نهائي رياضيات وعلوم

2015 دالة اللوغارثم العشري

الدرس الخامس

الكفاءة المستهدفة

- حل مشكلات بتوظيف اللوغاريتم .
- معرفة و تفسير نهايات الدالة اللوغارتمية النيبيرية .
- إنشاء بيانات دوال لوغاريتمية .

المكتسبات القبلية

- حساب النهايات عند اطراف مجموعة التعريف لدوال مالوفة
- استعمال مبرهنات وتعاريف
- استعمال المشتقات . الدالة الاسية
- الدوال العددية

ضف لمعلوماتك اللوغاريتم مشتق من اسم الخوارزمي *Algoritmi* *الاسم اللاتيني . دالة الاس النبري*
لُوغارِيتْم (اسم) : عَدَد لِأَسَاس مَا هُو الأُسّ الَّذِي يُرْفَع إِلَيه الأَسَاس لِيَنْتُج ذَلِك الْعَدد مثلا 125 ناتجة عن الاس 3 للعدد 5
النيبري هو الثابت في القيمة يكون غالبا واضح في معظم العمليات مثل العدد باي ....الخ

ســــــــــــير الدرس	التوقيت
نشاط 1: اللوغارثم النيبيري لعدد 2: تعريف دالة اللوغارثم 3: دراسة دالة اللوغارثم 4: تطبيقات 5: اللوغارثم العشري :6	

وثائق التحضير	الوسائل البيداغوجية	نقد ذاتي
• دليل الأستاذ • الكتاب المدرسي • المنهاج • الهباج في الرياضيات • مذكرات شايبي امين	• السبورة •	

المؤسسة:	المستوى: الثالثة رياضيات
السنة الدراسية:	ميدان التعلم: تحليل
التاريخ:	الوحدة التعلمية: الدالة اللوغارثمية
توقيت الحصة :	موضوع الحصة :

المكتسبات المستهدفة: حل مشكلات بتوظيف اللوغاريتم والدوال الأسية ودوال القوى.

الأنشطة المقترحة وطبيعتها	الإنجاز (سير الحصة)	التعليمات والتوجيهات
نشاط 01:	انظر أدناه	- يعطي تعريف دالة اللوغاريتم العشري (التي نرمز إليها بالرمز log) ويشار إلى أهمية تطبيقاتها في المواد الأخرى. -

1 النشاط

1. أحسب $\log(1)$ ، $\log(10)$ ، $\log(0,1)$ باستعمال الحاسبة.
2. أحسب $\log(10^n)$ من أجل كل عدد صحيح نسبي n.
3. بين أنه من أجل كل عددين حقيقيين موجبين تماما a و b لدينا:

$$\log(ab)=\log(a)+\log(b) \quad \text{و} \quad \log\left(\frac{a}{b}\right)=\log(a)-\log(b)$$

4. أحسب المجموع $s=\log\frac{1}{2}+\log\frac{2}{3}+\log\frac{3}{4}+...+\log\frac{98}{99}+\log\frac{99}{100}$
5. استنتج اتجاه تغير الدالة $\log$ من اتجاه تغير دالة اللوغاريتم النيبيري " $\ln$ ".
6. أدرس نهايتي الدالة $\log$ عند 0 و عند $+\infty$ ثم شكل جدول تغيراتها.
7. أرسم في معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ المنحنى (C) الممثل للدالة $\log$.(وحدة الأطوال $1cm$)

2 الحل

1. $\log(1)=0$ ، $\log(10)=1$ ، $\log(0,1)=-1$.

2. حساب $\log(10^n)$ من أجل كل عدد صحيح نسبي n.

بما ان $\log(10)=1$ و $\log(100)=2$ فان $\log(10^n)=n$

بما ان $\log(0.1)=-1$ و $\log(0.01)=-2$ فان $\log(10^n)=n$

3. اثبات ان من أجل كل عددين حقيقيين موجبين تماما a و b لدينا:

$\log(ab)=\log(a)+\log(b)$ نعلم ان $\ln(ab)=\ln(a)+\ln(b)$

ومنه $\log(ab)=\frac{\ln ab}{\ln 10}=\frac{\ln a+\ln b}{\ln 10}=\frac{\ln a}{\ln 10}+\frac{\ln b}{\ln 10}=\log a+\log b$

و $\log\left(\frac{a}{b}\right)=\log(a)-\log(b)$ نعلم ان $\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln(a)-\ln(b)$

ومنه $\log\left(\frac{a}{b}\right)=\frac{\ln a/b}{\ln 10}=\frac{\ln a-\ln b}{\ln 10}=\frac{\ln a}{\ln 10}-\frac{\ln b}{\ln 10}=\log a-\log b$

3. حساب المجموع $s=\log\frac{1}{2}+\log\frac{2}{3}+\log\frac{3}{4}+...+\log\frac{98}{99}+\log\frac{99}{100}$

$$s=\log\frac{1}{2}+\log\frac{2}{3}+\log\frac{3}{4}+...+\log\frac{98}{99}+\log\frac{99}{100}$$

المؤسســـــة:	المستـــــوى: الثالثة رياضيات
السنة الدراسية:	ميـدان التعلم: تحليل
التاريـــــخ:	الوحدة التعلمية: الدالة اللوغارثم العشري
توقيت الحصة :	موضوع الحصة :

المكتسبات المستهدفة: توظيف خواص الدالة الأسية النيبيرية.

الأنشطة المقترحة وطبيعتها	الإنجاز (سـير الحصة)	التعليمات والتوجيهات

6/ الدالة اللوغارثم العشري

1.6 تعريف الدالة اللوغارثمية العشرية

تعريف نسمي دالة اللوغاريتم العشري الدالة التي نرمز إليها بالرمز" $\log$ " و المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ $\log x = \ln x / \ln 10$

1 نتائج

1) $\log 1 = 0$　　2) $\log 10 = 1$

3) الدالة $x \mapsto \log x$ معرفة و متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$

البرهان :

• $\log 1 = \dfrac{\ln 1}{\ln 10} = 0$　　• $\log 10 = \dfrac{\ln 10}{\ln 10} = 1$

لدينا : $\log x = \dfrac{1}{\ln 10}.\ln x$

وعليه الدالة المشتقة للدالة $x \mapsto \log x$ هي الدالة $x \mapsto \dfrac{1}{\ln 10}.\dfrac{1}{x}$

وبما أن $x > 0$ و $\ln 10 > 0$ فإن $\dfrac{1}{\ln 10}.\dfrac{1}{x} > 0$

ومنه الدالة $x \mapsto \log x$ متزايدة تماما على $]0;+\infty[$

2 خواص

من أجل كل عددان حقيقيان a و b من $]0;+\infty[$ ومن أجل كل عدد ناطق r لدينا :

$\bullet \log(a \times b) = \log a + \log b$　　$\bullet \log\left(\dfrac{1}{b}\right) = -\log b$

$\bullet \log\left(\dfrac{a}{b}\right) = \log a - \log b$　　$\bullet \log a^r = r \log a$

البرهان :

$$\bullet \log(a \times b) = \frac{\ln(a \times b)}{\ln 10} = \frac{\ln a + \ln b}{\ln 10} = \frac{\ln a}{\ln 10} + \frac{\ln b}{\ln 10} = \log a + \log b$$

$$\bullet \log\left(\frac{1}{b}\right) = \frac{\ln\left(\frac{1}{b}\right)}{\ln 10} = \frac{-\ln b}{\ln 10} = -\log b$$

$$\bullet \log\left(\frac{a}{b}\right) = \log\left(a \times \frac{1}{b}\right) = \log a + \log\frac{1}{b} = \log a - \log b$$

$$\bullet \log a^r = \frac{\ln a^r}{\ln 10} = r\frac{\ln a}{\ln 10} = r \log a$$

التعليمات والتوجيهات:

- يعطي تعريف دالة اللوغاريتم العشري (التي نرمز إليها بالرمز log) ويشار إلى أهمية تطبيقاتها في المواد الأخرى.
- تدرج دراسة بعض الأمثلة لدوال من الشكل: $x \mapsto e^{-\lambda x^2}$ (حيث $\lambda > 0$) $x \mapsto a^x$ (حيث $a > 0$) أو $x \mapsto x^a$ (حيث: $x > 0$ و $a \in \mathbb{Q}$) بالنسبة لأي شعبة؟
- نقبل العلاقة: $a^b = e^{b \ln a}$ من أجل كل عددين حقيقيين a و b حيث $a > 0$ و b كيفي.

-نجعل التلميذ يلاحظ، انطلاقا من التمثيلات البيانية للدوال $x \mapsto \ln x$ ، $x \mapsto e^x$ ، $x \mapsto x^n$ حيث n عدد طبيعي غير منعدم، أنّ هذه الدوال تؤول كلّها نحو $+\infty$ عندما $x \to +\infty$ ، لكن سلوكها مختلف ومن ثمّ استنتاج التزايد المقارن لها: في

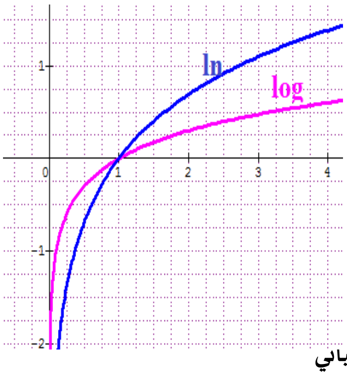
2.6 دراسة الدالة

من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ، $\log x = \dfrac{1}{\ln 10} \times \ln x$

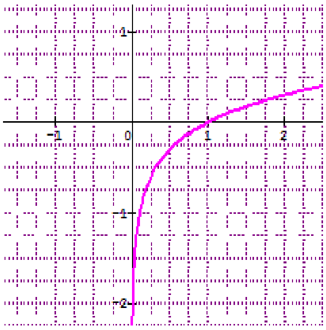
و بما أن $\ln 10 > 0$ فإن للدالتين" $\log$ " و" $\ln$ " نفس اتجاه التغيرات.و بما أن الدالة" $\ln$ " متزايدة تماما على $]0;+\infty[$

فإن الدالة" $\log$ " متزايدة تماما على $]0;+\infty[$.

يستنتج التمثيل البياني للدالة " $\log$ " انطلاقا من التمثيل البياني للدالة " $\ln$ ".



3 التمثيل البياني ل $\log x$



4 النهايات

خاصية: نهاية الدالة " $\log$ " عند $+\infty$ هي $+\infty$ و نهايتها عند 0 هي $-\infty$.

$(1)\quad \lim\limits_{x \to +\infty} \log x = +\infty$ و $(2)\quad \lim\limits_{x \to 0} \log x = -\infty$

<u>البرهان</u>

$(1)\quad \lim\limits_{x \to +\infty} \log x = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{\ln 10} = \dfrac{1}{\ln 10} \lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ لان $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

$(2)\quad \lim\limits_{x \to 0} \log x = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln x}{\ln 10} = \dfrac{1}{\ln 10} \lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$ لان $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$

5 جدول التغيرات $\log x$

دالة اللوغاريتم العشري قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ و لدينا من أجل كل x من $]0;+\infty[$.

$$(\log)'(x) = \left(\frac{\ln x}{\ln 10}\right)' = \frac{1}{\ln 10}(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ، $\dfrac{1}{x} > 0$ و منه الدالة " $\ln$ " متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$.

x	0	1	e	$+\infty$
$\log'(x)$		$+$		
$\log(x)$	$-\infty$	0	0.4	$+\infty$

اللانهاية، تتفوق الدالة " الأسية " على الدالة " قوة " والدالة " قوة " على الدالة اللوغاريتم.

في هذا المجال يمكن استعمال الحاسبة البيانية أو المجدول لتجسيد هذه السلوكات.

5 نتائج

خاصية: من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم N، يوجد عدد طبيعي وحيد n بحيث:
$10^n \le N < 10^{n+1}$ و $n+1$ هو عدد الأرقام الموجودة في الكتابة العشرية للعدد الطبيعي N.

أمثلة: *إذا كان $N = 312$ فإن $10^2 \le N < 10^3$ (عدد أرقام N هو 3).
لان $N = 3.12 \times 10^3$

* إذا كان $N = 46002$ فإن $10^4 \le N < 10^5$ (عدد أرقام N هو 5).
لان $N = 4.6002 \times 10^4$

ملاحظة. ليكن N عددا طبيعيا غير معدوم.

- بين أنه يوجد عدد طبيعي وحيد n بحيث: $n \le \log(N) < n+1$.
- بين أن عدد الأرقام الموجودة في الكتابة العشرية للعدد الطبيعي N هو $1 + E(\log N)$.

نذكر أن $E(x)$ هو الجزء الصحيح للعدد الحقيقي x.

الحل

1. لدينا $\log(3^{10518}) = 10518 \log 3$. تعطي الحاسبة:
$E(10518 \log 3) = 5018$.
2. من $E(\log n) = 5018$ نستنتج الحصر: $5018 \le \log n < 5019$
و يمكن كتابة هذا الحصر كما يلي: $\log(10^{5018}) \le \log n < \log(10^{5019})$
و بما أن الدالة " $\log$ " متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$ فإن $10^{5018} \le n < 10^{5019}$.
3. يثبت الحصر السابق أن الكتابة العشرية للعدد n تتكون من 5019 رقما.

في الحالة العامة

$10^n \le N < 10^{n+1}$ ومنه $\log 10^n \le \log N < \log 10^{n+1}$ أي $n \le \log(N) < n+1$

العدد $x = 3^{8700}$ هذا يعني ان $x = \log 3,87 + \log 10^7$ ومنه $x = 7 + \log 3,87$

ملاحظة: الدالة اللوغاريتم العشري تطبيقات عديدة و هامة في مختلف المواد و بصفة خاصة في الفيزياء، الكيمياء و الجغرافيا.

تطبيق:

2. ما هو عدد أرقام العدد الطبيعي 2006^{2007} ؟
3. نعتبر العدد الطبيعي N حيث: $N = 3^{10518}$.
عين باستعمال حاسبة الجزء الصحيح للعدد $\log N$.
استنتج الحصر التالي: $10^{5018} \le N < 10^{5019}$.
حدد عدد الأرقام في الكتابة العشرية للعدد N.

مثال:

نعتبر العدد الحقيقي x بحيث $x = 3,87 \times 10^7$.
لدينا $10^7 < x < 10^8$ و منه $\log 10^7 < \log x < \log 10^8$
نجد هكذا أن $7 < \log x < 8$