2015 الدالة اللوغارثمية

الدرس الخامس

الكفاءة المستهدفة

- حل مشكلات بتوظيف اللوغاريتم .
- معرفة و تفسير نهايات الدالة اللوغارتمية النيبيرية .
- إنشاء بيانات دوال لوغاريتمية .

المكتسبات القبلية

- حساب النهايات عند اطراف مجموعة التعريف لدوال مالوفة
- استعمال مبرهنات وتعاريف
- استعمال المشتقات . الدالة الاسية
- الدوال العددية

ضف لمعلوماتك اللوغاريتم مشتق من اسم الخوارزمي *Algoritmi* *الاسم اللاتيني . دالة الاس النبري*
لُوغارِيتْم (اسم) : عَدَد لِأَسَاس مَا هُو الأُسّ الَّذِي يُرْفَع إِلَيه الأَسَاس لِيَنْتُج ذَلِك الْعَدَد مثلا 125 ناتجة عن الاس 3 للعدد 5
النيبري هو الثابت في القيمة يكون غالبا واضح في معظم العمليات مثل العدد باي ....الخ

ســــــــــــــير الدرس	التوقيت
نشاط 1: اللوغارثم النيبيري لعدد 2: تعريف دالة اللوغارثم 3: دراسة دالة اللوغارثم 4: تطبيقات 5: ملخص دالتي اللوغارثم والدالة الاسية 6:سلسلة تمارين البكالوريا من 2008 الى 2015	

وثائق التحضير	الوسائل البيداغوجية	نقد ذاتي
• دليل الأستاذ • الكتاب المدرسي • المنهاج • الهباج في الرياضيات • مذكرات شايبي امين	• السبورة •	

المؤسســـــــــة:	المستـــــــــوى: الثالثة رياضيات
السنة الدراسية:	ميـــدان التعلم: تحليل
التاريــــــــخ:	الوحدة التعلمية: الدالة اللوغارثمية
توقيت الحصة :	موضوع الحصة :

المكتسبات المستهدفة: حل مشكلات بتوظيف اللوغاريتم والدوال الأسية ودوال القوى.

الأنشطة المقترحة وطبيعتها	الإنجاز (ســير الحصة)	التعليمات والتوجيهات

الأنشطة المقترحة وطبيعتها

نشاط 01:

a عدد حقيقي كيفي. اعتمادا على التمثيل البياني للدالة الأسية ناقش وجود وعدد حلول كل معادلة مما يلي في R :

$e^x = 1 .....(1)$

$e^x = e .....(2)$

$e^x = 4 .....(3)$

$e^x = a .....(4)$.

نشاط يوضع عكسية الدالة الاسية

الإنجاز (ســير الحصة)

1.هذا النشاط معتمد لدى الجميع لاهميته

1- أنشئ في معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ التمثيل البياني (c) للدالة f : $x \mapsto e^x$

2- أرسم المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$

3- أنشئ التمثيل البياني (Γ) صورة (c) بالتناظر المحوري بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

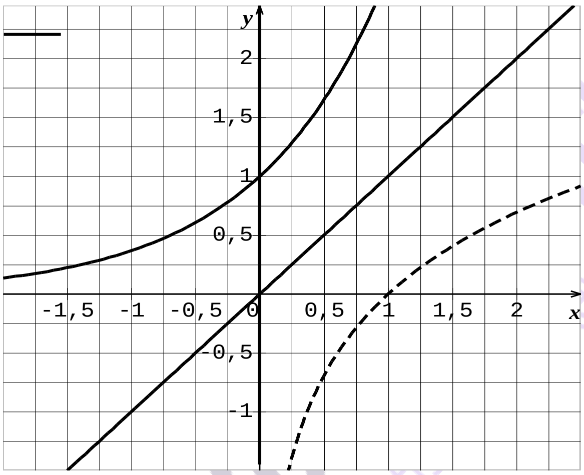
4- لتكن g الدالة التي تمثيلها البياني (Γ).

- ما هي مجموعة تعريف الدالة g . - ما هي صورة 1 بالدالة g .

- ادرس إشارة الدالة g بيانيا .

- ما هو تخمينك حول : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$, $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} g(x)$

- ما هي صورة العدد e بالدالة g



الحل:

1- إنشاء (c)

2- إنشاء (Δ)

3- إنشاء (r)

4- مجموع الدالة g هي : $]0;+\infty[$

- تعيين صورة 1:

لدينا $f(0)=1$ ، نظيرة النقطة $B(0;1)$ بالتناظر المحوري هي النقطة $A(1;0)$ و منه $g(1)=0$

- دراسة إشارة g بيانيا :

x	0 1 $+\infty$
$g(x)$	- 0 +

- المخمنات :

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} g(x)=-\infty$

- تعيين صورة e بالدالة g : لدينا : $e^1 = e$ و عليه $f(1)=e$

نظيرة النقطة $c(1;e)$ بالتناظر المحوري هو $D(e;1)$

و عليه : $g(e)=1$.

التعليمات والتوجيهات

- نبين من أجل كل عدد حقيقي a موجب تماما، أنّ المعادلة $e^x = a$ تقبل حلا وحيدا نرمز له بالرمز lna ، يمكن القول حينئذ أن الدالة ln هي الدالة العكسية للدالة الأسية، لكن لا تعطى أي دراسة تفصيلية حول الدالة العكسية.

- تستنتج الخواص الجبرية والتحليلية للدالة اللوغاريتمية من خواص الدالة ln الأسية exp.

- تتم الإشارة إلى أن المنحنيين المثلين للدالتين ln و exp متناظرين بالنسبة للمنصف الأول في المعلم المتعامد والمتجانس وتبرير ذلك.

- توظف خواص الدوال اللوغاريتمية والأسية لحل معادلات ومتراجحات.

- يعطى تعريف دالة اللوغاريتم العشري (التي نرمز إليها بالرمز log) ويشار إلى أهمية تطبيقاتها في المواد الأخرى.

- تدرج دراسة بعض الأمثلة لدوال من الشكل:

المؤسســـــة:	المستـــــــوى: الثالثة رياضيات
السنة الدراسية:	ميـــدان التعلم: تحليل
التاريـــــــخ:	الوحدة التعلمية: الدالة اللوغارثمية
توقيت الحصة :	موضوع الحصة :

المكتسبات المستهدفة: توظيف خواص الدالة الأسية النيبيرية.

الأنشطة المقترحة وطبيعتها	الإنجاز (ســير الحصة)	التعليمات والتوجيهات

5/ الدالة اللوغارثمية النيبرية

1.5 اللوغارتم النيبري لعدد

- حل المعادلة $2^x = 8$ هو: $2^x = 2^3$ أي $x = 3$ انطلاقا من تساوي الاسس

حل المعادلة $2^x = 10$ هو 3,322 ينتج كما يلي $\ln 2^x = \ln 10$ اي $x = \dfrac{\ln 10}{\ln 2}$

- حل المعادلة $e^x = 2$ هو $\ln 2$ أي أن : $e^{\ln 2} = 2$
- حل المعادلة $e^x = 10$ هو $\ln 10$ أي أن : $e^{\ln 10} = 10$

عموما حل المعادلة $e^x = a$ هو $x = \ln a$ من أجل $a > 0$

يعرف لوغاريتم عدد ما بالنسبة لأساس ما، بأنه الأس المرفوع على الأساس والذي سينتج ذلك العدد.

بالنسبة للدالة e^x معرفة و مستمرة و متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ و تأخذ من خلال ما سبق كل قيمها في $\mathbb{R}_+$

ومنه المعادلة $e^x = a$ لها حل وحيد هذا الحل يسمى اللوغاريتم النيبري للعدد a و نرمزله بالرمز $\ln a$

حيث $\ln e^x = \ln a$ اي $x \ln e = \ln a$ و $\ln e = 1$ ومنه $x = \ln a$

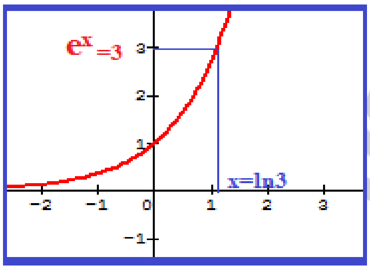
البرهان

e^x معرفة و مستمرة و متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ و

حسب نظرية القيم المتوسطة من أجل كل عدد حقيقي k من $\mathbb{R}^+$ فان المعادلة $f(x) = k$ تقبل حل وحيد $c \in \mathbb{R}$ حيث هذا الحل نعبر عنه ب $\ln k$

بيانيا

حل المعادلة $e^x = 3$ هو $\ln 3$



بعض الخواص الجبرية:

خاصية: من أجل كل عددين حقيقيين a و b من $]0;+\infty[$ ، $\ln(ab) = \ln a + \ln b$.

إثبات: ليكن $A = \ln(ab)$ و e^B $B = \ln(a) + \ln(b)$

ومنه $e^A = e^{\ln(ab)}$ أي $e^A = ab$

و $e^B = e^{\ln(a)+\ln(b)}$ أي $e^B = e^{\ln(a)} e^{\ln(b)}$ ومنه $e^B = ab$

ومنه $A = B$

خاصية02 , من اجل كل $a \succ 0$ الدالة $x \mapsto e^x$ مستمرة ومتزايدة تماما على $\mathbb{R}$. وبما أن $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ أي أن العدد e^x يأخذ قيم أصغر من 3 وقيمة أكبر من 3 ، حسب مبرهنة القيم المتوسطة ، المعادلة : $e^x = 3$ تقبل حلا وحيدا α على $\mathbb{R}$ ، ونرمز الى هذا العدد بالرمز $\alpha = \ln 3$.

التعليمات والتوجيهات:

- $x \mapsto e^{-\lambda x^2}$ حيث($\lambda > 0$)
- $x \mapsto a^x$ حيث($a > 0$) أو
- $x \mapsto x^a$ (حيث: $x > 0$ و $a \in \mathbb{Q}$) بالنسبة لأي شعبة؟
- نقبل العلاقة: $a^b = e^{b \ln a}$ من أجل كل عددين حقيقيين a و b حيث $a > 0$ و b كيفي.
-نجعل التلميذ يلاحظ، انطلاقا من التمثيلات البيانية للدوال $x \mapsto \ln x$ ، $x \mapsto e^x$ ، $x \mapsto x^n$ حيث n عدد طبيعي غير منعدم، أنّ هذه الدوال تؤول كلّها نحو $+\infty$ عندما $x \to +\infty$ ، لكن سلوكها مختلف ومن ثمّ استنتاج التزايد المقارن لها: في اللانهاية، تتفوق الدالة الأسية على الدالة " قوة " والدالة " قوة " على الدالة اللوغاريتم. في هذا المجال يمكن استعمال الحاسبة البيانية أو المجدول لتجسيد هذه السلوكات

2.5 تعريف الدالة اللوغارتمية النيبيرية

تعريف

الدالة الأسية مستمرة ومتزايدة تماما على $\mathbb{R}$ في المجال $]0,+\infty[$ ، حسب مبرهنة القيم المتوسطة ، من أجل كل y موجب تماما ، المعادلة $e^x = y$ تقبل حلا وحيدا في $\mathbb{R}$
نرمز لهذا الحل بالرمز $\ln y$ أي $x = \ln y$.
نعرف عندئذ الدالة $y \mapsto \ln(y)$ على المجال $]0,+\infty[$ ، التي ترفق بكل عدد y موجب تماما $\ln(y)$ الحل الوحيد للمعادلة $e^x = y$.
وفي مايلي نرمز بـ : $f(x) = \ln(x)$ لهذه الدالة .

تسمى الدالة الأصلية للدالة $x \mapsto \frac{1}{x}$ و التي تنعدم عند 1، دالة اللوغاريتم النيبيري و نرمز إليها بـ $\ln$

1.2.5 الخواص الاولية

خاصية ا : الدالة $\ln$ معرفة على $\mathbb{R}_+^*$ وتأخذ قيمها في $\mathbb{R}$

خاصية ب: من اجل كل $x \succ 0$ $e^{\ln(x)} = x$ (لأن حل المعادلة $e^a = x$ هو $a = \ln(x)$ ويكون $(e^{\ln(x)} = x)$. طبعا $a \succ 0$

خاصية : ج- من أجل كل عدد حقيقي x : $\ln(e^x) = x$ (لأن حل المعادلة $e^a = e^x$ هو $a = \ln(e^x)$ ويكون $e^{\ln(e^x)} = e^x$ أي، $\ln(e^x) = x$

خاصية د- $\ln(1) = 0$ ، $\ln(e) = 1$ (لأن $e^0 = 1$ ومنه $\ln(1) = 0$ و $e^1 = e$ أي $(1 = \ln(e)$

نتائج وخواص جبرية

نتيجة1: من أجل كل عددين حقيقيين a و b من $]0;+\infty[$ ، $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$ و $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$

البرهان: * من أجل a من $]0;+\infty[$ ، $a \times \frac{1}{a} = 1$ و منه $\ln\left(a \times \frac{1}{a}\right) = 0$ أي $\ln(a) + \ln\left(\frac{1}{a}\right) = 0$ و منه $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$.

* من أجل a و b من $]0;+\infty[$. $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln\left(a \times \frac{1}{b}\right) = \ln a + \ln\left(\frac{1}{b}\right) = \ln a - \ln b$

نتيجة2: من أجل كل a من $]0;+\infty[$ و من أجل كل n من $\mathbb{Z}$. $\ln(a^n) = n\ln a$.

البرهان: a عدد حقيقي من $]0;+\infty[$ و n عدد صحيح نسبي. نميز الحالات التالية:

1. الحالة الأولى: $n \geq 0$. نستعمل البرهان بالتراجع. و من أجل ذلك نسمي $P(n)$ الخاصية $\ln(a^n) = n\ln a$. من أجل $n = 0$ لدينا: $\ln(a^0) = \ln(1) = 0 = 0\ln a$ و بالتالي $P(0)$ صحيحة.

فرضية التراجع: نفرض صحة $P(n)$ من أجل n حيث $n \geq 0$ أي $\ln(a^n) = n\ln a$.

وراثية الخاصية ابتداء من الرتبة 0:

نبرهن صحة $P(n+1)$ أي $\ln(a^{n+1}) = (n+1)\ln a$. لدينا

$\ln\left(a^{n+1}\right)=\ln\left(a^n\times a\right)=\ln\left(a^n\right)+\ln a=n\ln a+\ln a=(n+1)\ln a$

و منه $P(n+1)$ صحيحة.

الخلاصة: من أجل كل عدد طبيعي n ، $\ln\left(a^n\right)=n\ln a$.

2.الحالة الثانية: $n<0$. $\ln\left(a^n\right)=\ln\left(\frac{1}{a^{-n}}\right)=-\ln\left(a^{-n}\right)=-(-n)\ln a=n\ln a$ لأن $-n>0$

نتيجة3: من أجل كل عدد حقيقي a من $]0;+\infty[$ ، $\ln\left(\sqrt{a}\right)=\frac{1}{2}\ln a$.

البرهان: من أجل a من $]0;+\infty[$ ، $\ln a=\ln\left[\left(\sqrt{a}\right)^2\right]=2\ln\left(\sqrt{a}\right)$ و من $\ln\left(\sqrt{a}\right)=\frac{1}{2}\ln a$.

المؤسســــــة:	المستــــــــوى: الثالثة رياضيات
السنة الدراسية:	ميــدان التعلم: تحليل
التاريــــــــخ:	الوحدة التعلمية: الدالة اللوغارثمية
توقيت الحصة :	موضوع الحصة : دراسة الدالة اللوغارثمية

المكتسبات المستهدفة: تعريف وخصائص

الأنشطة المقترحة وطبيعتها	الإنجاز (ســير الحصة)	التعليمات والتوجيهات

نشاط 01:

3.5 دراسة الدالة اللوغارثمية

1.3.5. النهايات

خاصية: نهاية الدالة " $\ln$ " عند $+\infty$ هي $+\infty$ و نهايتها عند 0 هي $-\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty \quad (1) \qquad \text{و} \qquad \lim_{x\to 0}\ln x=-\infty \quad (2)$$

البرهان:

نقبل دون برهان الخاصية (1).(ملاحظة النهاية عند $+\infty$ توضح وجود مقارب مائل)

من أجل x من $]0;+\infty[$ ، نضع $X=\dfrac{1}{x}$ و منه $\ln X=\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)=-\ln x$. لدينا:

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} X=+\infty$ و من الخاصية (1) لدينا: $\lim\limits_{X\to+\infty}(-\ln X)=-\infty$ و هكذا فإن

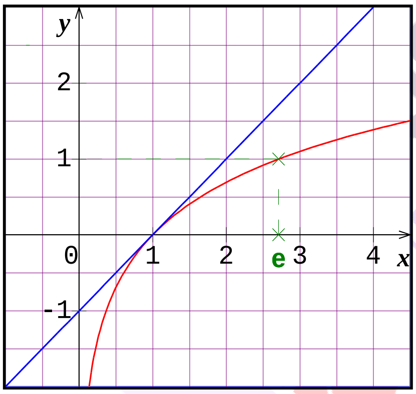
$\lim\limits_{x\to 0}\ln x=\lim\limits_{X\to+\infty}(-\ln X)=-\infty$.

2.3.5. جدول التغيرات

دالة اللوغاريتم النيبيري قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ و لدينا من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ،

$$(\ln)'(x)=\frac{1}{x}$$

من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ، $\dfrac{1}{x}>0$ و منه الدالة " $\ln$ " متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$.



(Δ)

x	0	1	e	$+\infty$
$\ln'(x)$	‖	+		
$\ln x$	‖ $-\infty$	0 ↗	1	$+\infty$

3.3.5. التمثيل البياني

ليكن (C) التمثيل البياني لدالة اللوغريتم النيبيري

في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

- المنحني (C) الممثل للدالة اللوغاريتم النيبيري يقبل محور التراتيب كمستقيم مقارب.
- لدينا $\ln'(1)=1$ و $\ln 1=0$. إذن يقبل المنحني (C) عند النقطة ذات الفاصلة 1 مماسا $(\Delta): y=x-1$

لان : العدد المشتق عند 1 للدالة $\ln$ هو 1

أي ان: $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\ln(1+h)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\ln(1+h)-\ln 1}{h}=1$ تفسير العدد المشتق هو وجود مماس

معادلته $y=1(x-1)+\ln(1)=x-1$ ويعتبر احسن تقريب تالفي للدالة $\ln$ عند 1

تطبيق

ليكن (Δ) مماس المنحنى (C) الممثل للدالة $x \mapsto \ln x$ عند النقطة $A(e;1)$.

1. عين معادلة للمماس (Δ).

2. أدرس اتجاه تغير الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بِ $f(x)=\ln(x)-\frac{1}{e}x$. احسب $f(e)$.

3. استنتج وضعية المنحنى (C) بالنسبة للمماس (Δ).

الحل: 1. معادلة (Δ) هي: $y=\frac{1}{e}(x-e)+1$ و منه $(\Delta): y=\frac{1}{e}x$

2. **المشتقة:** من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ، $f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{e}=\frac{e-x}{ex}$.

اشارة المشتقة: بما أن $x>0$ فإن إشارة $f'(x)$ من نفس إشارة $e-x$. و هكذا:

$f'(x)\geq 0$ من أجل $0<x\leq e$ و $f'(x)<0$ من أجل $x>e$.

$f(e)=0$ هي القيمة الحدية العظمى للدالة f على $]0;+\infty[$.

النهايات: $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\ln(x)-\frac{1}{e}x=-\infty$

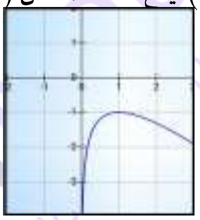
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\ln(x)-\frac{1}{e}x=\lim_{x\to+\infty}\ln(x)\left(1-\frac{1}{e}\frac{x}{\ln(x)}\right)=-\infty$$

لان: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{\ln(x)}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$ أي $\lim\limits_{x\to+\infty}-\frac{x}{e\ln(x)}=-\infty$

3. من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ، $f(x)\leq 0$ أي من أجل كل x من $]0;+\infty[$ $\ln(x)\leq\frac{1}{e}x$.

نستنتج إذن أن المنحنى (C) يقع تحت المماس (Δ) على المجال $]0;+\infty[$.

x	0 $\qquad$ e $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$ $\qquad$ 0 $\qquad$ $-$
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$ 0 $\searrow$ $-\infty$



ملاحظة:

منحنى الدالة $\ln$ والدالة e^x متناظران بالنسبة الى المنصف الاول ذو المعادلة $y=x$

من خلال المنحنى السابق نلاحظ ان

$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty\quad(1)$ و $\lim\limits_{x\to 0^>}\ln x=-\infty\quad(2)$

معادلات ومتراجحات

استنتاج: الدالة $x\mapsto\ln(x)$ معرفة على المجال $]0,+\infty[$ ومتزايدة تماما نستنتج ان

من اجل كل عددين حقيقيين $x;y$ من $\mathbb{R}_+^*$:

$x=y$ يكافئ $\ln x=\ln y$ و $x\geq y$ يكافئ $\ln x\geq\ln y$

من خلال النتائج السابقة نستخلص ان : $\ln x=\ln(1)$ يعني ان $\ln x=0$ ومنه $x=1$

من خلال النتائج السابقة نستخلص ان : $\ln x\geq\ln(1)$ يعني ان $\ln x\geq 0$ ومنه $x\geq 1$

العلاقة الاخيرة تعطي اشارة العدد $\ln x$ كما يلي

x	0 $\qquad$ 1 $\qquad$ $+\infty$
$\ln x$	$-$ $\qquad$ 0 $\qquad$ $+$

تطبيق

حل المعادلة و المتراجحة التاليتين:

$\ln(x+2)+\ln(x+3)=\ln 6 \quad (1)$ و $\ln(x+2)+\ln(x+3)\le \ln 6 \quad (2)$

الحل:

1.تكون المعادلة (1) معرفة من أجل كل عدد حقيقي x حيث $x+2>0$ و $x+3>0$ م هذا يعني $x>-2$ و $x>-3$ و منه مجموعة تعريفها هي $D=]-2;+\infty[$.

من أجل كل x من D، (1) تعني $\ln(x+2)(x+3)=\ln 6$ و هذا يعني $(x+2)(x+3)=6$ أي $x^2+5x=0$

للمعادلة $x^2+5x=0$ حلان هما (-5) و 0. نلاحظ أن 0 عنصر من D بينما (-5) لا ينتمي إلى D. مجموعة الحلول هي إذن $S=\{0\}$.

2.مجموعة تعريف المتراجحة (2) هي نفسها $D=]-2;+\infty[$.

من أجل كل x من D، (2) تعني $\ln(x+2)(x+3)\le \ln 6$ و هذا يعني $(x+2)(x+3)\le 6$ أي $x^2+5x\le 0$

$x^2+5x\le 0$ يعني $-5\le x\le 0$ و منه مجموعة الحلول هي $S=[-5;0]\cap D=]-2;0]$

تمرين 1:1 عين مجموعة تعريف كلا من الدوال التالية: $f(x)=\ln(x^2)$ ، $g(x)=\ln(6-x)$ ، $h(x)=\ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$

2 حل المعادلة : $f(x)=g(x)$ في مجال التعريف المشترك .

3 حل المتراجحة : $g(x)\ge 0$.

تمرين 02:

-1 حل المعادلة : $(\ln x)^2-\ln x-6=0$.

-2 حل المتراجحة : $(\ln x)^2-\ln x-6\le 0$.

تمرين محلول:

حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية 1) $\ln(x-2)\ge -4$ 2) $(\ln x)^2-\ln x-6\le 0$

الحل

1) $\ln(x-2)\ge -4$ يعني ان $\begin{cases} x-2\succ 0 \\ e^{\ln(x-2)}\ge e^{-4}\end{cases}$ هذا ينتج لنا

$\begin{cases} x\succ 2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots x\in]2;+\infty[\\ (x-2)\ge e^{-4}\ldots\ldots x\in[e^{-4}+2;+\infty[\end{cases}$ ومنه الحلول هي المجال $[2;+\infty[$

2) $(\ln x)^2-\ln x-6\le 0$ تعطي مايلي $y^2-y-6\le 0$ بعد تغيير المتغير $\ln x=y$

حل المتراجحة 2 على المجال $]0;+\infty[$ يؤول لإشارة المعادلة y^2-y-6

المميز هو $\Delta=25$ و الحلول هي $y=\ln x=-2$ (مرفوض) و $y=\ln x=3$

جدول الاشارة

$\ln x$	$-\infty$		-2	0	3		$+\infty$
الاشارة		+	0	-	0	+	

ومنه حلول المتراجحة (2) هي المجال

$\ln(x)\in]0;3]$ أي $e^0\prec x\le e^3$

ومنه $x\in]1;e^3]$

تطبيقات على الدالة $x \mapsto \ln(x)$

4.5 الدالة المشتقة لـ: $h : x \mapsto \ln|g(x)|$

حيث g دالة غير معدومة و قابلة للاشتقاق على مجال I.

الدالة $x \mapsto \ln|g(x)|$ هي مركب الدالتان g و $\ln$ حيث g موجبة وتقبل الاشتقاق على I و الدالة $\ln$ تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}_+$ و عليه h تقبل الاشتقاق على I و دالتها المشتقة هي الدالة $h' : x \mapsto g'(x) \times \frac{1}{g(x)}$ أي : $x \mapsto g'(x)/g(x)$

5.5 الدالة الاصلية لـ: $x \mapsto u'(x)/u(x)$

لتكن u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I و لها نفس الإشارة مع u' في هذا المجال. رأينا أن الدالة المشتقة للدالة: $x \mapsto \ln|u(x)|$ على I هي الدالة: $x \to u'(x)/u(x)$ و عليه ينتج أن الدوال الأصلية للدالة : $x \to u'(x)/u(x)$ على I هي الدوال: $x \mapsto \ln|u(x)| + \lambda$ حيث : $\lambda \in \mathbb{R}$

تطبيق

الهدف من هذا التطبيق : معرفة كيفية دراسة الدالة اللوغارثم و الخواص المتعلقة بها.

نعتبر الدالة f المعرفة بالعلاقة: $f(x) = \ln(x^2 - 2x + 1)$ على $\mathbb{R} - \{1\}$

1. قارن بين $f(2-x)$ و $f(x)$. ماذا تستنتج ؟
2. أدرس تغيرات الدالة f
3. أكتب معادلة المماس (Δ) لـ(C_f) عند النقطة ذات الفاصلة $x = 2$ و $x = 2$
4. أرسم (Δ)و(C_f) في معلم متعامد ممنظم $(O; \vec{i}; \vec{j})$
5. ناقش بيانيا وحسب قيم m الوسيط الحقيقي عددحلول المعادلة $m = 2(-2 + \ln|x-1|)$

الحل:

$$f(2-x) = \ln\left((2-x)^2 - 2(2-x) + 1\right)$$

لدينا $$f(2-x) = \ln(x^2 - 4x + 4 - 4 + 2x + 1)$$

$$f(2-x) = \ln(x^2 - 2x + 1) = f(x)$$

المستقيم ذو المعادلة $x = 1$ هو محور تناظر للمنحنى (C_f) لان $f(2(1) - x) = f(x)$

2.تغيرات الدالة f

النهايات

f معرفة من اجل $x \in \mathbb{R} - \{1\}$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \ln(x^2 - 2x + 1) = \lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \ln(x^2 - 2x + 1) = \lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} \ln(x^2 - 2x + 1) = -\infty$$ لان $$\lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} \ln(x^2 - 2x + 1) = \lim_{y \to 0} \ln(y) = -\infty$$

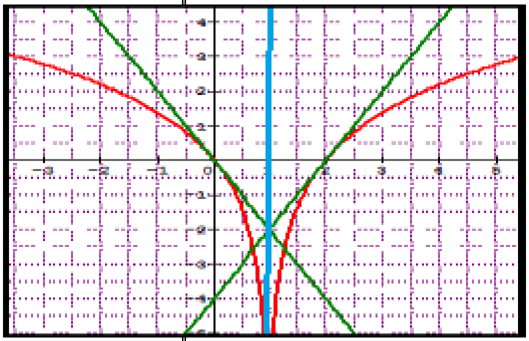
$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} \ln(x^2 - 2x + 1) = -\infty$$ لان $$\lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} \ln(x^2 - 2x + 1) = \lim_{y \to 0} \ln(y) = -\infty$$

الاشتقاق

f معرفة من اجل $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ وتقبل الاشتقاق على $\mathbb{R} - \{1\}$ دالتها المشتقة هي :

$$f'(x) = \frac{2x - 2}{x^2 - 2x + 1}$$ وتكتب كما يلي $$f'(x) = \frac{2x - 2}{(x-1)^2}$$ أي $$f'(x) = \frac{2}{(x-1)}$$

اشارة المشتقة على $\mathbb{R} - \{1\}$ هي من اشارة $x - 1$



جدول التغيرات:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	-	‖	+
$f'(x)$	$+\infty \searrow -\infty$	‖	$-\infty \nearrow +\infty$

معادلة المماس عند النقطة ذات الفاصلة $x=2$

$\begin{cases} y=2(x-2)+0 \\ y=2x-4 \end{cases}$ و عند الفاصلة $x=0$ $\begin{cases} y=-2(x-0)+0 \\ y=-2x \end{cases}$

ملاحظة : $\ln(x+1)^2=2\ln|x+1|$ ومن أجل كل عددين حقيقيين سالبين a,b

$\ln(a\times b)=\ln|a|+\ln|b|$

المناقشة حسب قيم الوسيط m حيث $2(-2+\ln|x-1|)=m$

ومنه $-4+2\ln|x-1|=m$ أي $\ln(|x-1|)^2=m+4$ أي

$\ln(x-1)^2=\ln(x^2-2x+1)=m+4$ وتصبح $f(x)=m+4$ ونبحث عن نقاط

التقاطع للمستقيم ذو المعادلة $y=m+4$ ومنحنى الدالة f

ملاحظة اثناء المناقشة البيانية يجب كتابة العلاقة المعطاة من الشكل $f(x)=g(m)$

تمرين محلول كتاب مدرسي: نعتبر الدالة f المعرفة على $]-2;+\infty[$ بِ $f(x)=\ln(x+2)$ و

ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

عين نقطة (C_f) التي يكون عندها المماس موازيا للمستقيم ذو المعادلة $y=x$. أرسم وهذا المماس.

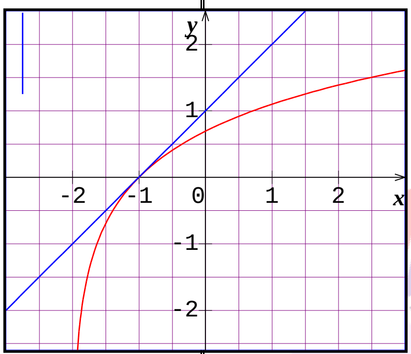
الحل: الدالة f قابلة للاشتقاق على $]-2;+\infty[$ و لدينا $f'(x)=\dfrac{1}{x+2}$.

يكون المماس عند نقطة من (C_f) فاصلتها x موازيا لِ $(\Delta): y=x$ لما

يكون $f'(x)=1$ أي $\dfrac{1}{x+2}=1$ و منه $x=-1$ مع $f(-1)=0$.

معادلة المماس عند النقطة $A(-1;0)$ هي: $y=x+1$.

(C_f) هو صورة منحنى الدالة "$\ln$" بالانسحاب الذي شعاعه $-2\vec{i}$.



تمرين محلول3: عين حسب قيم x إشارة $\ln(x-3)$

الحل:

- $\ln(x-3)\le 0$ يعني $0<x-3\le 1$ إي $3<x\le 4$.
- $\ln(x-3)>0$ يعني $x-3>1$ إي $x>4$. و منه إشارة $\ln(x-3)$ هي ملخصة في

الجدول التالي:

x	3	4	$+\infty$
$\ln(x-3)$	‖	- 0	+

ملاحظة: كان بالإمكان تعيين مجموعة التعريف ثم الاكتفاء بحل إحدى المتراجحتين.

تمرين:

المستوى منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

✓ f دالة عددية لمتغير حقيقي x معرفة على $\mathbb{R}^*$ بالعبارة: $f(x) = 1 - \frac{lnx^2}{x}$

1. أدرس تغيرات الدالة f
2. أثبت ان المنحنى (C_f) يقطع المستقيم (Δ) الذي معادلته: $y = 1$ في نقطتين يجب تحديد إحداثيتهما
3. أحسب : $f(-x) + f(x)$ ماذا تستنتج
4. بين أن المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة فاصلتها x_0 حيث: $-1 < x_0 < -\frac{1}{2}$
5. أثبت أن (C_f) يقبل مماسا (d) يشمل النقطة $\omega\left(0 \text{ ، } 1\right)$ ويمس المنحنى (C_f) في نقطتين مع تحديد إحداثياهما
   حدد معادلة المماس (d)
6. أرسم (d) و (C_f)

✓ h دالة عددية حيث : $f(x) = 1 + \frac{lnx^2}{|x|}$

1 بين أن h دالة زوجية

2 دون دراسة تغيرات الدالة h أنشئ (C_h)

المؤسســــــة:		المستـــــــــوى:	الثالثة رياضيات
السنة الدراسية:		ميــدان التعلم:	تحليل
التاريـــــــخ:		الوحدة التعلمية:	الدالة اللوغارثمية
توقيت الحصة :		موضوع الحصة :	

المكتسبات المستهدفة: توظيف خواص الدالة الأسية النيبيرية.

الأنشطة المقترحة وطبيعتها	الإنجاز (ســير الحصة)	التعليمات والتوجيهات
	(see below)	(see below)

5/ الدالة اللوغارثمية النيبرية

6.5 دراسة الدالة $\ln \circ u$

1 النهايات

لدراسة نهاية دالة $\ln \circ u$ نستعمل المبرهنة الخاصة بنهاية دالة مركبة.

مثال: نعتبر الدالة f المعرفة على $]2;+\infty[$ بـِ $f(x)=\ln(x-2)$.

- لدينا $\lim\limits_{x\to 2}(x-2)=0$ و بما أن $\lim\limits_{X\to 0}\ln X=-\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to 2}\ln(x-2)=-\infty$ أي $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=-\infty$
- لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-2)=+\infty$ و بما أن $\lim\limits_{X\to+\infty}\ln X=+\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x-2)=+\infty$ أي $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

2 اتجاه التغير

خاصية: إذا كانت u دالة معرفة و موجبة تماما على مجال I فإن للدالتين u و $\ln \circ u$ نفس اتجاه التغيرات على المجال I.

البرهان:

نعلم أن الدالة " $\ln$ " متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$. إذن حسب المبرهنة الخاصة باتجاه تغير دالة مركبة يكون للدالتين u و $\ln \circ u$ نفس اتجاه التغيرات على المجال I.

مثال: نعتبر الدالة f المعرفة على $]1;+\infty[$ بـِ $f(x)=\ln\left(\dfrac{3}{x-1}\right)$.

نلاحظ أن $f=\ln\circ u$ حيث u هي الدالة المعرفة على $]1;+\infty[$ بـِ $u(x)=\dfrac{3}{x-1}$. بما ان الدالة u متناقصة تماما على المجال $]1;+\infty[$ فإن الدالة f متناقصة تماما على المجال $]1;+\infty[$.

3 المشتقة ودوال اصلية

خاصية02 , إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق و موجبة تماما على مجال I فإن:

الدالة $\ln\circ u$ قابلة للاشتقاق على I و لدينا من أجل كل x من I، $(\ln\circ u)'(x)=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$

الدالة $x\mapsto \ln[u(x)]$ دالة أصلية للدالة $x\mapsto u'(x)/u(x)$ على I.

البرهان:

يكفي تطبيق المبرهنة المتعلقة بمشتقة دالة مركبة.

يكفي حساب مشتقة الدالة $x\mapsto \ln[u(x)]$.

التعليمات والتوجيهات:

- $x\mapsto e^{-\lambda x^2}$ حيث $(\lambda>0)$
- $x\mapsto a^x$ حيث $(a>0)$ أو $x\mapsto x^a$ (حيث: $x>0$ و $a\in\mathbb{Q}$) بالنسبة لأي شعبة؟
- نقبل العلاقة: $a^b=e^{b\ln a}$ من أجل كل عددين حقيقيين a و b حيث $a>0$ و b كيفي.
- نجعل التلميذ يلاحظ، انطلاقا من التمثيلات البيانية للدوال $x\mapsto \ln x$، $x\mapsto e^x$، $x\mapsto x^n$ حيث n عدد طبيعي غير منعدم، أنّ هذه الدوال تؤول كلّها نحو $+\infty$ عندما $x\to+\infty$، لكن سلوكها مختلف ومن ثمّ استنتاج التزايد المقارن لها: في اللانهاية، تتفوق الدالة الأسية على الدالة " قوة " والدالة " قوة " على الدالة اللوغاريتم. في هذا المجال يمكن استعمال الحاسبة البيانية أو المجدول لتجسيد هذه السلوكات

مثال: مشتقة الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بِ $f(x)=\ln(x^2+x+1)$ هي $f'(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$

الدالة F حيث $F(x)=\ln(2x+1)$ هي دالة أصلية للدالة f حيث $f(x)=\dfrac{2}{2x+1}$ على $\left]-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$.

تمرين محلول1: نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ بِ

$$f(x)=\ln(x^2+1)-\ln(x^2-1)$$

أدرس نهايتي الدالة f عند 1 و عند $+\infty$.

الحل:

- لدينا من جهة: $\lim\limits_{x\to1}(x^2+1)=2$ و بما أن $\lim\limits_{X\to2}\ln X=\ln 2$ فإن

$$\lim_{x\to1}\ln(x^2+1)=\ln 2$$

و لدينا من جهة ثانية: $\lim\limits_{x\to1}(x^2-1)=0$ و بما أن $\lim\limits_{X\to0}\ln X=-\infty$ فإن

$$\lim_{x\to1}\ln(x^2-1)=-\infty$$

نستنتج مما سبق أن $\lim\limits_{x\to1}\left[\ln(x^2+1)-\ln(x^2-1)\right]=+\infty$ أي $\lim\limits_{x\to1}f(x)=+\infty$.

- $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+1)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-1)=+\infty$. لدينا إذن حالة عدم التعيين.

من أجل كل x من $]1;+\infty[$ ، $f(x)=\ln\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)$. بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)=1$ و علما أن

$$\lim_{X\to1}\ln X=0$$

نستنتج أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)=0$ أي $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

تمرين محلول2: نعتبر الدالة f المعرفة على $\left]\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ بِ $f(x)=x+3\ln(2x-1)$

1. أحسب $f'(x)$.
2. عين معادلة لِ (Δ) مماس المنحنى (C) الممثل للدالة f عند النقطة التي فاصلتها 1.

الحل:

1. من أجل كل x من $\left]\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ ، $f'(x)=1+3\times\dfrac{2}{2x-1}=\dfrac{2x+5}{2x-1}$.
2. لدينا: $f(1)=1$ و $f'(1)=7$. لدينا $(\Delta):y=f'(1)(x-1)+f(1)$ و منه $(\Delta):y=7x-6$.

تمرين محلول3: نعتبر الدالة f المعرفة على $]1;+\infty[$ بِ $f(x)=\dfrac{5x-1}{x^2-1}$

1. تحقق أنه من أجل كل x من $]1;+\infty[$ ، $f(x)=\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{3}{x+1}$.
2. عين دالة أصلية للدالة f على $]1;+\infty[$.

الحل:

1. من أجل كل x من $]1;+\infty[$.

$$f(x)=\frac{5x-1}{x^2-1}=\frac{2(x+1)+3(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{2}{x-1}+\frac{3}{x+1}.$$

	2. بوضع $u(x)=x-1$ و $v(x)=x+1$ يكون $u'(x)=1$ و $v'(x)=1$ و بالتالي يكون لدينا: $f(x)=2\times\frac{u'(x)}{u(x)}+3\times\frac{v'(x)}{v(x)}$ و بما أن من أجل كل x من $]1;+\infty[$ ، $u(x)>0$ و $v(x)>0$ فإن دالة أصلية للدالة f على $]1;+\infty[$ هي الدالة F حيث $F(x)=2\ln[u(x)]+3\ln[v(x)]$ نجد هكذا $F(x)=2\ln(x-1)+3\ln(x+1)$	

ملخص الدالة اللوغاريتمية النيبرية $\ln(x)$:

1/ تعريف : الدالة اللوغاريتمية النيبرية هي الدالة "$\ln$" والمعرفة على $]0;+\infty[$ و التي ترفق بكل عدد x العدد $\ln(x)$

2/ خواص أولى : (1 $D=]0;+\infty[$ (2 $\ln(1)=0$

$$(x;y)\in\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2 \begin{cases} x=y \Leftrightarrow \ln(x)=\ln(y) \\ x\prec y \Leftrightarrow \ln(x)\prec\ln(y) \\ x\succ y \Leftrightarrow \ln(x)\succ\ln(y) \\ x=1 \Leftrightarrow \ln(x)=0 \\ x\prec 1 \Leftrightarrow \ln(x)\prec 0 \\ x\succ 1 \Leftrightarrow \ln(x)\succ 0 \end{cases}$$

$\ln(e)=1$

3/ خواصها الأساسية : $(x;y)\in\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ و $(n\in\mathbb{R})$

$$\ln(ab)=\ln(a)\ln(b);\ \ln\left(\frac{1}{a}\right)=-\ln(a)$$

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln(a)-\ln(b);\ \ln\left(a^n\right)=n\ln(a)$$

4/ النهايات الشهيرة :

$\lim\limits_{x\to0}\ln(x)=-\infty$ ؛ $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$ ؛ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0$

$\lim\limits_{x\to0}x\ln(x)=0$

$\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(x+1)}{x}=1$ ؛ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x^n}=0$ ؛ $\lim\limits_{x\to0}x^n\ln(x)=0$

$\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(ax+1)}{x}=a$ ، $\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln(x)}{x-1}=1$

5/ مشتقة الدالة : $x\mapsto\ln(u(x))$ هي الدالة $x\mapsto\frac{u'(x)}{u(x)}$

مشتقة الدالة $x\mapsto\ln|u(x)|$ هي الدالة $x\mapsto\frac{u'(x)}{u(x)}$

استنتاج : أصلية كل دالة من الشكل: $x\mapsto\frac{u'(x)}{u(x)}$

هي الدالة : $x\mapsto\ln\left(|u(x)|\right)+k$

حيث : $u(x)\neq0$ و $k\in\mathbb{R}$.

ملخص الدالة الأسية النيبرية e^x:

1/ تعريف : الدالة الاسية النيبرية هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$

حيث : $f'(x)=f(x)$ و $f(0)=1$.

نرمزلها بـ $x\to e^x$ نسمي الدالة الأسية ذات الأساس e)

حيث: $e\approx2.718$)

2/ خواصها الأولى : $D_F=\mathbb{R}$

$e^x\succ0$: مناجل كل $x\in\mathbb{R}$

$y=e^x$ تكافئ $x=\ln(y)$

$x=e^{\ln(x)}$: من أجل كل $x\in\mathbb{R}_+^*$

$x=\ln(e^x)$: من أجل كل عدد حقيقي x

x,y عددان من $\mathbb{R}$: $x=y$ تعني $e^x=e^y$

: $x\prec y$ تعني $e^x\prec e^y$

: $x\succ y$ تعني $e^x\succ e^y$

: $x=0$ تعني $e^x=1$

: $x\prec0$ تعني $e^x\prec1$

: $x\succ1$ تعني $e^x\succ1$

3/ خواصها الأساسية : x,y عددان

$$e^xe^y=e^{x+y}\ ;\ \frac{e^x}{e^y}=e^{x-y}$$

$$e^{-x}=\frac{1}{e^x}\ ;\ \left(e^x\right)^n=e^{n.x}\ (n\in\mathbb{Q})$$

$$a\in\mathbb{R}_+^*\ ;\ a^n=e^{n\ln(x)}$$

4/ النهايات الشهيرة : $n\in\mathbb{N}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$ ؛ $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$ ؛ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty}xe^x=0$ ؛ $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$ ؛ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^n}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty}x^ne^x=0$ ، $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{ax}-1}{x}=a\ (a\in\mathbb{R})$.

5/ الدالة المشتقة لـ : $x\mapsto e^{u(x)}$ هي الدالة

$x\mapsto u'(x)e^{u(x)}$

استنتاج : الأصلية دالة من الشكل $x\mapsto u'(x)e^{u(x)}$

هي الدالة : $x\mapsto e^{u(x)}+k$ حيث $k\in\mathbb{R}$

الدوال العددية في البكالوريات الجزائرية شعبة العلوم التجريبية

التمرين الأول : Bac 2008 / الموضوع الأول

التمرين الرابع (7.5 نقاط)

I- نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]-2;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=(ax+b)e^{-x}+1$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ وحدة الطول $1\,cm$.

عين قيمتي a و b بحيث تكون النقطة $A(-1;1)$ تنتمي إلى (C_f) و معامل توجيه المماس عند A يساوي $(-e)$.

II- نعتبر الدالة العددية g للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]-2;+\infty[$ كما يلي : $g(x)=(-x-1)e^{-x}+1$.

(C_g) تمثيلها البياني في نفس المعلم .

أ) بين أن $\lim_{x\to+\infty} g(x)=1$ و فسر النتيجة بيانيا (نذكر أن $\lim_{u\to-\infty} ue^{u}=0$).

ب) ادرس تغيرات الدالة g ثم أنشئ جدول تغيراتها .

ج)بين أن المنحنى (C_g) يقبل نقطة انعطاف I يطلب تعيين احداثييها .

د) اكتب معادلة المماس للمنحنى (C_g) عند النقطة I .

هـ) ارسم (C_g) .

و) H الدالة العددية المعرفة على المجال $]-2;+\infty[$ كما يلي : $H(x)=(\alpha x+\beta)e^{-x}$ حيث α و β عددان حقيقيان

- عين α و β بحيث تكون H دالة أصلية للدالة : $x\mapsto g(x)-1$.
- استنتج الدالة الأصلية للدالة g و التي تنعدم عند القيمة 0 .

III- لتكن k الدالة المعرفة على المجال $]-2;+\infty[$ كما يأتي : $k(x)=g(x^2)$

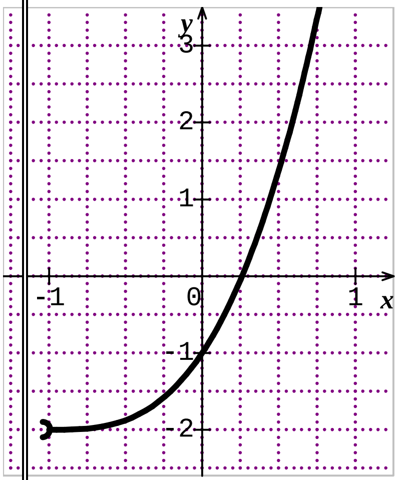
باستعمال مشتقة دالة مركبة ، عين اتجاه تغير الدالة k ثم شكل جدول تغيراتها .

التمرين الثاني: Bac2008/ الموضوع الثاني

التمرين الرابع: (7 نقاط)

المنحنى (C_g) المقابل هوالتمثيل البياني للدالة العددية g المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ كما يلي : $g(x)=x^3+3x^2+3x-1$

1. أ) بقراءة بيانية أعطي تخمينا لجدول تغيرات الدالة g .



ب) عين $g(0)$ و إشارة $g(0.5)$.

ج) علل وجود عدد حقيقي وحيد α من المجال $]0;0.5[$ حل للمعادلة $g(x)=0$

د) إذا علمت أن g متزايدة تماما على مجال $]-1;+\infty[$ إستنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]-1;+\infty[$.

2. f هي الدالة العددية المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بما يلي : $f(x)=\frac{x^3+3x^2+3x+2}{(x+1)^2}$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد $(O;\vec{i};\vec{j})$.

أ) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-1;+\infty[$:
$$f'(x)=\frac{g(x)}{(x+1)^3}$$

ب) عين دون حساب $\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$ و فسر النتيجة بيانيا

ج) أحسب $\lim_{x\to-1} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]$ و فسر النتيجتين هندسيا .

د) شكل جدول تغيرات الدالة f .

3) نأخذ $\alpha\simeq 0.26$

أ) عين مدور $f(\alpha)$ إلى 10^{-2} .

ب) أرسم المنحني (C_f) .

4) أ) أكتب f(x) على الشكل : $\boldsymbol{f(x)=x+a+\frac{b}{(x+1)^2}}$

حيث a و b عددان حقيقيان .

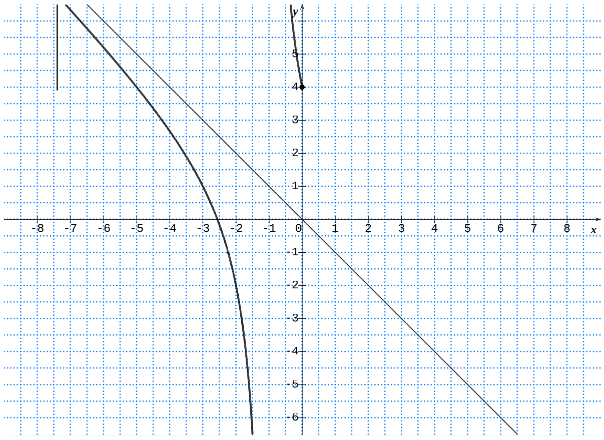
ب) عين F الدالة الأصلية للدالة f على المجال $]-1;+\infty[$ و التي تحقق : $F(1)=2$.

التمرين الثالث : Bac 2009/ الموضوع الأول

التمرين الرابع: (7.5 نقاط)

I) f دالة عددية معرّفة على $I=]-\infty;-1[\cup]-1;0]$ بـــ :
$$f(x)=-x+\frac{4}{x+1}$$

(C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس كما هو مبين الشكل .



1) أ) أحسب نهايات f عند الحدود المفتوحة لـــ I . (3×0.25)

ب) بقراءة بيانية و دون دراسة اتجاه تغيرات f شكل جدول تغيراتها.

2) g دالة معرّفة على المجال $[0;+\infty[$ كما يلي :

$$g(x)=x+\frac{4}{x+1}$$

(C_g) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس

أ) احسب نهاية g عند $+\infty$.

ب) تحقق من أن (C_g) يقبل مستقيما مقاربا مائلاً عند $+\infty$ يطلب تعيين معادلة له .

جـ) أدرس تغيرات g .

II) k دالة معرّفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ كما يلي :

$$k(x)=|x|+\frac{4}{x+1}$$

1) أ) أحسب $\lim_{h\xrightarrow{>}0}\frac{k(h)-k(0)}{h}$ و ماذا تستنتج ؟

ب) أعط تفسيرا هندسيا لهذه النتيجة .

2) أكتب معادلتي المماسين (Δ_1) و (Δ_2) عند النقطة التي فاصلتها $x_0=0$

3) أرسم (Δ_1) ، (Δ_2) و (C_k) التمثيل البياني للدالة k .

أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحى (C_k) و المستقيمات التي معادلاتها : $y=0$ ، $x=\frac{1}{2}$ و $x=-\frac{1}{2}$

التمرين الرابع: Bac 2009/ الموضوع الثاني

التمرين الرابع: (7 نقاط)

الجزء الأول : h دالة عددية معرفة على $]-1;+\infty[$ كما يلي :

$$h(x)=x^2+2x+\ln(x+1) .$$

1) أحسب $\lim_{x\to+\infty}h(x)$ و $\lim_{x\xrightarrow{>}-1}h(x)$.

2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1;+\infty[$:

$$h'(x)=\frac{1+2(x+1)^2}{x+1}$$

و استنتج اتجاه تغير الدالة h ثم انجز جدول تغيراتها .

3) أحسب $h(0)$ و استنتج إشارة $h(x)$ حسب قيم x .

الجزء الثاني : لتكن f دالة عددية معرفة على $]-1;+\infty[$ كما يلي :

$f(x)=x-1-\frac{\ln(x+1)}{x+1}$ و نسمي (C_f) منحنيها البياني في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) أ) أحسب $\lim_{x\xrightarrow{>}-1}f(x)$ ثم فسر هذه النتيجة بيانيا .

ب) باستخدام النتيجة $\lim_{t\to+\infty}\frac{e^t}{t}=+\infty$ برهن أن $\lim_{u\to+\infty}\frac{\ln u}{u}=0$.

جـ) استنتج $\lim_{x\to+\infty}f(x)$.

د) أحسب $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x-1)]$ و استنتج وجود مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

هـ) أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم المقارب المائل .

2) بين أنه من أجل (0.25) عدد حقيقي x من المجال $]-1;+\infty[$:

$f'(x)=\frac{h(x)}{(x+1)^2}$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

(0.25)

3) بين أن المنحنى (C_f) يقطع المستقيم ذو المعادلة $y=2$ عند نفطة فاصلتها محصورة بين 3.3 و 3.4

4) أرسم (C_f) .

5) أحسب مساحة الحيز المحدود بالمنحى (C_f) و المستقيمات التي معادلاتها $y=x-1$ ؛ $x=0$ و $x=1$.

التمرين الخامس : Bac 2010/ الموضوع الأول

التمرين الثالث: (10 نقاط)

I) ليكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $I=]0.5;+\infty[$ بـــ :

$$f(x)=1+\ln(2x-1)$$

و ليكن $(\mathcal{C}_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس .

1) احسب $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim_{x\xrightarrow{>}0.5}f(x)$.

2) بيّن أن الدالة f متزايدة تماما على المجـــال I ثــم شــكل جــدول تغيراتها .

3) عيّن فاصلة النقطة من $(\mathcal{C}_f)$ التي تكون فيهـــا المماــس موازيـــا للمستقيم (d) ذي المعادلة $y=x$.

4) أ) أثبت أنه من أجل كل x من I يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل : $f(x)=\ln(x+a)+b$ حيث a ، b عددان حقيقيان يطلب تعيينهما .

ب) استنتج أنه يمكن رسم $(\mathcal{C}_f)$ انطلاقا من $(\mathcal{C})$ منحنى الدالة اللوغاريتمية النيبيرية $\ln$ ثم ارسم $(\mathcal{C})$ و $(\mathcal{C}_f)$.

II) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال I بـ : $g(x)=f(x)-x$

1) احسب $\lim_{x \xrightarrow{>} 0.5} g(x)$ ثم بيّن أن $\lim_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$

2) ادرس اتجاه تغير الدالة g على I ثم شكل جدول تغيراتها .

3) أ) احسب $g(1)$ ثم بيّن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل في المجال $]1.5;+\infty[$ حلا وحيدا α تحقق أن $2<\alpha<3$.

ب) ارسم $(\mathcal{C}_g)$ منحنى الدالة g على المجال $]0.5;5[$ في المعلم السابق .

4) استنتج إشارة $g(x)$ على المجال I ثم حدّد وضعية المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ بالنسبة إلى (d) .

5) برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي من المجال $]1;\alpha[$ فإن : $f(x)$ ينتمي إلى المجال $]1;\alpha[$.

III) نسمي (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يأتي : $u_n=f\left(1+\frac{1}{2n}\right)$.

1) عيّن قيمة العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون : $u_n=1+2\ln3-3\ln2$.

2) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n=u_1+u_2+...+u_n$.

التمرين السادس : Bac 2010/ الموضوع الثاني

التمرين الرابع:(7 نقاط) :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي :

$$f(x)=x-\frac{1}{e^x-1}$$

نرمز بـ (C_f) لتمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) أ) أحسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

ب) أحسب $\lim_{x\xrightarrow{>}0} f(x)$ و $\lim_{x\xrightarrow{<}0} f(x)$ و فسر هندسيا النتيجة .

2) أدرس إتجاه تغير الدالة f على كل مجال من مجالي تعريفها ثم شكل جدول تغيراتها .

3) أ) بين أن المنحني (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين مائلين (Δ) و (Δ') معادلتهما على الترتيب : $y=x$ و $y=x+1$.

ب)أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى كل من (Δ) و (Δ') .

4) أثبت أن النقطة $\omega(0;0.5)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f)

5) أ) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين α و β حيث : $\ln2<\alpha<1$ و $-1.4<\beta<-1.3$.

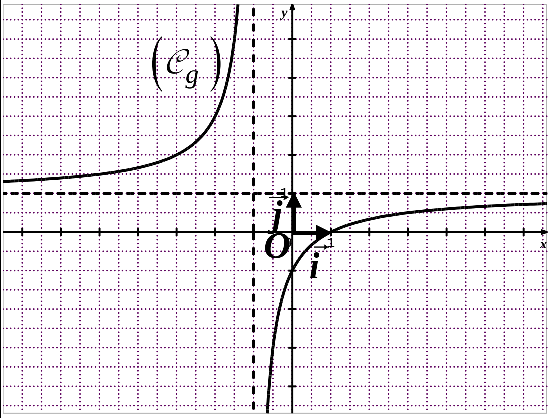
ب) هل توجد مماسات لـ (C_f) توازي المستقيم (Δ)؟

ج) أرسم (Δ) ، (Δ') ثم المنحنى (C_f) .

د) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط m عدد و إشارة حلول المعادلة : $(m-1)e^{-x}=m$

التمرين السابع: Bac 2011/ الموضوع الأول

التمرين الرابع:(7 نقاط) :



I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ : $g(x)=\frac{x-1}{x+1}$ و $(\mathcal{C}_g)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ (الشكل المقابل) ،

بقراءة بيانية :

أ ــ شكل جدول تغيرات الدالة g .

ب ــ حل بيانيا ، المتراجحة $g(x)>0$.

جـ ــ عيّن بيانيا قيم x التي يكون من أجلها $0<g(x)<1$

II) لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ بـ :

$$f(x)=\frac{x-1}{x+1}+\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

و $(\mathcal{C}_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس.

1. احسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ ثمّ فسّر النتيجتين هندسيا.

2. أ ــ بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1;+\infty[$ ، $g'(x)=\dfrac{2}{(x+1)^2}$.

ب ــ احسب $f'(x)$ وادرس إشارتها ثمّ شكل جدول تغيرات الدالة f.

3. أ ــ باستعمال الجزء **I)** السؤال جــ ، عيّن إشارة العبارة $\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$ على المجال $]1;+\infty[$.

ب ــ α عدد حقيقي . بيّن أنّ الدالة $x \mapsto (x-\alpha)\ln(x-\alpha)-x$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto \ln(x-\alpha)$ على المجال $]\alpha;+\infty[$.

جــ ــ تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1;+\infty[$ ، $g(x)=1-\dfrac{2}{x+1}$ ثم عيّن دالة أصلية للدالة f على المجال $]1;+\infty[$.

التمرين الثامن : Bac 2011/ الموضوع الثاني:

التمرين الرابع:(7 نقاط) :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بــ : $f(x)=e^x-ex-1$.

$(\mathcal{C}_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. أ ــ احسب $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

ب ــ احسب $f'(x)$ ثمّ ادرس إشارتها.

جــ ــ شكّل جدول تغيرات الدالة f.

2. أ ــ بيّن أن المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=-ex-1$ مقارب مائل للمنحني $(\mathcal{C}_f)$ بجوار $(-\infty)$.

ب ــ اكتب معادلة للمستقيم (T) مماس للمنحني $(\mathcal{C}_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة 0.

جــ ــ بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$، تقبل في المجال $]1,75;1,76[$ حلا وحيدا α.

د ــ ارسم المستقيمين (Δ) و (T) ثم المنحني $(\mathcal{C}_f)$ على المجال $]-\infty;2]$.

3. أ ــ احسب بدلالة α ، المساحة $A(\alpha)$ للحيّز المستوي المحدّد بالمنحني $(\mathcal{C}_f)$ ، حامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتيهما: $x=0$ ؛ $x=\alpha$.

ب ــ أثبت أنّ : $A(\alpha)=\left(\dfrac{1}{2}e\alpha^2-e\alpha+\alpha\right)ua$

(ua هي وحدة المساحات)

التمرين التاسع: Bac 2012/ الموضوع الأول

التمرين الرابع:(7 نقاط) :

لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]-\infty;0[$ كما يلي : $f(x)=x+5+6\ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$ $(\mathcal{C}_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ – احسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} f(x)$ ثمّ فسّر النتيجة هندسيا .

ب – احسب $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

2) بيّن أنــه مــن أجــل كــل عــدد حقيقــي x مــن $]-\infty;0[$ ، $f'(x)=\dfrac{x^2-x-6}{x(x-1)}$.

استنتج اتجاه تغيّر الدالة f ، ثم شكّل جدول تغيّراتها .

3) أ – بيّن المستقيم (Δ) الذي معادلة له : $y=x+5$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ بجوار $-\infty$.

ب – ادرس وضع المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ و المستقيم (Δ) .

4) بين أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلّين α و β حيث $-3.5<\alpha<-3.4$ و $-1.1<\beta<-1$.

5) أنشئ المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ و المستقيم (Δ) .

6) أ – نعتبر النقطتين $A\left(-1;3+6\ln\left(\dfrac{3}{4}\right)\right)$ و $B\left(-2;\dfrac{5}{2}+6\ln\left(\dfrac{3}{4}\right)\right)$.

بيّن أن $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{7}{2}+6\ln\dfrac{3}{4}$ معادلة ديكارتية للمستقيم (AB)

ب – بيّن أنّ المستقيم (AB) يمس المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ في نقطة M_0 يطلب تعيين إحداثيتيها .

7) لتكن g الدالة المعرّفة على $]-\infty;0[$ كما يلي :

$$g(x)=\frac{x^2}{2}+5x+6x\ln\left(\frac{x}{x-1}\right).$$

بين أنّ g دالة أصلية للدالة f على المجال $]-\infty;0[$.

التمرين العاشر: Bac 2012/ الموضوع الثاني

التمرين الرابع:(7 نقاط) :

I) لتكن g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$g(x)=1-xe^{x}.$$

1) احسب $\lim_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x)$.

2) ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكّل جدول تغيراتها .

3) أ ــ بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ ، تقبل في حلا وحيدا α على المجال $]-1;+\infty[$

ب ــ تحقق أنّ $0.5<\alpha<0.6$ ثم استنتج إشارة $g(x)$.

II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]-\infty;2[$ كما يلي : $f(x)=(x-1)e^{x}-x-1$. $(\mathcal{C}_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$..

1) احسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

2) لتكن f' مشتقة الدالة f . بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;2[$ فإن : $f'(x)=-g(x)$ ، استنتج إشارتها. $f'(x)$ على المجال $]-\infty;2[$ ، ثم شكّل جدول تغيرات الدالة f.

3) بينّ أنّ $f(\alpha)=-\left(\frac{\alpha^2+1}{\alpha}\right)$ ، ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$ (تدوير النتائج إلى 10^{-2})

4) أ ــ بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=-x-1$ هو مقارب مائل للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ بجوار $-\infty$

ب ــ أدرس وضعية $(\mathcal{C}_f)$ بالنسبة إلى (Δ) .

5) أ ــ بينّ أنّ $f(x)=0$ تقبل حلين x_1 و x_2 حيث $-1.6<x_1<-1.5$ و $1.5<x_2<1.6$.

ب ــ أنشئ (Δ) و $(\mathcal{C}_f)$.

6) لتكن h الدالة المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ كما يلي :

$$h(x)=(ax+b)e^{x}$$

أ ــ عين العددين الحقيقيين a و b بحيث تكون h دالة أصلية للدالة $x\mapsto xe^{x}$ على $\mathbb{R}$.

ب ــ استنتج دالة أصلية للدالة g على $\mathbb{R}$.

التمرين الحادي عشر: Bac 2013/ الموضوع الأول

التمرين الرابع:(6.5 نقاط) :

I) f الدالة المعرّفة على $]-\infty;1[$ بـِ: $f(x)=\frac{x}{x-1}+e^{\frac{1}{x-1}}$ ، و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

x	$f(x)$
0,20	0,037
0,21	0,016
0,22	0,005-
0,23	0,026-
0,24	0,048-
0,25	0,070-

1) احسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\xrightarrow{<}1} f(x)$ ، ثمّ استنتج المستقيمين المقاربين للمنحني (C).

2) احسب $f'(x)$. بيّن أنّ الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;1[$ ، ثمّ شكّل جدول تغيراتها.

3) بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل في $]-\infty;1[$ حلا وحيدا α. باستعمال جدول القيم أعلاه جد حصرا للعدد α .

4) ارسم المستقيمين المقاربين والمنحنى (C)، ثمّ ارسم المنحني (C') الممثل للدالة $|f|$.

5) عيّن بيانيا مجموعة قيم الأعداد الحقيقية m التي من أجلها يكون للمعادلة $|f(x)|=m$ حلان مختلفان في الإشارة.

II) g الدالة المعرّفة على $]-\infty;1[$ بـِ:

$$g(x)=f(2x-1)$$

(عبارة $g(x)$ غير مطلوبة).

1) ادرس تغيّرات الدالة g على $]-\infty;1[$ ، ثمّ شكّل جدول تغيراتها.

2) أ) تحقق أنّ $g\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)=0$ ، ثمّ بيّن أنّ :

$$g'\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)=2f'(\alpha).$$

ب) استنتج معادلة (T) المماس لمنحنى الدالة g في النقطة ذات الفاصلة $\frac{\alpha+1}{2}$.

ج) تحقق من أنّ : $y=\frac{2}{(\alpha-1)^3}x-\frac{\alpha+1}{(\alpha-1)^3}$ ، معادلة للمستقيم (T).

التمرين الثاني عشر: Bac 2013/ الموضوع الثاني

التمرين الرابع:(7 نقاط) :

I) g الدالة المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـِ:

$g(x) = x^2 + 2x + 4 - 2\ln(x+1)$.

1) ادرس تغيرات الدالة g ، ثمّ شكّل جدول تغيراتها.

2) استنتج أنّه من أجل كل x من المجال $]-1;+\infty[$ ،

$g(x) > 0$.

II) f الدالة المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـِ:

$$f(x) = x - \frac{1-2\ln(x+1)}{x+1} .$$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. (وحدة الطول $2cm$)

1) أ ــ احسب $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} -1} f(x)$. فسّر النتيجة بيانيا.

ب ــ احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) أ) بيّن أنّه من أجل كل x من $]-1;+\infty[$ ،

$$f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$$

ب) ادرس اتجاه تغيّر الدالة f على المجال $]-1;+\infty[$ ، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

جـ) بيّن أنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبلا حلا وحيدا α في المجال $]-1;+\infty[$ ،

ثمّ تحقق أنّ $0 < \alpha < 0,5$.

3) أ) بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

ب) ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ).

4) نقبل أنّ المستقيم (T) ذا المعادلة $y = x + \frac{2}{\sqrt{e^3}}$ ، مماس للمنحنى (C_f) في نقطة فاصلتها x_0 .

ب) ارسم المستقيمين المقاربين والمماس (T) ثمّ المنحنى (C_f).

ج) عيّن بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m بحيث تقبل المعادلة $f(x) = x + m$ حلّين متمايزين.

التمرين الثالث عشر: Bac 2014/ الموضوع الأول

التمرين الرابع:(7 نقاط) :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x) = 1 + \frac{2\ln x}{x}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) أ) أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، فسر النتيجتين هندسيا.

ب) أدرس إتجاه تغير الدالة f على المجال $]0;+\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها.

2) أ) أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) الذي معادلته: $y = 1$.

ب) أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 1.

ج) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل في المجال $]0;1[$ حلا وحيدا α ، حيث $e^{-0,4} < \alpha < e^{-0,3}$.

3) أنشئ (T) و (C_f) .

4) لتكن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R} - \{0\}$ كما يلي:

$$h(x) = 1 + \frac{2\ln|x|}{|x|} .$$

و ليكن (C_h) تمثيلها البياني في نفس المعلم السابق.

أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم، $h(x) - h(-x) = 0$ ، ماذا تستنتج؟

ب) أنشئ المنحنى (C_h) اعتمادا على المنحنى (C_f) .

ت) ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة: $\ln x^2 = (m-1)|x|$.

التمرين الرابع عشر: Bac 2014/ الموضوع الثاني

التمرين الرابع:(7 نقاط) :

I– لتكن g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$g(x) = 2x^3 - 4x^2 + 7x - 4 .$$

1) أ) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$. أحسب x_0.

ب) أدرس اتجاه تغير الدالة g على $\mathbb{R}$ ثم شكل جدول تغيراتها.

2) أ) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0,7 < \alpha < 0,8$.

ب) استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$.

II–نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x + 1}{2x^2 - 2x + 1}$$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

2) أ) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$f(x)=\frac{1}{2}(x+1)+\frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$$

ب) استنتج أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يطلب تعيين معادلة له.

ج) أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و (Δ).

3) أ) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=\dfrac{x.g(x)}{\left(2x^2-2x+1\right)^2}$

حيث f' مشتقة الدالة f.

ب) استنتج إشارة $f'(x)$ حسب قيم x ثم شكل جدول تغيرات الدالة f. (نأخذ $f(\alpha)\approx-0{,}1$)

4) أحسب $f(1)$ ثم حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x)=0$.

5) أنشئ المستقيم (Δ) و المنحنى (C_f).

6) لتكن h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$h(x)=\frac{x^3-4x^2+2x-1}{2x^2-2x+1}.$$

و (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

أ) تحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $h(x)=f(x)-2$.

ب) استنتج أنّ (C_h) هو صورة (C_f) بتحويل نقطي بسيط يطلب تعيينه، ثم أنشئ (C_h).

التمرين الخامس عشر: Bac 2015/ الموضوع الأول

التمرين الرابع:(7 نقاط) :

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

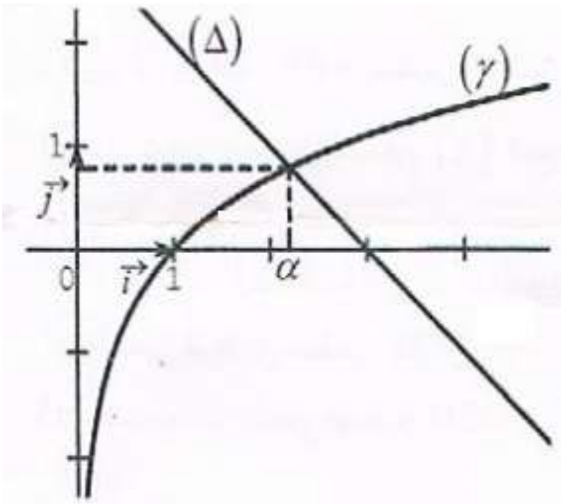
I. (γ) التمثيل البياني للدالة $x\mapsto \ln x$ و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y=-x+3$ ؛ α هي فاصلة نقطة تقاطع (γ) و (Δ).

1) بقراءة بيانية حدد وضعية (γ) بالنسبة إلى (Δ) على $]0;+\infty[$.

2) g الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ ب: $g(x)=x-3+\ln x$.

استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$.

3) تحقق أن: $2{,}2<\alpha<2{,}3$.



II. f الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ ب:

$f(x)=\left(1-\dfrac{1}{x}\right)(\ln x-2)$ و (C_f) تمثيلها البياني.

1) أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) أثبت أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$ ؛ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f.

3) بيّن أنّ: $f(\alpha)=\dfrac{-(\alpha-1)^2}{\alpha}$ ؛ ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

4) أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى حامل محور الفواصل؛ ثم أنشئ (C_f) على المجال $\left]0;e^2\right]$.

III. F الدالة الأصلية للدالة f على المجال $]0;+\infty[$ و التي تحقق: $F(1)=-3$.

1) بيّن أنّ منحنى الدالة F يقبل مماسين موازيين لحامل محور الفواصل في نقطتين يطلب تعيين فاصلتيهما.

2) بيّن أنّ $x\mapsto x\ln x-x$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto \ln x$ على $]0;+\infty[$ ؛ ثم استنتج عبارة الدالة F.

التمرين السادس عشر: Bac 2015/ الموضوع الثاني

التمرين الرابع:(7 نقاط) :

A. g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ ب: $g(x)=1-2x-e^{2x-2}$.

1) أدرس اتجاه تغير الدالة g على $\mathbb{R}$.

2) بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$، ثمّ تحقّق أنّ: $0,36<\alpha<0,37$.

3) استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

B. f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ ب:

$f(x)=xe^{2x+2}-x+1$.

و تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) أ) بيّن أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=e^{2x+2}g(-x)$.

ب) استنتج أنّ الدالة f متناقصة تماما على $]-\infty;-\alpha[$ و متزايدة تماما على $]-\alpha;+\infty[$.

2) أحسب نهاية f عند $+\infty$ و عند $-\infty$، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f.

3) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)+x-1\right]$ ثمّ فسّر النتيجة هندسيا.

4) أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=-x+1$.

5) أنشئ (Δ) و (C_f) على المجال $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right]$، نأخذ $f(-\alpha)\simeq 0,1$.

6) أ) تحقق أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$2f(x)+f'(x)-f''(x)=1-2x-3e^{2x2}$.

ب) استنتج دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

Classe 3AS **الـــدوال الأسيـــــة** الأستاذ: Moula

التمرين الأول:

I. نعتبر الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]-1\,,+\infty[$ كما يلي:

$f(x) = (ax + b)e^{-x} + 1$ حيث a و b عددان حقيقيان.

(C_f) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(0,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ (وحدة الطول 1cm).

• عين قيمتي a و b بحيث تكون النقطة $A(-1,-2)$ تنتمي إلى (C_f) ومعامل توجيه المماس عند A يساوي e

II. نعتبر الدالة العددية g للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]-1\,,+\infty[$ كما يلي: $g(x) = (x+1)e^{-x} - 2$

و (C_g) تمثيلها البياني في نفس المعلم السابق.

1) بين أن $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -2$ وفسر هذه النتيجة بيانيا (نذكر أن: $\lim_{u\to-\infty} Ue^{u} = 0$) .

2) أدرس تغيرات الدالة g، ثم أنشئ جدول تغيراتها.

3) بين أن المنحنى (C_g) يقبل نقطة انعطاف I، يطلب تعيين إحداثييها.

4) أكتب معادلة المماس للمنحنى (C_g) عند النقطة I. 5) أرسم (C_g).

III. لتكن K الدالة المعرفة على المجال $]-1\,,+\infty[$ كما يلي: $K(g) = g(x^2)$.

• عين اتجاه تغير الدالة K. • شكل جدول تغيراتها

التمرين الثاني:

المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(0,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

I. نعتبر العددية g للمتغير الحقيقي x حيث: $g(x) = e^{x} - x + 2$.

1) أدرس تغيرات الدالة g. 2) بين أن مهما يكن x من R: $g(x) \geq 3$

II. لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x حيث: $f(x) = e^{-x}(x-1) + x + 1$

ليكن (C_f) المنحنى الممثل لها في المعلم $(0,\vec{\imath},\vec{\jmath})$

1) أ. بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على R وأن مهما يكن x من R: $f'(x) = e^{-x}g(x)$

ب. أدرس تغيرات الدالة f. ج. بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا.

د. أثبت أن المنحنى (C_f) مستقيما مقاربا (Δ) يطلب تعيين معادلته.

هـــ. أدرس الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ).

و. برهن أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين إحداثييها، ثم ارسم (C_f) و (Δ).

III. ليكن $(\Delta\alpha)$ مستقيما معادلته: $y = x + \alpha\ ,\ \alpha \in R$.

1) عين α حتى يكون $(\Delta\alpha)$ مماسا للمنحنى (C_f) في نقطة يطلب تعيين إحداثييها.

2) ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي α، عدد حلول المعادلة ذات المجهول x، $(\alpha - 1)e^{x} - x + 1 = 0$.

التمرين الثالث:

f الدالة المعرفة على R كما يلي: $f(x) = x + \ln 4 + \frac{2}{e^x+1}$

(C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(0, \vec{i}, \vec{j})$.

1) أدرس تغيرات الدالة f. 2) من أجل كل عدد حقيقي x أحسب $f(x)+f(-x)$. فسر بيانيا النتيجة.

3) برهن أن من أجل كل عدد حقيقي m فإن المعادلة $f(x) = m$ تقبل حلا وحيدا.

• تحقق أن a حل للمعادلة $f(x) = 3$ حيث $1,1 < a < 1,2$. • عين قيمة m حتى تكون $-a$ حلا للمعادلة $f(x) = m$.

4) أ. بين أن من أجل كل x من R فإن: $f(x) = x + 2 + \ln 4 - \frac{2e^x}{e^x+1}$

ب. بين أن (C) يقبل مستقيمين مقاربين مائلين (Δ) ، (Δ') يطلب تعيين معادلتيهما ثم ادرس وضعية (C) بالنسبة إلى (Δ) المستقيم المقارب المائل للمنحنى (C) عند $(+\infty)$.

5) أحسب $f(-\ln 4)$ ، $f(-3)$ ، $f(-3,5)$ ، $f(0)$ ، $f(\ln 3)$ ثم ارسم (C) ، (Δ) ، (Δ').

التمرين الرابع:

I. نعتبر الدالة f المعرفة على R كما يلي: $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ نرمز بـــ (C) لتمثيلها البياني في المستوي إلى معلم متعامد ومتجانس $(0, \vec{i}, \vec{j})$.

1) بين أن f دالة فردية، ماذا تستنتج ؟ 2) أدرس تغيرات f على المجال $[0; +\infty[$ ثم ارسم (C).

3) نعتبر النقطة A من المستوي إحداثياها $(1 ; 0)$، M نقطة من (C) فاصلتها x. • عين بدلالة x المسافة AM.

II. نعتبر الدالة g المعرفة على R كما يلي: $g(x) = (x-1)^2 + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2$

1) أحسب $g'(x)$ 2) بين أن مهما يكن x من R: $g''(x) = e^{2x} + e^{-2x} + 2$

3) استنتج تغيرات الدالة g' على R. 4) بين أنه يوجد عدد حقيقي α وحيد من المجال $]0,46 ; 0,47[$ يحقق $g'(\alpha) = 0$.

5) عين إشارة $g'(x)$. 6) أدرس تغيرات g على R (لا يطلب حساب النهايات).

• ما هي القيمة الحدية للدالة g على R؟ • مثل النقطة M_a في الشكل.

• باستعمال السؤال 4 بين أن $\alpha - 1 = -\frac{1}{2}f(2x)$.

التمرين الخامس:

I. h دالة معرفة على R بـــ: $h(x) = xe^x + 1$ (1 أدرس تغيرات الدالة h ثم استنتج إشارة $h(x)$ على R.

II. لتكن الدالة g المعرفة على R بـــ: $g(x) = x + 2 - e^x$.

1) عين نهايات الدالة g عند $-\infty$ و $+\infty$.

2) شكل جدول تغيرات الدالة g.

3) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين في R نرمز لهما بـــ α و β حيث $-1,85 < \beta < -1,84$ و $1,14 < \alpha < 1,15$

4) استنتج إشارة $g(x)$.

III. f دالة معرفة على R بـــ : $f(x) = \frac{e^x - 1}{1 + xe^x}$

1) عين نهايات الدالة f عند $-\infty$ و $+\infty$.

2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x: $f'(x) = \frac{e^x . g(x)}{1 + xe^x}$

3) شكل جدول تغيرات الدالة f.

4) بين أن: $f(\alpha) = \frac{1}{1 + \alpha}$

5) عين حصرا للعدد $f(\alpha)$.

6) أرسم المنحنى C للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد حيث $\|\vec{i}\| = 2\ cm$ و $\|\vec{j}\| = 5\ cm$.

$-1,19 < f(\beta) < -1,18$

تمرين 6:

I. 1) حل المعادلة التفاضلية: (I) ... ... $y' = 2y = 0$ حيث y دالة الاشتقاق على R.

2) عين العددين الحقيقيين a ، b حتى تكون الدالة U المعرفة في R $U(x) = (ax + b)e^x$ حل للمعادلة $y' - 2y = xe^x$.

II. لتكن g الدالة المعرفة في R : $g(x) = 2e^x - x - 2$

1) أحسب نهاية g عند $-\infty$ ونهاية g عند $+\infty$.

2) أدرس اتجاه تغيرات g ثم أنشئ جدول التغيرات.

3) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ يقبل حلين حقيقيين أحدهما 0 والآخر α حيث: $-1,6 \leq \alpha \leq -1,5$.

4) استنتج إشارة $g(x)$.

III. لتكن f الدالة المعرفة في R: $f(x) = e^{2x} - (x + 1)e^x$.

1) عين نهاية f عند $-\infty$ ونهاية f عند $+\infty$.

2) أحسب $f'(x)$ ثم أدرس اتجاه تغير f.

3) بين أن $f(\alpha) = -\frac{\alpha^2 + 2\alpha}{4}$ ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

4) أنشئ جدول التغيرات f.

5) أنشئ المنحنى (c) الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس (الوحدة 2 cm)

تمرين 7:

دالة عددية لمتغير حقيقي x حيث: $f(x) = -x + 1 + e^{2x} - e^x$ (يرمز e إلى أساس اللوغاريتم النيبيري).

(C) المنحنى الممثل للدالة f في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(0, \vec{i}, \vec{j})$. (الوحدة 2 سم).

I. 1) أ. أدرس تغيرات الدالة f.

ب. أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى (C) وبين أنه يقبل مستقيما مقاربا (Δ) يطلب تعيين معادلة له.

ج. ادرس الوضعية النسبية لـــ (C) و (Δ).

2) أ. x_0 عدد حقيقي، نعتبر (Δ') المماس للمنحنى (C) في النقطة ذات الفاصلة x_0.

- عين x_0 حتى يكون (Δ') موازيا لـــ (Δ)، أكتب عندئذ معادلة لـــ (Δ').

ب. بيـن أن المنحنى (C) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين إحداثييها.

ج. أرسم ('Δ) و (C) في نفس المعلم.

د. ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد نقط تقاطع المنحنى (C) مع المستقيم (Δ_m) الذي معادلته $y = x + m$.

تمرين 8:

I. نعتبر الدالة العددية f للمتغير حقيقي x المعرفة كما يلي: $f(x) = (2x^2 - 3x)e^x$

حيث e أساس اللوغاريتم النيبيري. وليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(0,\vec{i},\vec{j})$.

1) أدرس تغيرات الدالة f.

2) أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى (C).

3) بين أن المنحنى (C) يقبل نقطتي انعطاف يطلب تعيين فاصلتيهما.

4) أ. عين معادلة المماس للمنحنى (C) عند النقطة التي فاصلتها O.

ب. أرسم هذا المماس ثم أرسم المنحني (C).

II. لتكن الدالة العددية g للمتغير حقيقي x المعرفة كما يلي: $g(x) = (2x^2 + ax + b)e^x$ حيث a و b عددان حقيقيان.

1) أوجد الشرط الذي يحققه العددان a و b حتى تقبل g نهاية حدية كبرى ونهاية حدية صغرى.

2) أ. عين العددين a و b بحيث تكون الدالة g دالة أصلية للدالة f في مجموعة الأعداد الحقيقية R.

ب. أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C) والمستقيمات التي معادلاتها: $y = 0$, $x = \frac{3}{2}$, $x = 1$.

تمرين 9:

المستوي (π) منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(0,\vec{i},\vec{j})$.

I. نعتبر الدالة العددية f للمتغير حقيقي x المعرفة كما يلي: $f(x) = \frac{2e^x}{e^x - 1}$

(e أساس اللوغاريتم النيبيري). نسمي (C) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي (π).

1) أدرس تغيرات الدالة f ، وأثبت أن (C) يقبل ثلاثة مستقيمات مقاربة.

2) بين أن النقطة (1 , 0) مركز تناظر للمنحنى (C).

3) بين أن المنحنى (C) يقبل نقطتي انعطاف يطلب تعيين فاصلتيهما.

4) أحسب: $f(ln2)$ ، $f(ln3)$ ، $f(2ln3)$ ثم ارسم المنحنى (C). (ln هو رمز الدالة اللوغاريتمية النيبيرية).

II. λ عدد حقيقي حيث: $\lambda > -ln2$

1) أوجد المساحة م(λ) للحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C) والمستقيمات التي معادلاتها: $x = \lambda$ ، $x = ln2$ ، $y = 0$.

2) جد $\lim_{\lambda \to -\infty}$ م(λ)

III. لتكن العددية g للمتغير حقيقي x المعرفة كما يلي: $g(x) = \frac{2e^x}{|e^x - 1|}$

(C') المنحنى الممثل لها في المستوي (π).