة $A(x_A;y_A;z_A)$ و $\vec{u}(a;b;c)$ شعاع ناظمي له .

■ M(x; y ; z) نقطة من (D) إذا و فقط إذا وجد عدد حقيقي t حيث $\overrightarrow{AM}=t\vec{u}$

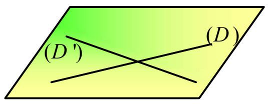
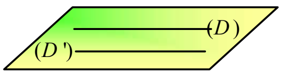
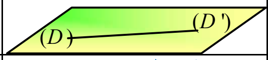
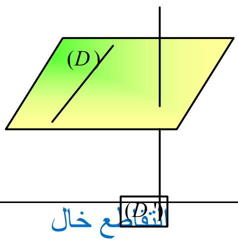
10 د

وهذا يعني باستعمال الإحداثيات الديكارتية $\begin{cases} x-x_A=at \\ y-y_A=bt \\ z-z_A=ct \end{cases}$ مع $t\epsilon Z$ أو $\begin{cases} x=x_A+at \\ y=y_A+bt \\ z=z_A+ct \end{cases}$ مع $t\epsilon Z$

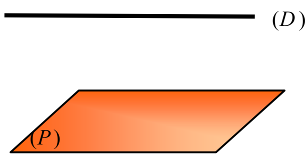
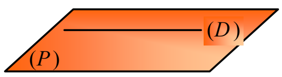
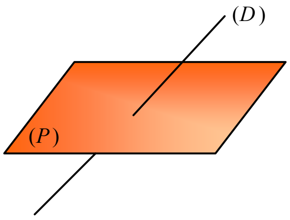
نسمي الجملة السابقة تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D) .

تقاطع المستقيمات والمستويات: (P) و (P') مستويان ، $\vec{n}$ و $\vec{n}\,'$ ناظميان لهما على الترتيب (D) و(D') مستقيمان موجهان بالشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{u}\,'$ على الترتيب

➢ **تقاطع مستقيمين :** يمكن للمستقيمين (D) و (D') أن يكونا

من نقس المستوي			من مستويين مختلفين
متقاطعين	متوازيين		
	متوازيين و مختلفين	منطبقين	
			
التقاطع نقطة	التقاطع خال	التقاطع مستقيم	التقاطع خال

➢ **تقاطع مستقيم و مستو:** نلخص الوضعيات فيما يلي

(D) يوازي (P)		(D) يقطع (P)
(D) يوازي (P) " تقاطع خال "	(D) محتوا في (P)	
		

تقويم : ■ تمرين ص 226 رقم 02 و 13

30 د

مراحل سير الحصة

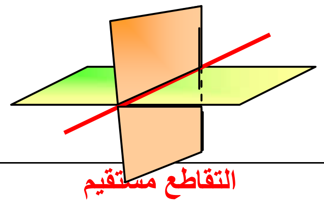
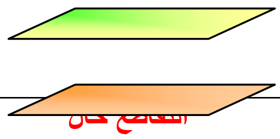
الوسائل التعليمية	
المراجع	الكتاب المدرسي

القسم : 3ت ر المحـــور: الجداء السلمي في الفضاء(تابع)

الحصة : هندسة الموضوع : المستقيمات والمستويات في الفضاء المدة القترحة : 1 ســـــاعة

المكتسبات القبلية	الكفاءات المستهدفة
1 * المستوي في الفضاء	* تقاطع مستويين او ثلاث مستويات

مراحل سير الحصة	**حل النشاط الاول ص216 و النشاط الرابع ص 217** **تقاطع مستويين :** الوضعيات الممكنة هي :	15 د

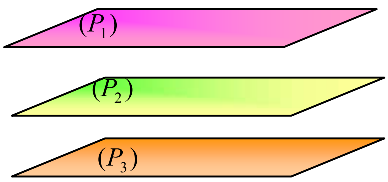
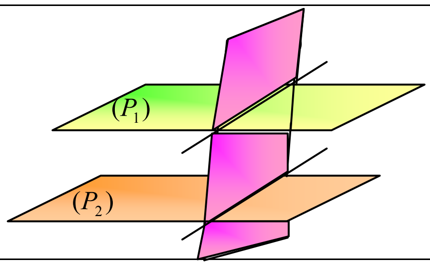
متقاطعان	متوازيان	
	منطبقان	تقاطع خالي
		
التقاطع مستقيم	التقاطع مستو	التقاطع خال

15 د

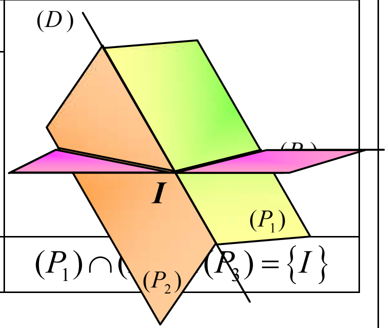
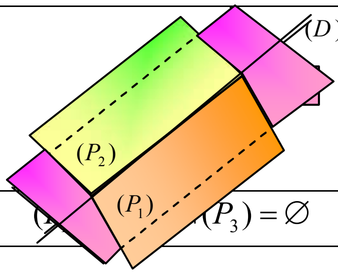
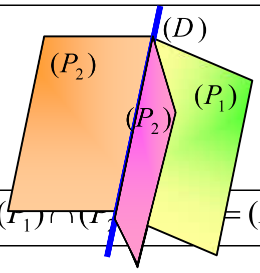
خاصية : مستقيم في الفضاء معرّف بجملة معادلتين ديكارتيتين لمستويين متقاطعين

تقاطع ثلاث مستويات : (P_1) ، (P_2) ، (P_3) ثلاث مستويات $\overrightarrow{n_1}$ ، $\overrightarrow{n_2}$ ، $\overrightarrow{n_3}$ أشعة ناظمية لها .

➢ الوضعيات النسبية : 1) (P_1) ، (P_2) متوازيان

(P_1) ، (P_3) **متوازيان**	(P_1) ، (P_3) **متقاطعان**
	
$(P_1)\cap(P_2)\cap(P_3)=\varnothing$	$(P_1)\cap(P_2)\cap(P_3)=\varnothing$

➢ الوضعيات النسبية 1) (P_1) ، (P_2) يتقاطعان و تقاطعهما المستقيم (D)

(D) لا يقطع (P_3)	**(D) يوازي** (P_3)	
	(D) يوازي (P_3) **بتقاطع خال**	**(D) محتو في** (P_3)
		
$(P_1)\cap(P_2)\cap(P_3)=\{I\}$	$(P_1)\cap(P_2)\cap(P_3)=\varnothing$	$(P_1)\cap(P_2)\cap(P_3)=(D)$

تقويم :1/* ص 227 رقم 23 2/ * ص 228 رقم 28 30 د

المراجع الكتاب المدرسي

القسم : 3ت ر **المحـــور:** الجداء السلمي في الفضاء(تابع)

الحصة : هندسة **الموضوع :** المستقيمات والمستويات في الفضاء(تابع) **المدة المقترحة :** 1 ســـــاعة

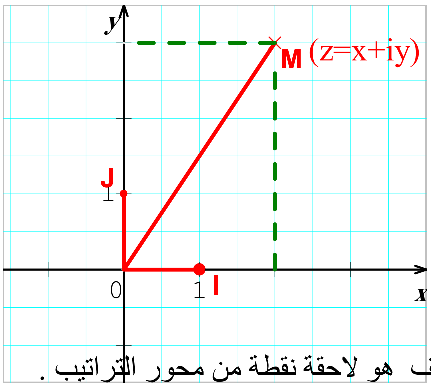
الكفاءات المستهدفة	المكتسبات القبلية
*بعد نقطة عن مستقيم في الفضاء	1 * المستوي في الفضاء 2 * المستقيم في الفضاء

مراحل سير الحصة	**اعمـــال موجهـــة** **تمرين :** الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$. نعتبر النقط التالية A(1 ; 2 ; 3) ، B(3 ; 2 ; 1) و C(1 ; 3 ; 3) 1) بين أن النقط A ، B و C تعيّن مستويا ، أكتب معادلة ديكارتية له . 2) نعتبر المستويين (P_1) ، (P_2) حيث $(P_1): x - 2y + 2z - 1 = 0$ $(P_2): x - 3y + 2z + 2 = 0$ a) بين أن (P_1) ، (P_2) يتقاطعان و ليكن (Δ) تقاطعهما b) تحقق أن النقطة C تنتمي إلى المستقيم (Δ) c) أثبت أن الشعاع $\vec{u}(2;0;-1)$ شعاع توجيه للمستقيم (Δ) d) استنتج تمثيلا وسيطيا لـ (Δ) 2) لحساب بعد النقطة A عن المستقيم (Δ) الممثلة وسيطيا بالجملة $\begin{cases} x = 2k + 1 \\ y = 3 \\ z = -k + 3 \end{cases}$ مع $k \in R$ نعتبر النقطة M ذات الوسيط k من المستقيم (Δ) a) عين قيمة k حتى يكون الشعاعان $\overrightarrow{AM}$ و $\vec{u}$ متعامدين b) استنتج بعد النقطة A عن المستقيم (Δ) **تطبيق :** ص228 رقم 27	10 د 03 د 03 د 05 د 02 د 10 د 10 د 15 د
الوسائل التعليمية		
المراجع	الكتاب المدرسي	

القسم : 3ت ر المحـــور: الاعداد المركبة

الحصة : هندسة الموضوع : الاعداد المركبة المدة المقترحة : 1 ســـاعة

المكتسبات القبلية	الكفاءات المستهدفة
1	* تعريف العدد المركب * إلتمثيل الهندسي لعدد مركب

مراحل سير الحصة		
	تعريف العدد المركب: نسمي عددا مركبا كل عدد z يكتب على الشكل $z=x+iy$ حيث x و y عددان حقيقيان و $i^2=-1$ **ملاحظات وترميز:** * نرمز إلى مجموعة الأعداد المركبة بـ : $\mathbb{C}$. * العدد الحقيقي x يسمى الجزء الحقيقي للعدد المركب z ، و نرمز $\mathrm{Re}(z)$. * العدد الحقيقي y يسمى الجزء التخيلي للعدد المركب z ، و نرمز $\mathrm{Im}(z)$. * إذا كان $y=0$ نقول أن العدد z حقيقي. * إذا كان $x=0$ نقول أن العدد z تخيلي صرف (أو تخيلي محض أو تخيلي بحت) . * يكون العدد المركب z معدوما إذا و فقط إذا كان جزؤه الحقيقي معدوما و جزؤه التخيلي معدوما. أي $z=0$ يعني $x=0$ و $y=0$. * الكتابة $z=x+iy$ تسمى الشكل الجبري للعدد المركب z . **2. تساوي عددين مركبين .** يكون عددان مركبان z و z' متساويين إذا وفقط إذا كان لهما نفس الجزء الحقيقي و نفس الجزء التخيلي. نضع $z=x+iy$ و $z'=x'+iy'$: $z=z'$ معناه ($x=x'$ و $y=y'$) **3.إلتمثيل الهندسي لعدد مركب.**  المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{OI},\vec{OJ})$. إلى كل عدد مركب $z=x+iy$ ($x\in\mathbb{R}$, $y\in\mathbb{R}$ و $i^2=-1$) نرفق النقطة M إحداثياها $(x;y)$ النقطة M تسمى صورة العدد المركب z و الشعاع $\vec{OM}$ يسمى كذلك صورة للعدد المركب z . * كل نقطة M هي صورة عدد مركب وحيد $z=x+iy$ نقول أن z لاحقة النقطة M و الشعاع $\vec{OM}$. * محور الفواصل يسمى المحور الحقيقي ،لأن الأعداد الحقيقية هي لواحق نقط محور الفواصل. * محور التراتيب يسمى المحور التخيلي لأن كل عدد تخيلي صرف هو لاحقة نقطة من محور التراتيب . * المستوي يسمى المستوي المركب. **تقويم : ■ تمرين ص 210 رقم 23**	20 د 35 د
الوسائل التعليمية		
المراجع	الكتاب المدرسي	

القسم : 3ت ر　　**المحـــور:** الاعداد المركبة (تابع)

الحصة : هندسة　　**الموضوع :** الحساب في c　　**المدة المقترحة :** 1 ســـاعة

المكتسبات القبلية	الكفاءات المستهدفة
1	* مرافق عدد مركب * إلتفسير الهندسي لمرافق عدد مركب

مراحل سير الحصة

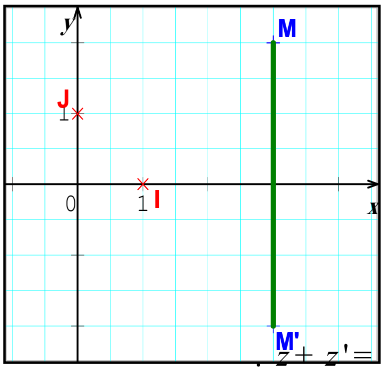
20 د

1.تعريف مرافق عدد مركب: z عدد مركب حيث $z = x + iy$ ($x \in R$ و $y \in R$).

العدد المركب $x - iy$ و الذي نرمز له $\bar{z}$ يسمى مرافق العدد المركب z .

ملاحظة: للحصول على مرافق عدد مركب z ، نغير إشارة الجزء التخيلي.

2.التفسير الهندسي لمرافق عدد مركب



المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس

z عدد مركب حيث $z = x + iy$.

لتكن M صورة z و M' صورة $\bar{z}$ إذن M و M' متناظرتان بالنسبة إلى حامل محور الفواصل.

العمليات في مجموعة الأعداد المركبة.

1.مجموع وجداء عددين مركبين.

تعريف: z عدد مركب حيث $z = x + iy$ ($x \in R$ و $y \in R$)

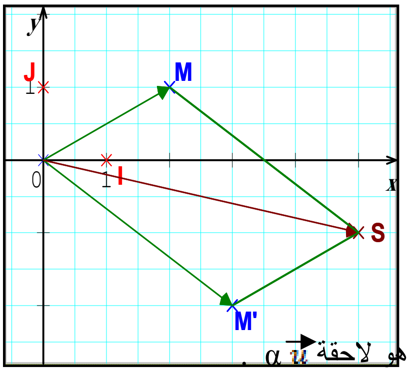
و z' عدد مركب حيث $z' = x' + iy'$ ($x' \in R$ و $y' \in R$).

مجموع العددين z و z' هو العدد المركب $z + z' = x + x' + i(y + y')$.

جداء العددين z و z' هو العدد المركب $z.z' = xx' - yy' + i(xy' + x'y)$.

ملاحظة: قواعد الحساب المعروفة في R تبقى صحيحة في C.

أمثلة :



2.التفسير الهندسي لمجموع عددين مركبين

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس

$z = x + iy$ عدد مركب و $z' = x' + iy'$ عدد مركب .

المجموع $z + z'$ هو لاحقة النقطة S حيث :

$\vec{OS} = \vec{OM} + \vec{OM'}$ و $\vec{OS}$ هي محصلة الشعاعين $\vec{OM}$ و $\vec{OM'}$

ملاحظات: ■ إذا كان z لاحقة الشعاع $\vec{u}$ و كان z' لاحقة الشعاع $\vec{v}$ ،

فإن $z + z'$ هو لاحقة $\vec{u} + \vec{v}$.

■ إذا كان z لاحقة الشعاع $\vec{u}$ و كان α عددا حقيقيا فإن αz هو لاحقة $\alpha \vec{u}$.

■ شعاعان متساويان لهما نفس اللاحقة .

تقويم : ■ تمرين ص 240 رقم 10 , 11 و 12

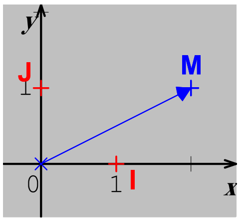
35 د

الوسائل التعليمية	
المراجع	الكتاب المدرسي

القسم : 3ت ر المحـــور: الاعداد المركبة (تابع)

الحصة : هندسة الموضوع : الحساب في C (تابع) المدة المقترحة : 1 ســـــاعة

الكفاءات المستهدفة	المكتسبات القبلية
* طويلة و عمدة عدد مركب.	1* الاحداثيات القطبية

مراحل سير الحصة	**حل النشاط الاول ص 120** **الـــدرس** **1.طويلة عدد مركب.** **تعريف:** z عدد مركب حيث: $z=x+iy$ (x و y عددان حقيقيان). نسمي طويلة العدد المركب z العدد الحقيقي الموجب الذي نرمزله $\|z\|$ حيث $\|z\|=\sqrt{x^2+y^2}$. **ملاحظات:** · إذا كان z عددا حقيقيا فإن طويلة z هي القيمة المطلقة للعدد z . * $z=0$ يعني $\|z\|=0$. * $\|z\|^2=x^2+y^2$.  **التفسير الهندسي لطويلة عدد مركب.** المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$. z عدد مركب حيث $z=x+iy$ إذا كانت M صورة z فإن $OM=\|z\|$ **خواص طويلة عدد مركب.** **خواص:** من أجل كل عددين مركبين z و z' . *1 $\|\bar{z}\|=\|z\|$. *2 $\|-z\|=\|z\|$ · *3 $\|z\times z'\|=\|z\|\times\|z'\|$ ·. *4 $\left\|\frac{z}{z'}\right\|=\frac{\|z\|}{\|z'\|}$ ·. مع $z'\neq 0$ *5 $\|z^n\|=\|z\|^n$ · *6 $\|z+z'\|\leq\|z\|+\|z'\|$ **ملاحظة:** A و B نقطتان لاحقتاهما z_A و z_B على الترتيب : $AB=\|z_B-z_A\|$. **2.عمدة عدد مركب غير معدوم.** **تعريف:** z عدد مركب غير معدوم حيث: $z=x+iy$ (x و y عددان حقيقيان). في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$ لتكن M صورة z. نسمي عمدة العدد المركب z و نرمز $\arg(z)$ كل قيس بالرديان للزاوية الموجهة. $(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OM})$ **ملاحظات:** · كل عدد مركب غير معدوم z له عدد غير منته من العمد . **تقويم :** ■ تمرين ص 146 رقم 33 و 34 تمرين ص 147 رقم 41 و 42	20 د 10 د 25 د
الوسائل التعليمية		
المراجع	الكتاب المدرسي	

القسم : 3ت ر   المحـــــور: الاعداد المركبة (تابع)

الحصة : هندسة   الموضوع : الحساب في C (تابع)   المدة القترحة : 1 ســـــــاعة

المكتسبات القبلية	الكفاءات المستهدفة
1* الاحداثيات القطبية	* الشكل المثلثي لعدد مركب غير معدوم.

مراحل سير الحصة

نشاط مقترح :

20 د

الــــدرس

1.تعريف و خواص .

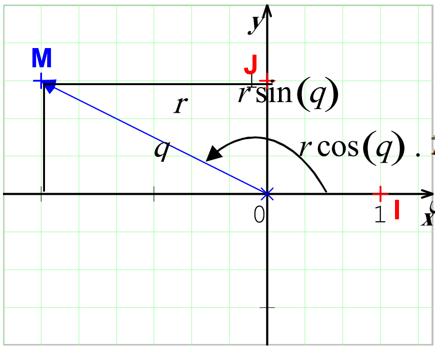
في المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس($\overrightarrow{O\ ;\ OI}\ ,\overrightarrow{OJ}$). تعلم نقطة M بإحداثييها الديكارتية $(x;y)$

10 د

أو بإحداثييها القطبية $(r;q)$ و $OM=r$. $(\overrightarrow{OI}\ ,\overrightarrow{OM})=q$ ، و لدينا $x=r\cos(q)$ و $y=r\sin(q)$

تعريف: z عدد مركب غير معدوم. العدد z يكتب على الشكل $z=r(\cos(q)+i\sin(q))$ حيث :

$r=|z|$ و $q=\arg(z)$. هذا الشكل يسمى الشكل المثلثي لـ z .



ملاحظة: إذا كان $z=x+iy$ ، $\cos(q)=\frac{x}{r}$ و $\sin(q)=\frac{y}{r}$.

خاصية: يكون عددان مركبان مكتوبان على الشكل المثلثي متساويين إذا وفقط إذا كانت لهما نفس الطويلة و عمدتان متوافقتان بترديد 2π .

خاصية: إذا كان $z=l(\cos(q)+i\sin(q))$ و كان $l>0$ فإن $l=|z|$ و $q=\arg(z)$.

الخاصيتان تستنتج مباشرة من التعريف .

2. خواص عمدة عدد مركب غير معدوم.

خواص: z و z' عددان مركبان غير معدومين.

1* $\arg(z.z')=\arg(z)+\arg(z')$.   **2*** $\arg\left(\frac{z}{z'}\right)=\arg(z)-\arg(z')$.

3* $\arg(z^n)=n\arg(z)$.

البرهان:

تقويم : ■ تمرين ص 146 رقم 40

تمرين ص 147 رقم 46

35 د

الوسائل التعليمية

المراجع: الكتاب المدرسي

القسم : 3ت ر **المحـــور:** الاعداد المركبة (تابع)

الحصة : هندسة **الموضوع :** الحساب في C (تابع) **المدة المقترحة :** 1 ســـــاعة

المكتسبات القبلية	الكفاءات المستهدفة
1 الشكل المثلثي لعدد مركب غير معدوم	* الشكل الأسي لعدد مركب غير معدوم.

مراحل سير الحصة	**نشاط مقترح :** الـــدرس **1.الشكل الأسي لعدد مركب طويلته 1.** **تعريف:** العدد المركب الذي طويلته 1 و θ عمدة له يكتب $e^{i\theta}$. حيث $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$. هذا الترميز يسمى ترميز أولر. **2.الشكل الأسي لعدد مركب غير معدوم.** **تعريف:** العدد المركب z غير المعدوم الذي طويلته r و θ عمدة له يكتب $z = re^{i\theta}$. هذه الكتابة تسمى الشكل الأسي للعدد المركب z . **3. قواعد الحساب على الشكل الأسي.** **خواص:** θ و θ' عددان حقيقيان. *1 $e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta}.e^{i\theta'}$. *2 $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$. *3 $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$ أمثلة : **4. دستور موافر.** **خواص:** z عدد مركب طويلته r و θ عمدة له . من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم لدينا: $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$. **تقويم : ■ تمرين ص 147 رقم 55**	20 د 10 د 35 د
الوسائل التعليمية		
المراجع	الكتاب المدرسي	

القسم : 3ت ر　　　المحـــــور: الاعداد المركبة (تابع)

الحصة : هندسة　　　الموضوع : الحساب في $\mathbb{C}$ (تابع)　　　المدة المقترحة : 1 ســـــاعة

الكفاءات المستهدفة	المكتسبات القبلية
* المعالدلات من الدرجة الثانية.	1

مراحل سير الحصة

20 د

نشاط مقترح :

الـــدرس

1.تساوي عددين مركبين.

مبرهنة: (تقبل) يكون عددان مركبان z و z' متساويين إذا و فقط إذا كان لهما نفس الطويلة، نفس الجزء الحقيقي و نفس الجزء التخيلي.

10 د

أي: $(z = z')$ معناه
$$\begin{cases} |z| = |z'| \\ Re(z) = Re(z') \\ Im(z) = Im(z') \end{cases}$$

2.الجذران التربيعيان لعدد مركب.

تعريف: w عدد مركب. يسمى حلا المعادلة $z^2 = w$ في المجموعة $\mathbb{C}$ الجذرين التربيعيين للعدد w

أمثلة : · الجذران التربيعيان للعدد $3-4i$ هما $2-i$ و $-2+i$.

· الجذران التربيعيان للعدد -9 هما $-3i$ و $3i$.

ملاحظة: كل عدد مركب له جذران تربيعيان متناظران .

3. المعادلات من الدرجة الثانية .

مبرهنة: لتكن المعادلة ذات المجهول المركب z : $az^2 + bz + c = 0$ حيث a ، b و c أعداد مركبة و $a \neq 0$. و $\Delta = b^2 - 4ac$ مميزها .

· إذا كان $\Delta = 0$ ، المعادلة تقبل حلا مضاعفا $z = -\dfrac{b}{2a}$.

· إذا كان $\Delta \neq 0$ ، المعادلة تقبل حلين متمايزين :

$$z' = \frac{-b - w}{2a} \quad \text{و} \quad z'' = \frac{-b + w}{2a}$$

حيث w جذر تربيعي لِـ Δ.

ملاحظة: إذا كان z' و z'' حلي المعادلة فإن من أجل كل عدد مركب z :

$$az^2 + bz + c = a(z - z')(z - z'')$$

مثال:

تقويم : ■ تمرين ص 148 رقم 60 و 61

35 د

الوسائل التعليمية	
المراجع	الكتاب المدرسي

القسم : 3ت ر المحـــور: الاعداد المركبة (تابع)

الحصة : هندسة الموضوع : تذكير حول التحويلات النقطية المألوفة المدة المقترحة : 1 ســــاعة

المكتسبات القبلية	الكفاءات المستهدفة
1	*التحويلات النقطية المألوفة

مراحل سير الحصة	1) **تعريف الانسحاب:** الانسحاب الذي شعاعه $\vec{u}$ هو التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M من المستوي النقطة M' من المستوي حيث: $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$ **خواص :** * الانسحاب الذي شعاعه $\vec{u}$ تحويله العكسي هو الانسحاب الذي شعاعه $-\vec{u}$. * الانسحاب الذي شعاعه غير معدوم لا يقبل أية نقطة صامدة . * **الخاصة المميزة:** صورة ثنائية (A,B) هي ثنائية (A',B') تحقق $A'B' = AB$. * الانسحاب تقايس. 2) **تعريف التحاكي:** W نقطة ثابتة و k عدد حقيقي غير معدوم. التحاكي الذي مركزه W و نسبته k هو التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M من المستوي النقطة M' من المستوي حيث : $\overrightarrow{WM'} = k\overrightarrow{WM}$ **خواص:** * إذا اختلفت M عن W فإن M' تختلف عن W و النقط W ، M و M' على استقامة واحدة . * التحاكي الذي مركزه W و نسبته k , تحويله العكسي هو التحاكي الذي مركزه W و نسبته $\frac{1}{k}$. * **الخاصة المميزة:** صورة ثنائية (A,B) بالتحاكي الذي مركزه w و نسبته k هي الثنائية (A',B') التي تحقق: $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$ * نلاحظ أنه إذا كان $\|k\| \neq 1$ فإن $A'B' \neq AB$ و بالتالي فإن التحاكي ليس تقايسا. 3) **تعريف الدوران:** w نقطة من المستوي الموجه و q عدد حقيقي الدوران الذي مركزه W و زاويته q هو التحويل النقطي الذي يرفق النقطة W بنفسها و يرفق بكل نقطة M تختلف عن W النقطة M' حيث: $WM = WM'$ و $(\overrightarrow{WM}, \overrightarrow{WM'}) = \theta$ **خواص:** * الدوران الذي مركزه W و زاويته غير معدومة له نقطة صامدة وحيدة هي المركز W. * الدوران الذي مركزه w و زاويته θ , تحويله العكسي هو الدوران الذي مركزه w و زاويته (-θ) * **الخاصة المميزة:** صورة كل ثنائية (A,B) بالدوران الذي مركزه w و زاويته θ هي ثنائية (A',B') تحقق ما يلي: $A'B' = AB$ و $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = \theta$. * الدوران تقايس. **تقويم :** ■ تمرين ص 240 رقم 10 , 11 و 12	20 د 35 د
الوسائل التعليمية		
المراجع	الكتاب المدرسي	

القسم : 3ت ر المحـــور: الاعداد المركبة (تابع)

الحصة : هندسة الموضوع : الأعداد المركبة و التحويلات النقطية المدة المقترحة : 1 ســـــاعة

المكتسبات القبلية	الكفاءات المستهدفة
1 . الجداء السلمي لشعاعين	* الأعداد المركبة و التحويلات النقطية

مراحل سير الحصة		
	نشاط : الـــدرس **الأعداد المركبة و التحويلات النقطية.** في كل ما يأتي المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$ f تحويل نقطي من المستوي المركب الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث $z'=az+b$ مع $a\in\mathbb{R}^*$ أو $a\in\mathbb{C}$ و $\lvert a\rvert=1$. ونكتب $f(M)=M'$ يعني $z'=az+b$. **1.الحالة الأولى $a=1$.** **خاصية:** التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث $z'=z+b$ (b عدد مركب) هو انسحاب شعاعه $\vec{U}$ صورة b. **2.الحالة الثانية $a\in\mathbb{R}^*-\{1\}$.** **خاصية:** التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث $z'=az+b$ مع a عدد حقيقي غير معدوم و يختلف عن 1 و b عدد مركب ، هو التحاكي الذي مركزه النقطة Ω ذات اللاحقة $\dfrac{b}{1-a}$ ونسبته a. **3.الحالة الثالثة $a\in\mathbb{C}$ و $\lvert a\rvert=1$.** **خاصية:** التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث $z'=az+b$ مع a عدد مركب غير حقيقي طويلته 1 و b عدد مركب ، هو الدوران الذي مركزه النقطة Ω ذات اللاحقة $\dfrac{b}{1-a}$ ، وزاويته $\arg(a)$. **تقويم :** ■ تمرين ص 151 رقم 78 , 79 و80	25 د 10 د 20 د
الوسائل التعليمية		
المراجع	الكتاب المدرسي	

القسم : 3ت ر المحـــور: الاعداد المركبة (تابع)

الحصة : هندسة الموضوع : الحساب في C (تابع) المدة المقترحة : 1 ســـــاعة

المكتسبات القبلية	الكفاءات المستهدفة
1 المعادلات من الدرجة الثانية	*حل معادلة من الدرجة الرابعة و معادلة من الدرجة الثالثة

مراحل سير الحصة		
مراحل سير الحصة	**1.معادلة من الدرجة الرابعة:** المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$ ليكن كثير الحدود $f(z)$ للمتغير المركب z حيث : $f(z)=z^4+4iz^2+12(1+i)z-45$. 1) أحسب $f(-3)$ 2) أحسب $f(3i)$. 3) أوجد كثير الحدود $g(z)=az^2+bz+c$ للمتغير المركب z (a ، b و c أعداد مركبة) حيث: $f(z)=g(z)[z^2+(3-3i)z-9i]$. 4) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $f(z)=0$. 5) نسمي A ، B ، C ، D صور الأعداد : $3i$ ، $1-2i$ ، $2-i$ و -3 على الترتيب . a) أثبت وجود دوران r يحول A إلى B و يحول C إلى D. b) أثبت وجود تحاكي h يحول A إلى B و يحول D إلى C. c) عين العبارة المركبة للتحويل $r\circ h$. d) عين العبارة المركبة للتحويل $h\circ r$. **2.معادلة من الدرجة الثالثة:** المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$ ليكن كثير الحدود $f(z)$ للمتغير المركب z حيث أن : $f(z)=z^3+(14-i\sqrt{2})z^2+(74-14i\sqrt{2})z-74i\sqrt{2}$. 1) أثبت أن $f(z)$ يقبل جذرين مترافقين . 2) أحسب $f(-7+5i)$. 3) أحسب $f(i\sqrt{2})$. 4)حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $f(z)=0$. 5) نسمي A ، B ، C صور الأعداد : $-7+5i$ ، $-7-5i$ ، و $i\sqrt{2}$ على الترتيب . عين لاحقة النقطة G صورة النقطة C بالدوران r الذي مركزه O و أحد أقياس زاويته $-\frac{p}{4}$. 6) لتكن D النقطة التي لاحقتها $1+i$.عين لاحقة النقطة E حيث $ABDE$ متوازي الأضلاع . 7) لتكن F النقطة التي لاحقتها $1+11i$. نضع $w=\frac{(z_A-z_D)}{(z_F-z_B)}$. أ/ أكتبw على الشكل الجبري ب/ أكتبw على الشكل الأسي . 8) * أثبت أن المستقيمين (AD) و (BF) متعامدان. * استنتج طبيعة الرباعي $ABDF$.	20 د 35 د
الوسائل التعليمية		
المراجع	الكتاب المدرسي	

القسم : 3ت ر **المحـــور: الاعداد المركبة (تابع)**

الحصة : هندسة **الموضوع : الجذور النونية لعدد مركب غير معدوم** **المدة المقترحة : 1 ســـــاعة**

المكتسبات القبلية	الكفاءات المستهدفة
1 . تساوي عددين مركبين في شكلهما المثلثي	* الجذور النونية لعدد مركب غير معدوم وتمثيلها

مراحل سير الحصة	**اعمال موجهة**	
	الجذور النونية لعدد مركب غير معدوم .	
	1. الحالة العامة :	
	ليكن العدد المركب $z = r(\cos(q) + i\sin(q))$ مع r عدد حقيقي موجب تماما و q عدد حقيقي	20 د
	ليكن العدد المركب $w = r(\cos(a) + i\sin(a))$ مع r عدد حقيقي موجب تماما و a عدد حقيقي ، جذرا نونيا للعدد z أي $z = w^n$ مع n عدد طبيعي أكبر من أو يساوي 2.	
	1) بتطبيق دستور موافر أكتب w^n بدلالة n .	
	2) بين أن $z = w^n$ يعني ($r = \sqrt[n]{r}$ و $a = \frac{q}{n} + \frac{k2p}{n}$).حيث k عدد صحيح	
	3) أوجد w_0 ، w_1 الجذرين النونيين المحصل عليهما من أجل $k = 0$ و $k = 1$ على الترتيب .	
	4) بين أن z يقبل n جذر نوني . **5)** أكتب هذه الجذور النونية على الشكل الأسي .	
	6) المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$.	
	* كيف يتم تمثيل النقط M_k صور الجذور النونية لـ z قي المستوى ؟	
	2. تطبيق أول : ليكن العدد المركب $z = 4 + 4i\sqrt{3}$.	
	1) أكتب العدد z على الشكل المثلثي . **2)** أوجد الجذور التكعيبية للعدد z .	
	3) المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$.	20 د
	* مثل في المستوي النقط M_k صور الجذور التكعيبية لـ z .	
	2. تطبيق ثان .	
	1) أحسب $(1 - i)^6$. **2)** أكتب 1 على الشكل المثلثي .	
	3) عين الجذور السداسية للعدد المركب 1 على الشكل المثلثي.	
	4) أكتب الجذور السداسية للعدد المركب 1 على الشكل الجبري.	
	5) أكتب العدد المركب $1 - i$ على الشكل المثلثي .	
	6) باستعمال الجذور السداسية للعدد المركب 1 عين الجذور السداسية للعدد $8i$ على الشكل المثلثي.	20 د
	7) أكتب الجذور السداسية للعدد المركب $8i$ على الشكل الجبري.	
	8) المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$.	
	* مثل في المستوي النقط M_k صور الجذور السداسية لـ1 ثم مثل في المستوي النقط P_k صور الجذور السداسية لـ $8i$.	
الوسائل التعليمية		
المراجع	الكتاب المدرسي	

القسم: 3 ت ر المحـــور: الاعداد المركبة (تابع)

الحصة : هندسة الموضوع : التشابه المباشر. المدة المقترحة : 1 ســـاعة

الكفاءات المستهدفة	المكتسبات القبلية
* تعريف التشابه المباشر هندسيا	1 .

مراحل سير الحصة	النشاط الاول ص 164 الـــدرس 1. التشابه المباشر. في كل ما يأتي،المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$. تعريف: القول أن التحويل النقطي S تشابه مباشر معناه أن S يحافظ على نسب المسافات و على الزوايا الموجهة أي من أجل كل نقط M,N,P,Q من المستوي و N لاتنطبق على M , صورها M',N',P',Q' على الترتيب فإن: $\frac{PQ}{MN}=\frac{P'Q'}{M'N'}$ و $(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{PQ})=(\overrightarrow{M'N'},\overrightarrow{P'Q'})$. 2. نسبة تشابه مباشر . خاصية: إذا كان S تشابها مباشرا فإن S يضرب المسافات في عدد حقيقي موجب تماما k. العدد k يسمى نسبة التشابه S . البرهان: حالة خاصة : إذا كان $k=1$ نقول عن التشابه المباشر S أنه تقايس موجب أو إزاحة أي S انسحاب أو دوران . 3. زاوية تشابه مباشر . تعريف: S تشابه مباشر من المستوي . S يحافظ على الزوايا الموجهة $(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{PQ})=(\overrightarrow{M'N'},\overrightarrow{P'Q'})$ و منه الزاوية $(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{M'N'})$ زاوية ثابتة مستقلة عن اختيار النقطتين M و N هذه الزاوية $(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{M'N'})$ تسمى زاوية التشابه المباشر S. 4. التعبير عن تشابه مباشر بالأعداد المركبة . خاصية: كل تشابه مباشر من المستوي المركب له كتابة مركبة من الشكل $z'=az+b$ حيث a و b عددان مركبان و $a\neq 0$. البرهان: تقويم : ■ تمرين ص 179 رقم 10 و 14	20 د 15 د 20 د
الوسائل التعليمية		
المراجع	الكتاب المدرسي	

القسم :3 ت ر المحـــور: الاعداد المركبة (تابع)

الحصة : هندسة الموضوع : التشابه المباشر(تابع). المدة المقترحة : 1 ســـــــاعة

المكتسبات القبلية	الكفاءات المستهدفة
1 .	* تعريف التشابه المباشر بالأعداد المركبة

مراحل سير الحصة		
	النشاط الثاني ص 164 الـــــدرس **خواص التشابه المباشر (1).** **في كل ما يأتي،المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس** $(O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$. **1.تحويل نقطي كتابته المركبة** $z' = az + b$. **خاصية:** a و b عددان مركبان حيث $a \neq 0$. إذا كان S تحويلا نقطيا من المستوي المركب له كتابة مركبة من الشكل $z' = az + b$ ، فإن S تشابه مباشر نسبته $\|a\|$. **البرهان:** **ملاحظة:** لا توجد تشابهات أخرى كتابتها المركبة تختلف عن $z' = az + b$ مع $a \in C$ و $b \in C$. **2.حالات خاصة.** **1)** الانسحاب تشابه مباشر لأن شكله المركب هو $z' = z + b$ و هو من الشكل $z' = az + b$ مع $a = 1$. نسبة التشابه المباشر في هذه الحالة تساوي 1 . **2)** التحاكي تشابه مباشر لأن شكله المركب هو $z' = az + b$ حيث a عدد حقيقي غير معدوم و يختلف عن 1 . نسبة التشابه المباشر في هذه الحالة تساوي $\|a\|$. **3)** الدوران تشابه مباشر لأن شكله المركب هو $z' = az + b$ حيث a عدد مركب غير حقيقي طويلته تساوي1 . نسبة التشابه المباشر في هذه الحالة تساوي 1 . زاوية التشابه المباشر في هذه الحالة هي زاوية الدوران أي $\arg(a)$. **تقويم :** ■ تمرين ص 179 رقم 16 ■ تمرين ص 180 رقم 17	20 د 15 د 20 د
الوسائل التعليمية		
المراجع	الكتاب المدرسي	

القسم : 3 ت ر المحـــور: الاعداد المركبة (تابع)

الحصة : هندسة الموضوع : التشابه المباشر (تابع). المدة القترحة : 1 ســـــاعة

الكفاءات المستهدفة	المكتسبات القبلية
* تركيب تشابهين مباشرين * التحليل القانوني لتشابه مباشر	1 .

مراحل سير الحصة	**النشاط الثالث ص 165** الـــدرس **خواص التشابه المباشر (2).** **في كل ما يأتي،المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس** $(O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$. **1. تركيب تشابهين مباشرين .** **خاصية**: تركيب تشابهين مباشرين هو تشابه مباشر نسبته جداء النسبتين و زاويته مجموع الزاويتين . **البرهان:** **2.التحليل القانوني لتشابه مباشر.** **خاصية:** S تشابه مباشر نسبته $K \in R^{*+}$ و زاويته q , $q \in R$. · إذا كان $k=1$ و $q=0$ التشابه S انسحاب . · في الحالات الأخرى S يقبل نقطة صامدة وحيدة W لاحقتها w و $S=h o r=r o h$ ، حيث h هو التحاكي الذي مركزه W و نسبته k و r هو الدوران الذي مركزه W زاويته q . **البرهان:** **تقويم : ■ تمرين ص 184 رقم 49**	20 د 15 د 20 د
الوسائل التعليمية		
المراجع	الكتاب المدرسي	

القسم : 3 ت ر **المحـــــور:** (الاعداد المركبة (تابع)

الحصة : هندسة **الموضوع :** التشابه المباشر(تابع). **المدة المقترحة :** 1 ســـــــاعة

الكفاءات المستهدفة	المكتسبات القبلية
* تعيين تشابه مباشر * التشابه المباشر و نقط المستوي	1 . تعريف التشابه المباشر

مراحل سير الحصة		
مراحل سير الحصة	**النشاط** **الــــــدرس** **خواص التشابه المباشر(3).** **في كل ما يأتي،المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس** $(O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$. **1. تعيين تشابه مباشر .** **خاصية**: إذا كان S تشابها مباشرا مركزه W نسبته k حيث $K \in R^{*+} - \{1\}$ و زاويته θ فإن : $S(W) = W$ * . * من أجل كل نقطة M من المستوي تختلف عن W $S(M) = M'$ تعني $\begin{cases} WM = K\ WM' \\ (\overrightarrow{WM}, \overrightarrow{WM'}) = \theta \end{cases}$ **البرهان:** **2.التشابه المباشر و نقط المستوي.** **خاصية:** إذا كانت A ، B ، A' و B' أربع نقط حيث $B \neq A$ و $B' \neq A'$ فإنه يوجد تشابه مباشر وحيد يحول A إلى A' و يحول B إلى B' . **البرهان:** **نتائج:** . S هو التشابه المباشر الذي يحول A إلى A' و يحول B إلى B' . · إذا كان $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$ فإن S هو الانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AA'}$ لأن $a = \frac{z_{B'} - z_{A'}}{z_B - z_A} = 1$ · إذا كان $\overrightarrow{A'B'} \neq \overrightarrow{AB}$ فإن S هو تشابه مباشر نسبته $\frac{A'B'}{AB}$ و زاويته $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$. مركزه النقطة الصامدة. **تقويم :** ■ تمرين ص رقم	20 د 15 د 20 د
الوسائل التعليمية		
المراجع	الكتاب المدرسي	

القسم: 3 ت ر **المحـــور:** الاعداد المركبة (تابع)

الحصة : هندسة **الموضوع :** التشابه المباشر(تابع). **المدة القترحة :** 1 ســــــاعة

المكتسبات القبلية	الكفاءات المستهدفة
1 .	* تحويل نقطي كتابته المركبة $Z' = a\overline{Z} + b$.

مراحل سير الحصة	**اعمـــــال موجهــة** **تحويل نقطي كتابته المركبة $Z' = a\overline{Z} + b$.** تطبيق: المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O ; \overrightarrow{OI} , \overrightarrow{OJ})$. ليكن التحويل النقطي T من المستوي الذي بكل نقطة M من المستوي لاحقتها z يرفق النقطة M' من المستوي لاحقتها z' حيث أن : $z' = -3i\overline{z} + 2 + 6i$. (العدد $\overline{z}$ هو مرافق العدد z) . ليكن التحويل النقطي T' من المستوي الذي بكل نقطة M_1 من المستوي لاحقتها z_1 يرفق النقطة M'_1 من المستوي لاحقتها z'_1 حيث أن : $z'_1 = 4i\overline{z_1} + 2 - i$.(العدد $\overline{z_1}$ هو مرافق العدد z_1) . 1) عين مجموعة النقط الصامدة بالتحويل T . 2) نضع $M(x,y)$ و $M'(x',y')$. عين x' و y' بدلالة x و y ثم x' و y' بدلالة x و y 3) عين طبيعة التحويل $T \circ T$ و عناصره الهندسية. 4) عين صورة المستقيم (D) الذي معادلته $x + 2y - 1 = 0$ 5) أثبت أن T مركب من التناظر العمودي بالنسبة إلى حامل محور الفواصل يتبعه تشابه مباشر يطلب تعيين عناصره المميزة . 6) أثبت أن T مركب من التحاكي h الذي مركزه A النقطة الصامدة بالتحويل T و نسبته 3 -يتبعه- التناظر العمودي بالنسبة إلى المستقيم (V) الذي يشمل A و معامل توجيهه1 . 7) عين مجموعة النقط الصامدة بالتحويل T' . 8) نضع $M_1(x_1,y_1)$ و $M'_1(x'_1,y'_1)$. عين x'_1 و y'_1 بدلالة x_1 و y_1 ثم x'_1 و y'_1 بدلالة x_1 و y_1 9) عين التحويل $T \circ T'$. 10) عين التحويل $T' \circ T$.	04 د 06 د 06 د 04 د 05 د 10 د 04 د 04 د 05 د 04 د
الوسائل التعليمية		
المراجع	الكتاب المدرسي	

القسم :3 ت ر　　　المحـــور: (الاعداد المركبة (تابع))

الحصة : هندسة　　　الموضوع : التشابه المباشر(تابع).　　　المدة المقترحة : 1 ســـــاعة

الكفاءات المستهدفة	المكتسبات القبلية
* المثلثات المتشابهة	1 .

مراحل سير الحصة	**اعمـــــال موجهـــة** ◈ المثلثات المتشابهة المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس (O ; OI , OJ) . ليكن التحويل النقطي S من المستوي الذي بكل نقطة M من المستوي لاحقتها z يرفق النقطة M' من المستوي لاحقتها z' حيث أن : $z' = (1-i)z + 2 + 6i$. لتكن النقط A ، B و C التي لواحقها $z_A = -1-i$ ، $z_B = -1+2i$ ، $z_C = 3+i$ على الترتيب . 1) عين طبيعة التحويل S و عناصره المميزة . 2) عين لواحق النقط A' ، B' و C' صور A ، B و C بالتحويل S على الترتيب . 3) أثبت أن النقط A ، B و C ليست على استقامية . 4) أحسب أطوال أضلاع المثلث ABC . 5) أثبت أن المثلثين ABC و $A'B'C'$ متشابهان . تطبيق : ص　رقم	08 د 08 د 07 د 08 د 06 د 18 د
الوسائل التعليمية		
المراجع	الكتاب المدرسي	

القسم : 3 ت ر   **المحـــــور:** الاعداد المركبة (تابع)

الحصة : هندسة   **الموضوع :** التشابه المباشر(تابع).   **المدة المقترحة :** 1 ســــــاعة

المكتسبات القبلية	الكفاءات المستهدفة
1 . التشابه المباشر وخواصه	* نتائج التشابه المباشر

مراحل سير الحصة

اعمــــــال موجهــــة

نتائج التشابه المباشر: المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس (O ; OI , OJ)

ليكن التحويل النقطي S من المستوي الذي إلى كل نقطة M من المستوي لاحقتها z يرفق النقطة M' من المستوي لاحقتها z' حيث أن : $z' = \left(-1+\sqrt{3}\,i\right)z+\sqrt{3}+2i$. لتكن النقط A ، B ، C و D التي لواحقها $z_A=-1$ ، $z_B=1+2i$ ، $z_C=i$ و $z_D=3-i$ على الترتيب .

1) عين طبيعة التحويل S و عناصره المميزة .
2) أثبت أن النقط A ، B و C على استقامية .
3) عين إحداثيات النقط A' ، B' ، C' و D' صور النقط A ، B ، C و D بالتحويل S .
4) تحقق أن النقط A' ، B' و C' على استقامية .
5) عين لاحقة النقطة P مركز ثقل المثلث ABD ثم عين لاحقة P' صورتها بالتحويل S .
6) عين لاحقة النقطة P_1 مركز ثقل المثلث $A'B'D'$.
7) ليكن (D) المستقيم الذي معادلته $x-y-1=0$ و ليكن (V) المستقيم الذي معادلته $-2x+2y+3=0$. تأكد أن المستقيمين (D) و (V) متوازيان.

عين معادلتي (D') و (V') صورتي (D) و (V) بالتحويل S ثم تأكّد أن المستقيمين (D') و (V') متوازيان.

8) ليكن (D_1) المستقيم الذي معادلته $2x+2y-3=0$. تأكدأن المستقيمين (D) و (D_1) متعامدان.

عين معادلة (D'_1) صورة (D_1) بالتحويل S ثم تأكد أن المستقيمين (D') و (D'_1) متعامدان.

نسمي Q نقطة تقاطع (D) و (D_1) و Q' نقطة تقاطع (D') و (D'_1) ، بين أن Q' هي صورة Q بالتحويل S

9) أثبت أن صورة القطعة المستقيمة $[AB]$ هي القطعة المستقيمة $[A'B']$ يمكن ملاحظة أن كل نقطة من القطعة المستقيمة $[AB]$ تمثل مرجحا للنقطتين A و B مرفقتين بالمعاملين a و $1-a$ و $a \in [0;1]$.

10) $\mathscr{C}$ الدائرة ذات المركز A ونصف القطر $2\sqrt{2}$.

أ ـ أكتب معادلة للدائرة $\mathscr{C}$.   ب ـ ما هي طبيعة المجموعة $\mathscr{C}'$ صورة الدائرة $\mathscr{C}$ بالتحويل S ؟

جـ ـ تحقق أن النقطتين B و B' تنتميان إلى $\mathscr{C}$ و $\mathscr{C}'$ على الترتيب .

د ـ أكتب معادلة للمجموعة $\mathscr{C}'$.   هـ ـ قارن مساحتي $\mathscr{C}'$ و $\mathscr{C}$.

11) أ ـ أحسب الجدائين السلّميين $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{A'B'}.\overrightarrow{A'D'}$.

ب ـ أحسب الأطوال AB ، AD ، $A'B'$ و $A'D'$ ؛ ثمّ أحسب $\cos\widehat{BAD}$ و $\cos\widehat{B'A'D'}$

04 د
03 د
06 د
03 د
06 د
04 د
02 د
07 د
02 د
03 د
04 د
03 د
05 د
03 د
05 د
04 د
04 د

الوسائل التعليمية	
المراجع	الكتاب المدرسي

القسم : 3ت ر   المحـــور: المتتاليات العددية

الحصة : هندسة   الموضوع : تذكير حول المتتاليات العددية   المدة المقترحة : 1 ســـــاعة

المكتسبات القبلية	الكفاءات المستهدفة
1 .	* اتّجاه تغيّر متتالية عددية + المتتاليات الحسابية و الهندسية

مراحل سير الحصة		
	حل النشاط الثاني ص 06 **تعريف:** متتالية عددية حقيقية u هي دالة ترفق بكل عدد طبيعي n ،أكبر من أو يساوي عدد طبيعي n_0 معطى، العدد $u(n)$. **2.اتّجاه تغيّر متتالية عددية.** **متتالية متزايدة:** تكون متتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ متزايدة (متزايدة تماما على الترتيب) إذا وفقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0 ، $u_{n+1}\geq u_n$ ($u_{n+1}>u_n$ على الترتيب) . **متتالية متناقصة:** تكون متتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ متناقصة (متناقصة تماما على الترتيب) إذا وفقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0 ، $u_{n+1}\leq u_n$ ($u_{n+1}<u_n$ على الترتيب) . **متتالية ثابتة:** تكون متتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ ثابتة إذا وفقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n_0 n^3 ، $u_{n+1}=u_n$. **متتالية رتيبة:** إذا كانت متتالية متناقصة (متناقصة تماما على الترتيب) أو متزايدة (متزايدة تماما على الترتيب) نقول أن المتتالية رتيبة(رتيبة تماما على الترتيب) . **3.المتتاليات الحسابية. تعريف:** نقول أن المتتالية (u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_0 و أساسها r (r عدد حقيقي) إذا و فقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=u_n+r$. **الحد العام و مجموع حدود متتابعة من متتالية حسابية :** من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $u_n=u_0+nr$ و $S=u_0+u_1+........+u_{n-1}+u_n=(n+1)\left(\frac{u_0+u_n}{2}\right)$ **4.المتتاليات الهندسية. تعريف:** نقول أن المتتالية (u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_0 و أساسها q (q عدد حقيقي غير معدوم) إذا و فقط إذا كان: من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=u_n\times q$. **الحد العام و مجموع حدود متتابعة من متتالية هندسية :** من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $u_n=u_0\times q^n$ و $S=u_0+u_1+...+u_n=u_0\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)$ مع $q\neq 1$ و إذا كان $q=1$ فإن $S=(n+1)u_0$ **نهاية متتالية هندسية.** • إذا كان $q>1$ و $u_0>0$ فإن $\lim_{n\to+\infty}u_n=+\infty$. المتتالية (u_n) متباعدة • إذا كان $q>1$ و $u_0<0$ فإن $\lim_{n\to+\infty}u_n=-\infty$. المتتالية (u_n) متباعدة • إذا كان $-1<q<1$ فإن $\lim_{n\to+\infty}u_n=0$. المتتالية (u_n) متقاربة . • إذا كان $q\leq -1$ فإن المتتالية (u_n) متباعدة (النهاية غير موجودة). **تطبيق : 1/ ص 24 رقم 04 2/ ص 27 رقم 52**	20 د 15 د 25 د
الوسائل التعليمية		
المراجع	الكتاب المدرسي	

القسم : 3ت ر   المحـــور: المتتاليات العددية (تابع)

الحصة : هندسة   الموضوع : الاستدلال بالتراجع   المدة المقترحة : 1 ســـــاعة

المكتسبات القبلية	الكفاءات المستهدفة
1 .	* مبدأ الاستدلال بالتراجع

مراحل سير الحصة	**حل النشاط الاول ص 06** **الـــــــــدرس** **1.مبدأ الاستدلال بالتراجع.** **مسلمة:** $P(n)$ خاصية متعلقة بعدد طبيعي n . n_0 عدد طبيعي . للبرهان على صحة الخاصية $P(n)$ من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0 ، يكفي : 1/ نتأكد من صحة الخاصية من أجل n_0 أي $P(n_0)$. 2/ نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل عدد طبيعي كيفي n أكبر من أو يساوي n_0 أي $P(n_0)$ (فرضية التراجع) و نبرهن صحة الخاصية من أجل $n+1$ أي $P(n+1)$. **ملاحظات:** · عند الانتهاء من المرحلتين نقر أن الخاصية صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0 . · نترجم الشرط الثاني بالقول أن الخاصية وراثية أي أنها تنتقل من عدد طبيعي n إلى العددالذي يتبعه $n+1$ · التأكد من صحة الخاصية من أجل n_0 ضروري لأنه يمكن أن تكون خاصية وراثية دون أن تكون صحيحة **مثلا :** الخاصية " 3^n يقبل القسمة على 5 " خاصية خاطئة بالرغم من أنها وراثية . $P(n_0)$ صحيحة — إذا كانت $P(n)$ صحيحة — فإن $P(n+1)$ صحيحة المرحلة 1 — المرحلة 2 — الخلاصة الخلاصة: من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0 $P(n)$ صحيحة **2.متى يستعمل الاستدلال بالتراجع.** يمكن التفكير في استعمال الاستدلال بالتراجع للبرهان على صحة خاصية متعلقة بالأعداد الطبيعية. **مثال:** أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، 4^n+2 مضاعف للعدد 3 . **الاثبات:** الخاصية " 4^n+2 مضاعف للعدد 3 " متعلقة بالعدد الطبيعي n . نستعمل الاستدلال بالتراجع **تطبيق :** ص 24 رقم 15 ص 25رقم 20 و 21	15 د 15 د 10 د 20 د
الوسائل التعليمية	الحاسوب و العاكس	
المراجع	الكتاب المدرسي	

القسم : 3ت ر　　　المحـــور: المتتاليات العددية (تابع)

الحصة : هندسة　　　الموضوع : تقارب متتالية عددية　　　المدة المقترحة : 1 ســـــاعة

المكتسبات القبلية	الكفاءات المستهدفة
1 .	* نهاية متتالية عددية

<table>
<tr>
<td>مراحل سير الحصة</td>
<td>

حل النشاط الثالث ص 07

الـــــــــدرس

نهاية متتالية عددية.

تذكير و تعريف: (u_n) متتالية عددية و l عدد حقيقي.

نقول أن المتتالية (u_n) تقبل l كنهاية إذا وفقط إذا كان كل مجال مفتوح يشمل l يشمل أيضا كل حدود المتتالية (u_n) ابتداءً من رتبة معينة . و نكتب: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ أو $\lim u_n = l$ (حيث أن النهاية لا تحسب إلا عند $+\infty$) في هذه الحالة نقول أن المتتالية (u_n) متقاربة.

تذكير: لتكن المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي $u_n = f(n)$ حيث f دالة معرفة على مجال من الشكل $[\alpha,+\infty[$ حيث α عدد حقيقي ، إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.

مثال: لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n = \dfrac{-4n+1}{3n+2}$.

- تعين نهاية المتتالية (u_n). **الحل:** المتتالية (u_n) من الشكل $u_n = f(n)$ حيث f دالة معرفة على $[0,+\infty[$ كما يلي $f(x) = \dfrac{-4x+1}{3x+2}$ لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\dfrac{4}{3}$ إذا $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\dfrac{4}{3}$ إذن. المتتالية (u_n) متقاربة . **ملاحظة:** العكس غير صحيح :

مثال: لتكن الدالة f للمتغير الحقيقي x المعرفة على $[0;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{x\cos(2px)}{x+1}$ ، الدالة المرفقة بالمتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n = \dfrac{n}{n+1}$.

نلاحظ فعلا بأن $u_n = f(n) = \dfrac{n}{n+1}$ حيث أن من أجل كل عدد طبيعي n : $\cos(2pn)= 1$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$ (نطبق النظريات على النهايات) و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ غير موجودة .

تعاريف: (u_n) متتالية عددية .

- القول أنّ نهاية المتتالية (u_n) هي $+\infty$ يعني أنّ كل مفتوح $]\alpha,+\infty[$ حيث $\alpha\in R$ يشمل كل حدود المتتالية (u_n) ابتداء من رتبة معينة . و نرمز: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
- القول أنّ نهاية المتتالية (u_n) هي $-\infty$ يعني أنّ كل مجال مفتوح $(\alpha\in\mathbb{R})$ $]-\infty,\alpha[$ يشمل كل حدود المتتالية (u_n) ابتداء من رتبة معينة . و نرمز: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

اقلــــــب الصفحة

</td>
<td>15 د

15 د</td>
</tr>
<tr>
<td>الوسائل التعليمية</td>
<td>الحاسوب و العاكس</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>المراجع</td>
<td>الكتاب المدرسي</td>
<td></td>
</tr>
</table>

تذكير: لتكن المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي $u_n = f(n)$ حيث f دالة معرفة على مجال من الشكل $[\alpha, +\infty[$ و α عدد حقيقي . • إذا كانت $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ فإن $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. • إذا كانت $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ فإن $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$. **تطبيق :** **ص 25 رقم29 و 30 الفرعين 01 و 02** **ص 33 رقم109**	**10 د** **20 د**

القسم : 3ت ر　　　المحـــور: المتتاليات العددية (تابع)

الحصة : هندسة　　　الموضوع : المتتالية المحدودة　　　المدة المقترحة : 1 ســـــاعة

الكفاءات المستهدفة	المكتسبات القبلية
* متتالية محدودة من الأعلى، محدودة من الأسفل	1 . خواص المتباينات

مراحل سير الحصة	**نشاط مقترح :**	15 د
	الـــــــــدرس **متتالية محدودة من الأعلى، محدودة من الأسفل ، متتالية محدودة.** **تعريف:** (u_n) متتالية عددية معرفة على N . * القول أن المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى يعني وجود عدد حقيقي A حيث من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \leq A$. نقول أن A عنصر حاد من الأعلى . * القول أن المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل يعني وجود عدد حقيقي B حيث من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \geq B$. نقول أن B عنصر حاد من الأسفل . * القول أن المتتالية (u_n) محدودة يعني أنها محدودة من الأعلى و محدودة من الأسفل . **مثال1:** لتكن المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي : من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $u_n = \frac{4n}{n+3}$ و المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل . لكنها ليست محدودة من الأعلى.وبالتالي ليست محدودة . **مثال2:** لتكن المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي : من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $u_n = \frac{2n+3}{n}$: المتتالية(u_n)محدودة من الأعلى و 5 عنصر حاد من الأعلى . المتتالية(u_n) محدودة من الأسفل و 2 عنصر حاد من الأسفل . و منه المتتالية(u_n) متتالية محدودة . **مبرهنة:** (تقبل بدون برهان) . · إذا كانت (u_n) متتالية متزايدة و محدودة من الأعلى فإنها متقاربة . · إذا كانت (u_n) متتالية متناقصة و محدودة من الأسفل فإنها متقاربة . **تطبيق : ص 26 رقم 33 و 34** **ص 25رقم 37**	15 د 20 د 10 د
الوسائل التعليمية		
المراجع	الكتاب المدرسي	

القسم : 3ت ر   **المحـــور:** الحساب التكاملي

الحصة : هندسة   **الموضوع :** حساب المساحات   **المدة المقترحة :** 1 ســـــاعة

المكتسبات القبلية	الكفاءات المستهدفة
1 .	* الدالة الأصلية و مساحة حيز تحت منحنى

25 د

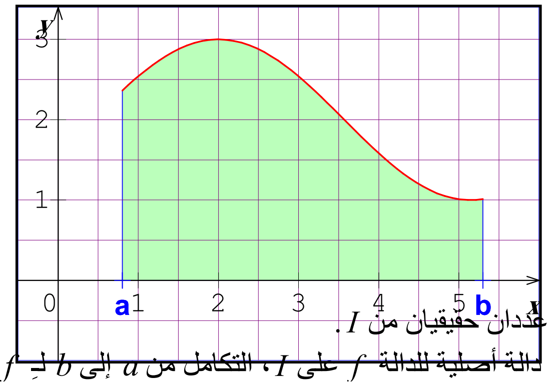
حل النشاط الاول ص

1. الدالة الأصلية و مساحة حيز تحت منحنى

خاصية: f دالة مستمرة و موجبة على مجال I. a و b عددان حقيقيان من I حيث $a \leq b$. (C_f) منحنى f في معلم متعامد $(O;A,B)$ و F دالة أصلية لـِ f على I.

مساحة الحيز تحت المنحنى (C_f) بين العددين a و b هو العدد الحقيقي $F(b)-F(a)$.

10 د



ملاحظات: 1. الحيز تحت المنحنى (C_f) بين العددين a و b هو الحيز المحدد بالمنحنى (C_f)، محور الفواصل و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=a$ و $x=b$.

2. وحدة المساحة هي مساحة المستطيل $OAKB$ حيث K هي النقطة التي إحداثياها $(1;1)$.

2. تعريف التكامل

تعريف: f دالة مستمرة على مجال I. a و b عددان حقيقيان من I.

يسمى العدد الحقيقي $F(b)-F(a)$، حيث F دالة أصلية للدالة f على I، التكامل من a إلى b لـِ f

و نرمز إليه بالرمز $\int_a^b f(x)dx$. نقرأ: "التكامل من a إلى b لـِ $f(x)$ تفاضل x".

ملاحظة: 1. عمليا لحساب العدد $\int_a^b f(x)dx$ نقوم بتعيين دالة أصلية F للدالة f على مجال I يشمل العددين a و b ثم نكتب: $\int_a^b f(x)dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b)-F(a)$

2. يمكن استبدال المتغير x بأحد الحروف t، q، ... فيكون لدينا مثلا $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$

خاصية: f دالة مستمرة وموجبة على مجال I. a و b عددان حقيقيان من I حيث $a \leq b$. (C_f) منحنى f في معلم متعامد و F دالة أصلية لـِ f على I. مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و بالمستقيمات التي معادلاتها $x=a$، $x=b$ و $y=0$ هو العدد الحقيقي $\int_a^b f(x)dx$.

تطبيق : ص 184 رقم 4 و 11

30 د

مراحل سير الحصة

الوسائل التعليمية	
المراجع	الكتاب المدرسي

القسم : 3ت ر　　المحـــور: **(الحساب التكاملي (تابع**

الحصة : هندسة　　الموضوع : **حساب المساحات (تابع)**　　المدة المقترحة : 1 ســـــاعة

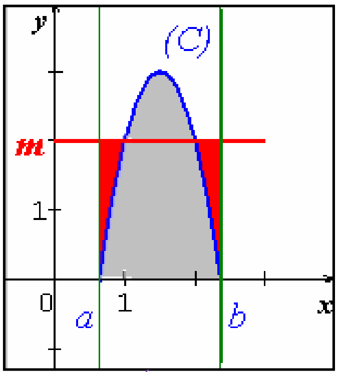
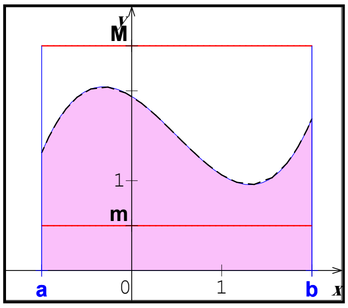
المكتسبات القبلية	الكفاءات المستهدفة
1	* خواص التكامل

مراحل سير الحصة	**حل النشاط :** **الـــــــــــدرس** **خواص التكامل** **خاصية 1 :** f دالة مستمرة على مجال I . من أجل كل أعداد حقيقية a، b، و c من I لدينا: $$\int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx=\int_a^c f(x)dx$$ **نتائج:** من الواضح أن : $\int_a^a f(x)dx=0$ ومنه إذا أخذنا $c=a$ نحصل على : $$\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$$ **خاصية 2 :** f و g دالتان مستمرتان على مجال I و k عدد حقيقي. من أجل كل عددين حقيقيين a و b من I . لدينا: * (1) $\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$ * (2) $\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$ **3. المقارنة** **خواص:** f و g دالتان مستمرتان على مجال $[a,b]$ * **(1)** إذا كان من أجل كل x من $[a,b]$، $f(x)\geq 0$ فإن: $\int_a^b f(x)dx\geq 0$. * **(2)** إذا كان من أجل كل x من $[a,b]$، $f(x)\geq g(x)$ فإن : $\int_a^b f(x)dx\geq\int_a^b g(x)dx$ تطبيق : **ص 186 رقم 30 , 31 , 32 و 33** **ص 187رقم 35**	15 د 10 د 20 د 10 د
الوسائل التعليمية		
المراجع	الكتاب المدرسي	

القسم : 3ت ر المحـــور: الحساب التكاملي (تابع)

الحصة : هندسة الموضوع : حساب المساحات (تابع) المدة المقترحة : 1 ســـــاعة

المكتسبات القبلية	الكفاءات المستهدفة
1 . الدالة الأصلية	* القيمة المتوسطة

مراحل سير الحصة	**حل النشاط** **تعريف:** f دالة مستمرة على مجال $[a,b]$. القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[a,b]$ هي العدد الحقيقي: $m=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ **التفسير البياني في حالة دالة موجبة:** نفرض أن الدالة f موجبة على المجال $[a,b]$. ليكن (C) التمثيل البياني للدالة f في معلم متعامد $(O;I,J)$. $m=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ يعني $m(b-a)=\int_a^b f(x)dx$ نعلم أن $\int_a^b f(x)dx$ هو مساحة الحيز الواقع تحت المنحني (C) بين a و b. $m(b-a)$ هي مساحة المستطيل الذي بعداه b - a و m (القيمة المتوسطة).و هكذا فإن m ، القيمة المتوسطة لـ f على $[a,b]$، هي " ارتفاع " المستطيل الذي قاعدته b - a و الذي له نفس مساحة الحيز الواقع تحت المنحني (C) بين a و b . نلاحظ أن للحيزين الملونين بالأزرق و الأحمر نفس المساحة.  **2. حصر القيمة المتوسطة** **خواص:** f دالة مستمرة على مجال $[a,b]$. إذا وجد عددان حقيقيان m و M بحيث من أجل كل x من $[a,b]$، $m\le f(x)\le M$ فإن: $m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$ **البرهان:** **حالة خاصة:** إذا كانت f دالة مستمرة على مجال I وكان a و b عددان حقيقيان من I و وجد عدد حقيقي M بحيث من أجل كل x من I ، $\lvert f(x)\rvert\le M$ فإن: $\lvert\int_a^b f(x)dx\rvert\le M(b-a)$. التفسير البياني في حالة f موجبة و $m\ge 0$: مساحة الحيز تحت المنحني الممثل لـ f بين a و b محصورة بين مساحتي المستطيلين اللذين ارتفاعهما m و M وعرضهما a - b . كما أن القيمة المتوسطة μ هي الأخرى محصورة بين a و b .  **تطبيق :** ص 187 رقم 36 و 46	15 د 10 د 30 د
الوسائل التعليمية		
المراجع	الكتاب المدرسي	

القسم : 3ت ر　　**المحـــور:** الحساب التكاملي (تابع)

الحصة : هندسة　　**الموضوع :** حساب المساحات (تابع)　　**المدة المقترحة :** 1 ســـــاعة

المكتسبات القبلية	الكفاءات المستهدفة
1	*. تكامل دالة سالبة على مجال *. تكامل دالة تغير إشارتها على مجال

15 د

حل النشاط :

الــــــــــــدرس

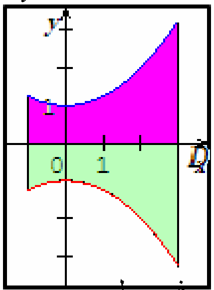
التمديد إلى دالة إشارتها كيفية

1. تكامل دالة سالبة على مجال

لتكن f دالة مستمرة و سالبة على مجال $[a,b]$. و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد $(O;I,J)$ نرمز بـ A إلى مساحة الحيز D المحدد بالمنحني (C_f) و بالمستقيمات التي معادلاتها $x=a$ ، $x=b$ و $y=0$

10 د

و بـ A' إلى مساحة D' الحيز المحدد بالمنحني (C_{-f}) و بالمستقيمات التي معادلاتها $x=a$ ، $x=b$ و $y=0$.

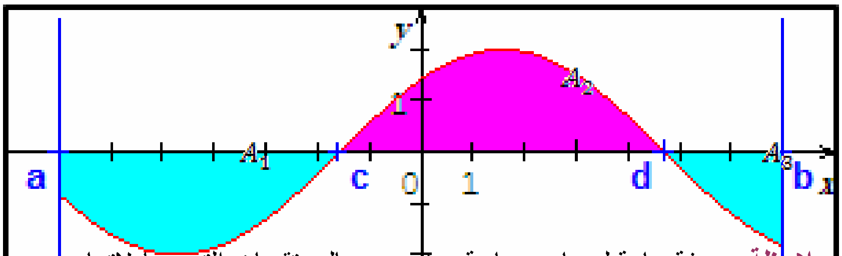


بما أن f سالبة على $[a,b]$ فإن $-f$ موجبة على $[a,b]$ و بالتالي $A'=\int_a^b f(x)dx$. الحيزان D و D' متناظران بالنسبة إلى محور الفواصل

فمساحتاهما متساويتان أي $A'=A$. و بالتالي فإن: $A=-\int_a^b f(x)dx$

2. تكامل دالة تغير إشارتها على مجال

لتكن مثلا f دالة مستمرة و تغير إشارتها على مجال $[a,b]$ و ليكن (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد $(O;I,J)$. نرمز بـ A إلى مساحة الحيز D المحدد بالمنحني (C) و بالمستقيمات التي معادلاتها $x=a$ ، $x=b$ و $y=0$. فإن : $A=-\int_a^c f(x)dx+\int_c^d f(x)dx-\int_d^b f(x)dx$



ملاحظة: بصفة عامة لحساب مساحة حيز محدد بالمستقيمات التي معادلاتها $x=a$ ، $x=b$ و $y=0$ و بمنحنى ممثل لدالة f تغير إشارتها على $[a,b]$ نقوم أولا بتحديد المجالات التي تحتفظ فيها الدالة بإشارة ثابتة (سالبة أو موجبة) ثم نطبق النتيجة المناسبة على كل مجال من هذه المجالات.

تطبيق : ص 187 رقم 55 و 59

30 د

مراحل سير الحصة

الوسائل التعليمية	
المراجع	الكتاب المدرسي

القسم : 3ت ر   **المحـــور:** الحساب التكاملي (تابع)

الحصة : هندسة   **الموضوع :** حساب المساحات (تابع)   **المدة المقترحة :** 1 ســـــاعة

الكفاءات المستهدفة	المكتسبات القبلية
* المكاملة بالتجزئة	1 . . . .

15 د 10 د 30 د	**حل النشاط :** باعتبار $u' = 1$ و $v = \ln x$ اوجد u و v' ثم باستعمال $(u\times v)'$ احسب I حيث $I = \int_1^4 \ln x dx$. ثم بين ان الدالة الاصلية الوحيدة لـ lnx على $]0,+\infty[$ والتي تنعدم من اجل 2 هي الدالة : $F : x \mapsto \int_2^x \ln t dt$ **الــــــــــدرس** **توظيف الحساب التكاملي لحساب دوال أصلية** **1. المكاملة بالتجزئة** **مبرهنة:** لتكن u و v دالتين قابلتين للاشتقاق على مجال I بحيث أن الدالتين المشتقتين u' و v' مستمرتان على I. من أجل كل عددين حقيقيين a و b من I لدينا: $$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$ **2. الدالة الأصلية لدالة و التي تنعدم من أجل قيمة** **مبرهنة:** f دالة مستمرة على مجال I و a عدد حقيقي من I. الدالة الأصلية الوحيدة للدالة f على I و التي تنعدم من أجل a هي الدالة $F : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ **البرهان:** نضع $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ و منه إذا كانت G دالة أصلية للدالة f على المجال I يكون لدينا:من أجل كل x من I، $F(x) = G(x) - G(a)$ و بالتالي: من أجل كل x من I، $F'(x) = G'(x) = f(x)$ نستنتج أن الدالة F دالة أصلية للدالة f على المجال I. بالإضافة إلى ذلك لدينا: $F(a) = G(a) - G(a) = 0$. إذن الدالة F هي الدالة الأصلية الوحيدة للدالة f على I و التي تنعدم من أجل a. **ملاحظة:** من الواضح أنه إذا كانت $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ فإن $F'(x) = f(x)$. **مثال:** نعلم أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$، $(\ln)'(x) = \frac{1}{x}$ كما نعلم أن $\ln(1) = 0$ و بالتالي لدينا: من أجل كل x من $]0;+\infty[$، $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}dt$. **تطبيق :** ص 189 رقم61 ص 189رقم 62 و 65	مراحل سير الحصة
		الوسائل التعليمية
	الكتاب المدرسي	المراجع

القسم : 3ت ر **المحـــور:** الحساب التكاملي (تابع)

الحصة : هندسة **الموضوع :** بعض تطبيقات الحساب التكاملي **المدة المقترحة :** 1 ســـــاعة

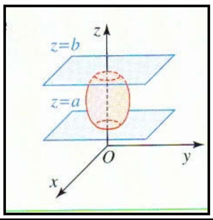
الكفاءات المستهدفة	المكتسبات القبلية
* حساب حجوم بعض المجسمات البسيطة	1 . ...

مراحل سير الحصة

15 د

1. حساب حجوم بعض المجسمات البسيطة الفضاء م.م.م $(O;I,J,K)$ محاوره $(x'x)$، $(y'y)$ و $(z'z)$. وحدة الحجوم $(u.v)$ هي حجم متوازي المستطيلات المنشأ على $(O;I,J,K)$.

نعتبر في الفضاء مجسما محددا بمستويين موازيين للمستوي (xOy) معادلتاهما: $z=a$ و $z=b$ $(a<b)$



خاصية1: لتكن $S(z)$ مساحة مقطع المجسم بمستو مواز للمستوي (xOy) راقمه z حيث $a<z<b$.

10 د

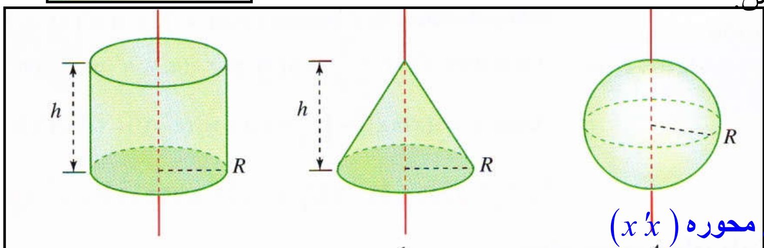
نقبل أن حجم المجسم بوحدة الحجوم هو العددالحقيقي V حيث: $V=\int_a^b S(z)dz$

أمثلة: لدينا في الشكل المقابل كل من:

*حجم الكرة.

*حجم المخروط الدوراني.

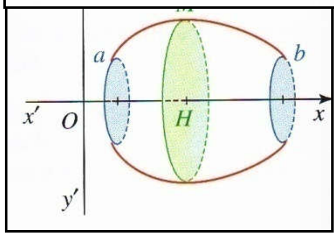
*حجم الاسطوانة الدورانية.



$V=\pi R^2h$ $V=\frac{1}{3}\pi R^2h$ $V=\frac{4}{3}\pi R^3$

حالة خاصة: حجم مجسم دوراني محوره $(x'x)$

ليكن (C) المنحني الممثل لدالة f موجبة على مجال $[a;b]$. دوران المنحني (C) حول المحور $(x'x)$ يولد مساحة دورانية محورها $(x'x)$ التي بدورها تحدد مجسما دورانيا محوره $(x'x)$. لتكن $M(x;f(x))$ نقطة من المنحني (C).مقطع المجسم الناتج عن دوران المنحني (C) حول المحور $(x'x)$ بمستو مار من M و عمودي على $(x'x)$ هو قرص مساحته $\pi\times HM^2$ أي $\pi\times[f(x)]^2$.



خاصية2: حجم مجسم مولد بالدوران حول المحور $(x'x)$ لمنحن (C) ممثل لدالة f مستمرة و موجبةعلى مجال $[a;b]$ هو العدد الحقيقي V حيث: $V=\int_a^b \pi[f(x)]^2dx$

2. المسافة المقطوعة على مستقيم

نرمز بـ $x(t)$ إلى المسافة المقطوعة من قبل نقطة متحركة عند اللحظة t. تعرف السرعة اللحظية $v(t)$ لهذه النقطة المتحركة عند اللحظة t بالعلاقة: $v(t)=\frac{dx}{dt}=x'(t)$ أي $dx=v(t)dt$.

30 د

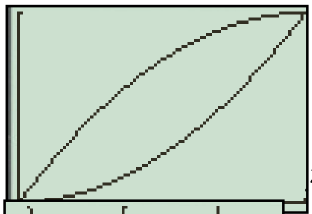
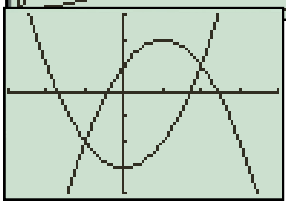
خاصية: المسافة المقطوعة من قبل نقطة متحركة بين اللحظتين t_1 و t_2 $(t_1<t_2)$ سرعتها اللحظية $v(t)$ هي: $x=\int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$

الوسائل التعليمية		
المراجع	الكتاب المدرسي	

القسم : 3ت ر المحـــور: الحساب التكاملي (تابع)

الحصة : اعمال موجهة الموضوع : حساب المساحات (تابع) المدة المقترحة : 1 ســـــاعة

المكتسبات القبلية	الكفاءات المستهدفة
1	* مساحة حيز بين منحنيين

مراحل سير الحصة		
	مساحة حيز بين منحنيين : نعتبر دالتين f و g مستمرتين على مجال $[a;b]$ و ليكن (C_f) و (C_g) تمثيليهما البيانيين في معلم متعامد $(O;I,J)$. **1. المثال الأول:** نعتبر الدالتين f و g المعرفتين على المجال $[0;1]$ كما يلي: $f(x)=-x^2+2x$ و $g(x)=x^2$ * مثل على شاشة حاسبة بيانية المنحنيين (C_f) و (C_g). * برهن أنه من أجل كل x من $[0;1]$، $f(x)\geq g(x)$ * برر النتيجة: $A=\int_0^1[f(x)-g(x)]dx$ ثم أحسب A بوحدة المساحة   **2. المثال الثاني:** نعتبر الدالتين f و g المعرفتين على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=x^2-3$ و $g(x)=-x^2+2x+1$ • مثل على شاشة حاسبة بيانية المنحنيين (C_f) و (C_g). • أدرس الأوضاع النسبية للمنحنيين (C_f) و (C_g) مع تعيين a، b فاصلتي نقطتي تقاطعهما. • نسمي (C'_f) و (C'_g) محولتي المنحنيين (C_f) و (C_g) على الترتيب بالانسحاب الذي شعاعه $3\vec{j}$. و ليكن (D') الحيز المحدد بالمنحنيين (C'_f)، (C'_g) و بالمستقيمين اللذين معادلتاهما على الترتيب $x=a$ و $x=b$. * برر لماذا للحيزين (D) و (D') نفس المساحة. • برهن أن $A=\int_{-1}^{2}[f(x)-g(x)]dx$ ثم أحسب A بوحدة المساحة. **نتيجة:** إذا كانت f و g دالتين مستمرتين على مجال $[a;b]$ بحيث من أجل كل x من $[a;b]$، $f(x)\geq g(x)$ فإن مساحة الحيز (D) المحدد بالمنحنيين (C_f)، (C_g) و بالمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=a$ و $x=b$ هي: $A=\int_a^b[f(x)-g(x)]dx$ **3. تطبيق:** نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ $f(x)=x-\frac{\ln x}{x}$ ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;I,J)$ حيث وحدة الطول هي $2cm$. 1. أدرس تغيرات الدالة f محددا نهايتيها عند 0 و عند $+\infty$. 2. بين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يطلب تعيين معادلة له. 3. أدرس الأوضاع النسبية للمنحنيين (C_f) و (Δ). 4. أحسب بـ cm^2 مساحة الحيز المحدد بـ (C_f)، (Δ) و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=\frac{1}{e}$ و $x=e$.	10 د 15 د 30 د
الوسائل التعليمية		
المراجع	الكتاب المدرسي	

القسم : 3ت ر **المحـــور:** الحساب التكاملي (تابع)

الحصة : اعمال موجهة **الموضوع :** حساب المساحات (تابع) **المدة المقترحة :** 1 ســــاعة

المكتسبات القبلية	الكفاءات المستهدفة
1	* دالة معرفة بتكامل

مراحل سير الحصة		
	دالة معرفة بتكامل **الجزء الأول :** نعتبر الدالة g المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ $g(x)=\frac{2x^2}{x^2+1}-\ln(x^2+1)$ **1.** عين نهاية الدالة g عند $+\infty$. **2.** أدرس اتجاه تغير الدالة g. **3.** بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[1;+\infty[$. تحقق أن $\frac{7}{4}<\alpha<2$. **4.** باستعمال حاسبة بيانية عين حصرا للعدد α سعته 10^{-3}. **5.** حدد، حسب قيم x، إشارة $g(x)$ على المجال $[0;+\infty[$.	10 د
	الجزء الثاني : نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(0)=0$ و من أجل كل $x\neq 0$، $f(x)=\frac{\ln(x^2+1)}{x}$ و ليكن (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ حيث أن الوحدة هي $2cm$. **1.** بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند 0. **2.** تحقق أن الدالة f فردية ثم أدرس نهايتها عند $+\infty$. **3.** أدرس اتجاه تغير الدالة f. **4.** عين معادلة لـِ (Δ) مماس المنحني (C) عند النقطة ذات الفاصلة 0. **5.** بين أنه من أجل كل x من $]-1;+\infty[$ ، $\ln(x+1)\leq x$. **6.** استنتج وضعية (C) بالنسبة إلى (Δ). أرسم (C).	20 د
	الجزء الثالث : نرمز بِـ F للدالة المعرفة على $\mathbb{R}^{*+}$ بـ $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ **1.** بين أن الدالة F زوجية. **2.** أدرس اتجاه تغير الدالة F. **3.** بين أن $0\leq F(1)\leq\frac{1}{2}$. **4.** بين أنه من أجل كل t من $[1;+\infty[$، $\frac{\ln(t^2)}{t}\leq\frac{\ln(t^2+1)}{t}\leq\frac{\ln(2t^2)}{t}$. **5.** من أجل كل x من $[1;+\infty[$، أحسب $\int_1^x\frac{\ln(t)}{t}dt$. **6.** استنتج نهاية كل من $F(x)$ و $\frac{F(x)}{x}$ عند $+\infty$. **7.** بأخذ $F(1)\approx 0,4$ أرسم المنحني (C).	30 د
الوسائل التعليمية		
المراجع	الكتاب المدرسي	

القسم : 3ت ر　　**المحـــور:** الاحتمالات الشرطية

الحصة : حساب　　**الموضوع :** العـد (القوائم ، الترتيبات ، التبديلات)　　**المدة المقترحة :** 1 ســـــاعة

المكتسبات القبلية	الكفاءات المستهدفة
1	* العـد (القوائم ، الترتيبات ، التبديلات)

مراحل سير الحصة		
مراحل سير الحصة	**حل النشاط الرابع ص 201** **العـد (القوائم ، الترتيبات ، التبديلات)** **1. قوائم عناصر مجموعة منتهية :** **تعريف:** E مجموعة منتهية ذات n عنصرا $(n\geq 1)$ و p عدد طبيعي $(p\geq 1)$ نسمي **قائمة** ذات p عنصرا من E كل متتالية **مرتبة** من p عنصرا من عناصر E إذا أردنا أن تكون هذه العناصر المرتبة متمايزة مثنى مثنى عندئذ لا يمكن للقائمة أن تحتوي أكثر من n عنصرا و هذا ما يقتضي أن يكون $n\geq P\geq 1$ ≺ من أجل كل عدد طبيعي p $(p\geq 1)$ عدد قوائم E ذات p عنصرا يساوي n^p بينما يكون عدد قوائم E ذات p عنصرا المتمايزة العناصر مثنى مثنى هو $n(n-1)(n-2)\times....\times(n-p+1)$ ، هذا الجداء يحوي p عاملا . **2. التفسير** **في الحالة الأولى** (عدم اشتراط تمايز العناصر) يكون لكل عنصر من عناصر القائمة n إمكانية و منه فإن عدد القوائم هو $n\times n\times n\times...\times n$ ، (p مرة) أي n^p **في الحالة الثانية** (قوائم عناصرها متمايزة مثنى مثنى) يكون للعنصر الأول n امكانية ثم $(n-1)$ امكانية للعنصر الثاني و $(n-2)$ للعنصر الثالث ... و أخيرا $n-p+1=n-(p-1)$ امكانية للعنصر الأخير الذي رتبته p باستعمال مبدأ الضرب يكون عدد هذه القوائم $n(n-1)(n-2)\times....\times(n-p+1)$ **ملاحظة:** نسمي القائمة التي عناصرها متمايزة مثنى مثنى **ترتيبة** و يرمز لعدد الترتيبات ذات p عنصرا من بين n عنصرا بالرمز A_n^p و نكتب $A_n^p=n(n-1)(n-2)\times....\times(n-p+1)$ **مثال:** **3. تعريف:** ترتيبة ذات n عنصرا من مجموعة ذات n عنصرا تسمى **تبديلة** ذات n عنصرا عددالتبديلات إذن هو $n(n-1)(n-2)\times....\times 2\times 1$ و يرمز له بالرمز $n\,!$ و يقرأ مفكوك n أو(n عاملي) **ملاحظة :** يمكن كتابة عدد الترتيبات ذات p عنصرا من مجموعة ذات n عنصرا بالشكل $\dfrac{n\,!}{(n-p)!}$ **تطبيق :** ص 217 رقم 03	10 د 20 د 30 د
الوسائل التعليمية		
المراجع	الكتاب المدرسي	

القسم : 3ت ر   **المحـــور:** الاحتمالات الشرطية (تابع)

الحصة : حساب   **الموضوع :** التوفيقات – دستور ثنائي الحد   **المدة المقترحة :** 1 ســــاعة

المكتسبات القبلية	الكفاءات المستهدفة
1	* التوفيقات – دستور ثنائي الحد

15 د

حل النشاط الخامس ص 201

1. تعريف : E مجموعة منتهية ذات n عنصرا $(n \geq 1)$ و p عدد طبيعي حيث $(n \geq P \geq 0)$

نسمي **توفيقة** ذات p عنصرا من عناصر E كل **جزء** من E ذي p عنصرا من عناصر E

نرمز لعدد التوفيقات ذات p عنصرا من مجموعة ذات n عنصرا بالرمز C_n^p أو الرمز $\binom{p}{n}$

➢ نلاحظ أن $C_n^1 = n$ أي أن عدد الأجزاء التي تحوي عنصرا واحدا من مجموعة ذات n عنصرا هو n

بينما $C_n^n = 1$ إذ لا يوجد إلا جزء واحد يحوي كل العناصر و هو المجموعة نفسها و كذلك $C_n^0 = 1$

لأن الجزء الوحيد الذي لا يحوي أي عنصر هو الجزء الخالي

20 د

2. مبرهنة : من أجل كل عددين طبيعيين n و p حيث $(n \geq P \geq 0)$

$$C_n^p = \frac{n(n-1)\times\ldots\times(n-p-1)}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

تفسير : من كل توفيقة ذات p عنصرا يمكن تشكيل $P!$ ترتيبة ذات p عنصرا . لكن عدد الترتيبات ذات p عنصرا من مجموعة ذات n عنصرا هو $\frac{n!}{(n-p)!}$ و بالتالي $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

مثال : نريد تشكيل لجنة ذات 6 تلاميذ من بين 49 تلميذا ، ما عدد اللجان الممكن تشكيلها ؟

3.خواص : 1) من أجل كل عددين طبيعيين n و p حيث $(n \geq P \geq 0)$ لدينا $C_n^p = C_n^{n-p}$

2) من أجل كل عددين طبيعيين n و p حيث $(n-1 \geq P \geq 1)$ لدينا $C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$

تفسير : 1) عدد الأجزاء التي تحوي p عنصرا هو عدد متمماتها التي تحوي (n-p) عنصرا .

2)عدد الأجزاء ذات p عنصر التي تحوي العنصر a هو C_{n-1}^{p-1}

و عدد الأجزاء ذات p عنصرا و التي

لا تحوي العنصر a هو C_{n-1}^p و بالتالي فعدد الأجزاء

ذات p عنصر هو $C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$ و هو C_n^p .

ملاحظة : تمكننا الخاصية الثانية من حساب C_n^p

إذا علمنا C_{n-1}^{p-1} و C_{n-1}^p كما هو مبين في الشكل

p \ n	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

$C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1} = C_n^p$

4. دستور ثنائي الحد : A و b عددان طبيعيان ، n عدد طبيعي $(n \geq 1)$ لدينا $(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}b + \ldots + C_n^{n-1} a\, b^{n-1} + b^n$

تطبيق : ص 218 رقم 15

30 د

مراحل سير الحصة

الوسائل التعليمية

المراجع الكتاب المدرسي

القسم : 3ت ر المحـــور: (الاحتمالات الشرطية (تابع))

الحصة : حساب الموضوع : نمذجة تجربة عشوائية المدة المقترحة : 1 ســـاعة

الكفاءات المستهدفة	المكتسبات القبلية
* العـد (القوائم ، الترتيبات ، التبديلات)	1 . ...

20 د

حل النشاط الثاني ص 200

عندما يكون عدد مخارج تجربة عشوائية منتهيا ، نعرّف على مجموعة المخارج $E=\{x_1,x_2,....,x_r\}$

، قانون احتمال و ذلك باعطاء متتالية أعداد $(p_1,p_2,....,p_r)$ تحقق $\sum_{i=1}^{r}p_i=1$ و $p_i\geq 0$ من أجل كل i

$(r\geq i\geq 1)$

مثال : يحتوي صندوق 6 كريات (ثلاثة منها تحمل الرقم 1 و كريتان تحملان الرقم 2 و كرية تحمل الرقم 3 الكريات لا نميز بينها عند اللمس ، نسحب عشوائياكرية واحدة

المخرج x_i	1	2	3
الإحتمال p_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

15 د

- في حالة تساوي الأعداد p_i نقول أن قانون الإحتمال متساوي التوزيع (أو نقول تساوي الاحتمال)

أي (من أجل كل i لدينا $p(x_i)=p_i=\frac{1}{r}$

- نذكر أن أمل قانون الاحتمال هو العدد $\mu=\sum_{i=1}^{r}p_ix_i$ ،

تباينه العدد $V=\sum_{i=1}^{r}p_i(x_i-\mu)^2$ و انحرافه المعياري هو العدد $\sigma=\sqrt{V}$

- و نذكر أن الحادثة هي كل جزء من E و أن $\{x_i\}$ تدعى حادثة أولية ، E الحادثة الأكيدة و ϕ هي الحادثة المستحيلة

- احتمال حادثة A هو مجموع احتمالات كل المخارج التي تنتمي إلى A $(p(\phi)=0)$ و في حالة تساوي احتمال يئول حساب احتمال A أي $p(A)$ الى مسألة عد .

مبرهنة : في حالة تساوي احتمال على E يكون لدينا من أجل كل حادثة A

$$p(A)=\frac{\text{عدد عناصر A}}{\text{عدد عناصر E}}$$

- أخيرا نذكر ببعض الخواص

الخاصية	لغة الحوادث	أجزاء E
$1\geq p(A)\geq 0$	A حادثة كيفية	A
$p(\phi)=0$	الحادثتان الأكيدة و المستحيلة	E ، ϕ
$p(A\cup B)=p(A)+p(B)$	A ، B غير متلائمتين	$A\cap B=\phi$
$p(\overline{A})=1-p(A)$	$\overline{A}$ الحادثة العكسية لـ A	$\overline{A}$
$(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)$	A و B كيفيتان	A ، B

تطبيق : ص 219 رقم 09

20 د

مراحل سير الحصة

	الوسائل التعليمية
الكتاب المدرسي	المراجع

القسم : 3ت ر المحـــور: الاحتمالات الشرطية (تابع)

الحصة : حساب الموضوع : نمذجة تجربة عشوائية المدة المقترحة : 1 ســـاعة

المكتسبات القبلية	الكفاءات المستهدفة
1	* العـد (القوائم ، الترتيبات ، التبديلات)

مراحل سير الحصة		
مراحل سير الحصة	**حل النشاط الثاني ص 200** **المتغير العشوائي ، الأمل الرياضياتي و التباين لمتغير عشوائي** متغير عشوائي X هو دالة عددية معرفة على مجموعة المخارج E و مزودة باحتمال P X يأخذ القيم $x_1,x_2,....,x_n$ بالاحتمالات $p_1,p_2,....,p_n$ معرف كما يلي $p_i = p(X = x_i)$ إرفاق القيم p_i بالقيم x_i هو تعريف قانون احتمال جديد على E' هذا القانون يرمز له بـ P' أو P_x و يسمى قانون X . الأمل الرياضي لمتغير عشوائي X هو الأمل الرياضياتي لقانون احتماله P_x و كذلك التباين و الانحراف المعياري ونرمز لها على الترتيب بالرموز $E(X)$ ، $Var(X)$ ، $\sigma(X)$ **خواص الأمل الرياضياتي و التباين لمتغير عشوائي :** $E(X)$ هو معدل القيم x_i مرفقة بالقيم p_i بالمقارنة مع مجال الاحصاء $E(X)$ هو $\overline{x}$ و في ميدان الألعاب هو الربح المتوسط الذي يأمله اللاعب بعد تكرار اللعبة مرات كثيرة ، فانعدام $E(X)$ يدل على أن اللعبة عادلة و $E(x) \succ 0$ يعني أن اللعبة مربحة و في حالة $E(X) < 0$ فهي ليست في مصلحة اللاعب كما في مجال الاحصاء فإن التباين و الانحراف المعياري مقياس تشتت . **مبرهنة :** X و Y متغيران عشوائيان معرفان على نفس الوضعية و a عدد حقيقي لدينا $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$ و $E(aX) = aE(X)$ حيث $E(X+Y)$ و $E(aX)$ هما الأملان الرياضياتيان لكل من X+Y و aX ينتج من المبرهنة السابقة الخواص التالية : X متغير عشوائي و a ، b عددان حقيقيان ، لدينا $E(X+b) = E(X) + b$ $Var(X) = E(X - E(X))^2 = E(X^2) - (E(X))^2$ $\sigma(aX) = \lvert a \rvert \sigma(X)$ و $Var(aX) = a^2\ Var(X)$ $\sigma(X+b) = \sigma(X)$ و $Var(X+b) = Var(X)$ **تطبيق : ص ... رقم ..**	20 د 15 د 20 د
الوسائل التعليمية		
المراجع	الكتاب المدرسي	