المؤسسة: سليماني جلول — الأستاذ: بلبحري كمال — المادة : رياضيات

المستوى و الشعبة : الثالثة علوم تجريبية

المحتوى المعرفي : الدالة اللوغارتمية النيبيرية

الكفاءات المستهدفة: – حل مشكلات بتوظيف اللوغاريتم و الدوال الأسية ودوال القوى .

– سير الحصة

المراحل	السير (الأنشطة المرافقة لكل مرحلة)	المدة	ملاحظات

المراحل: الإنطلاق:

⋆ التهيئة النفسية: التذكير بمبرهنة القيم المتوسطة

مناقشة النشاط 2 صفحة 22:

تمهيد:

❶ حساب بعض الصور :

لدينا : $\ln 1 = a$ و منه : $e^a = 1$ ومنه : $a = 0$ إذن : $\ln 1 = 0$

لدينا: $\ln e = a$ و منه : $e^a = e$ ومنه : $a = 1$ إذن : $\ln e = 1$

لدينا: $\ln(1e) = \ln e^{-1} = a$ ومنه : $e^{-1} = e^a$ ومنه : $a = -1$ إذن : $\ln(1e) = -1$

لدينا : $\ln e^2 = a$ و منه : $e^2 = e^a$ و منه : $a = 2$ إذن : $\ln e^2 = 2$

⋆ تعيين قيمة تقريبية إلى 10^{-3} للعدد $\ln(2)$:

لدينا : $\ln 2 = a$ و منه : $e^a = 2$ (نعلم أن : $e^0 = 1$ و $e > 2$ ومنه : $0 < a < 1$)

إذن : $a = 0,693$ و بالتالي : $\ln 2 \simeq 0,693$

⋆ إثبات أن : $\ln(\frac{1}{2}) = -\ln 2$:

نضع: $a = \ln(\frac{1}{2})$ أي : $e^a = \frac{1}{2}$ .... (1)

و نضع : $b = -\ln 2$ أي : $-b = \ln 2$ معناه : $e^{-b} = 2$ .... (2)

من (1) و (2) ينتج : $e^a = \frac{1}{e^{-b}}$ إذن : $e^a = e^b$ و بالتالي : $\ln(\frac{1}{2}) = -\ln 2$

❷ التمثيل البياني :

⋆ النقطتان $M(x,y)$ و $M'(y,x)$ متناظرتان بالنسبة إلي المنصف الأول أي إلى المستقيم الذي معادلته $y = x$.

⋆ لتكن $M(a;b)$ تنتمي إلى المنحنى (C) وهذا يعني أن $e^a = b$ إذن : $\ln b = a$

فإن : $M'(b;a)$ تنتمي إلى (C') .

– نستنتج أن المنحنيين (C) و (C') متناظران بالنسبة إلى المنصف الأول ذو المعادلة $y = x$

⋆ إنشاء (C) و (C')

❸ وضع تخمينات :

⁎ الدالة ln متزايدة على $]0;+\infty[$

⁎ $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$

ملاحظات: مناقشة النشاط من طرف التلاميذ

المراحل: بناء المفاهيم:

ملاحظات: ربط النشاط بالمفهوم

اللوغاريتم النيبيري لعدد :

> **مبرهنة وتعريف:**
>
> من أجل كل عدد حقيقي a من المجال $]0;+\infty[$ يوجد عدد حقيقي وحيد b حيث $e^b = a$.
>
> نسمي العدد b اللوغاريتم النيبيري للعدد a ويرمز له بالرمز $\ln a$.

المراحل	السير (الأنشطة المرافقة لكل مرحلة)	المدة	ملاحظات

مثال :

العدد الحقيقي الوحيد b الذي يحقق $e^b = 2$ هو العدد $\ln 2 = b$

الدالة اللوغاريتمية النيبيرية :

تعريف:
نسمي الدالة اللوغارتمية النيبيرية التي نرمز إلها بالرمز $\ln$ ولتي ترفق بكل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ العدد الحقيقي $\ln x$.

نتائج :

❶ من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ومن أجل كل y من $\mathbb{R}$
لدينا : $e^y = x$ يعني أن : $\ln x = y$

❷ من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $e^{\ln x} = x$

❸ من أجل كل عدد حقيقي x : $\ln e^x = x$

❹ بما أن : $e^0 = 1$ إذن : $\ln 1 = 0$ و $e^1 = e$ إذن $\ln e = 1$

إتجاه تغير الدالة اللوغاريتمية النيبيرية :

خاصية: الدالة اللوغارتمية متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$.

برهان :

ليكن a و b عددان حقيقيان من المجال $]0;+\infty[$ بحيث: $a < b$ أي $e^{\ln a} < e^{\ln b}$.
وكون الدالة الأسية متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ فإن : $\ln a < lnb$ ، ومنه الدالة اللوغارتمية متزايدة تماماعلى المجال $]0;+\infty[$.

نتائج :

من أجل كل عددين x و y من المجال $]0;+\infty[$ لدينا:

❶ $\ln x = \ln y$ يعني أن $x = y$ ❷ $\ln x > \ln y$ يعني أن $x > y$

❸ $\ln x > 0$ يعني أن $x > 1$ ❹ $\ln x < 0$ يعني أن $0 < x < 1$

تمرين تطبيقي : حل في $\mathbb{R}$ المعادلات و المتراجحات التالية :

❶ $\ln(2x+1) = 0$ ❷ $\ln(x-2) = -1$ ❸ $\ln(x^2-1) = \ln(x)$

❹ $\ln(2-x) < 0$ ❺ $\ln(x-5) \geq -2$ ❻ $\ln(2x+1) > \ln(x)$

❼ $x\ln(x) - \ln(x) \geq 0$ ❽ $2(\ln x)^2 - \ln x - 1$

تقويم

حل التمرين 59و61صفحة 106 .

ملاحظات عامة حول الحصة: ....

المؤسسة: سليماني جلول — الأستاذ: بلبحري كمال — المادة : رياضيات
المستوى و الشعبة : الثالثة علوم تجريبية
المحتوى المعرفي : الدالة اللوغارتمية النيبيرية
الكفاءات المستهدفة: – حل مشكلات بتوظيف اللوغاريتم و الدوال الأسية ودوال القوى .

– سير الحصة

المراحل	التسيير (الأنشطة المرافقة لكل مرحلة)	المدة	ملاحظات
الإنطلاق:	⋆ التهيئة النفسية: التذكير بخواص الدالة الأسية . نشاط: a و b عددان حقيقيان موجبان تماما ، نضع: $\alpha=\ln(ab)$ و $\beta=\ln a+\ln b$ ⋆ قارن بين العددين α و β مناقشة النشاط: لدينا : من جهة $e^{\alpha}=ab$ و من جهة أخرى : $e^{\beta}=e^{\ln a+\ln b}=e^{\ln a}\times e^{\ln b}=ab$ و منه : $\alpha=\beta$ أي : $\ln(ab)=\ln a+\ln b$		
بناء المفاهيم:	الخواص الجبرية للدالة اللوغاريتمية الخاصية الأساسية: خاصية : من أجل كل عددين حقيقيين a و b من المجال $]0;+\infty[$ لدينا : $\ln(ab)=\ln a+\ln b$ ملاحظة : يمكن تعميم الخاصية السابقة إلى جداء عدة أعداد حقيقية من المجال $]0;+\infty[$. نتائج نتيجة ①: من أجل كل عددين حقيقيين a و b من المجال $]0;+\infty[$. لدينا : $\ln\frac{1}{a}=-\ln a$ و $\ln\frac{a}{b}=\ln a-\ln b$ برهان: ليكن a عدد حقيقي من المجال $]0;+\infty[$ لدينا من جهة : $\ln\frac{a}{a}=\ln 1=0$ و لدينا من جهة أخرى : $ln\frac{a}{a}=\ln\left(a.\frac{1}{a}\right)=\ln a+\ln\frac{1}{a}$ ومنه : $\ln a+\ln\frac{1}{a}=0$ إذن : $\ln\frac{1}{a}=-\ln a$ ⋆ ليكن a و b عددين حقيقيين من المجال $]0;+\infty[$ لدينا: $\ln\frac{a}{b}=\ln\left(a\times\frac{1}{b}\right)=\ln a+\ln\frac{1}{b}$ إذن : $\ln\frac{a}{b}=\ln a-\ln b$		

المراحل	التسيير (الأنشطة المرافقة لكل مرحلة)	المدة	ملاحظات

نتيجة ②:
من أجل كل عدد حقيقي a من المجال $]0;+\infty[$ ، ومن أجل كل عدد صحيح نسبي n لدينا : $\ln a^n = n\ln a$

برهان: نميز حالتين :
① حالة $n \geq 0$: (نستعمل البرهان بالتراجع)
② حالة $n < 0$:
لدينا : $\ln(a^n) = \ln(\frac{1}{a^{-n}}) = -\ln(a^{-n}) = -(-n)\ln a = n\ln a$
(لأن : $-n > 0$)

مثال: $\ln 2^3 = 3\ln 2$ و $\ln 9 = 2\ln 3$

نتيجة ③:
من أجل كل عدد حقيقي a من المجال $]0;+\infty[$
لدينا : $\ln\sqrt{a} = \frac{1}{2}\ln a$

برهان: من أجل كل عدد حقيقي a من المجال $]0;+\infty[$ لدينا: $(\sqrt{a})^2 = a$
ومنه : $\ln(\sqrt{a})^2 = \ln a$ و $\ln(\sqrt{a})^2 = 2\ln(\sqrt{a})$
إذن : $2\ln(\sqrt{a}) = \ln a$ ومنه : $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln a$

تمرين تطبيقي 1: احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع :
$$\ln\frac{1}{2} + \ln\frac{2}{3} + \ln\frac{3}{4} + ... + \ln\frac{n-1}{n}$$

الحل:
$$\ln\frac{1}{2} + \ln\frac{2}{3} + \ln\frac{3}{4} + ... + \ln\frac{n-1}{n} = \ln\left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times ...\times\frac{n-1}{n}\right)$$
$$= \ln\left(\frac{1}{n}\right) = -\ln(n)$$

تمرين تطبيقي 2: حل في $\mathbb{R}$ مايلي :
❶ $\ln(x-1) + \ln(x+2) \leq 2\ln 2$
❷ $\ln(x+1) - \ln(x-1) > 0$

تقويم — حل التمرين 67 و68 صفحة 107

ملاحظات عامة حول الحصة: ....

المؤسسة: سليماني جلول — الأستاذ: بلبحري كمال — المادة : رياضيات

المستوى و الشعبة : الثالثة علوم تجريبية

المحتوى المعرفي : الدوال اللوغارتمية

الكفاءات المستهدفة: – توظيف خواص الدالة اللوغارتمية النيبرية .

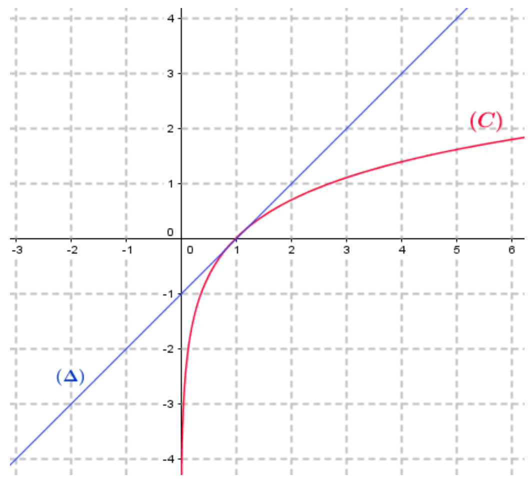
– سير الحصة

المراحل	التسيير (الأنشطة المرافقة لكل مرحلة)	المدة	ملاحظات
الإنطلاق:	⋆ التهيئة النفسية: التذكير بقواعد الحساب في الدالة اللوغارتمية .		
	دراسة الدالة اللوغارتمية النيبيرية:		
	❶ النهايات:		
	نشاط :		
	❶ أثبت باستعمال التعريف أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$		مناقشة النشاط من طرف التلاميذ
	❷ بوضع : $X = \dfrac{1}{x}$ ، استنتج $\lim\limits_{x\to 0} \ln x$		
	خواص : $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$		
بناء المفاهيم:	❷ الاستمرارية والاشتقاقية :		
	خاصية«①»: الدالة $\ln$ مستمرة على المجال $]0;+\infty[$		
	نشاط :		مناقشة النشاط من طرف التلاميذ
	نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $f(x) = e^{\ln x}$		
	❶ أحسب $f'(x)$ باستعمال مشتقة مركب دالتين		
	❷ بملاحظة أن : $f(x) = x$ ، احسب مجددا $f'(x)$		
	❸ استنتج $\ln'(x)$		
	خاصية«②»: الدالة $\ln$ قابلة للإشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ و من أجل كل $x > 0$ لدينا : $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$		
	❸ جدول تغيرات الدالة اللوغارتمية :		

x	0		1		e		$+\infty$
$\dfrac{1}{x}$	‖			$+$			
$\ln x$	‖ $-\infty$	↗	0	↗	1	↗	$+\infty$

المراحل	السير (الأنشطة المرافقة لكل مرحلة)	المدة	ملاحظات

❹ التمثيل البياني للدالة اللوغارتمية :



ملاحظات:

⋆ المنحنى الممثل للدالة $\ln$ يقبل محور التراتيب كمستقيم مقارب

⋆ المنحنى الممثل للدالة الأسية يقبل مماسا عند النقطة ذات الفاصلة 1
معادلته : $y = x - 1$

⋆ باستعمال مفهو العدد المشتق نجد : $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$ أو $\lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$

نتيجة:

الدالة $x \mapsto x$ هي أحسن تقريب تآلفي للدالة $x \mapsto \ln(1+x)$ بجوار 0

أي : من أجل x قريب من 0 لدينا : $\ln(1+x) \approx x$

تمرين تطبيقي :

لتكن الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $f(x) = 1 - (\ln x)^2$

❶ احسب نهايات الدالة f عند 0 و $+\infty$

❷ ادرس اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها

❸ بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين α و β حيث : $0 < \alpha < 1$ و $2 < \beta < 3$

❹ ارسم التمثيل البياني للدالة f في معلم متعامد و متجانس على المجال $]0;5]$

نأخذ: $f(5) \simeq -1,6$

تقويم

♠ حل التمرين 80 و 81 و 82 و 89 صفحة 108

♠ حل التمرين 113 صفحة 111

ملاحظات عامة حول الحصة: ....

المؤسسة:سليماني جلول　　　الأستاذ:بلبحري كمال　　　المادة : رياضيات

المستوى و الشعبة : الثالثة علوم تجريبية

المحتوى المعرفي : الدوال اللوغاريتمية

الكفاءات المستهدفة: - حساب و توظيف النهايات المألوفة للدالة اللوغاريتمية .

- سير الحصة

المراحل	التسيير (الأنشطة المرافقة لكل مرحلة)	المدة	ملاحظات
الإنطلاق: بناء المفاهيم: تقويم:	⋆ التهيئة النفسية: النهايات المألوفة للدالةاللوغاريتمية : 1. التزايد المقارن للدالتين $x \mapsto \ln x$ و $x \mapsto x$: نشاط: نذكر أن : $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{t}{e^t}=0$ 1. من أجل $x>0$ ضع: $t=\ln x$ ثم استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}$ 2. بوضع: $u=\dfrac{1}{x}$ ⋆ أثبت أن : $x\ln x=-\dfrac{\ln u}{u}$ ثم استنتج $\lim\limits_{x\to 0}x\ln x$ خواص: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to 0}x\ln x=0$ 2. التزايد المقارن للدالتين $x \mapsto \ln x$ و $x \mapsto x^n$: خواص: من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^n}=0$ و $\lim\limits_{x\to 0}x^n\ln x=0$ ملاحظة : ⋆ عند اللانهاية تتفوق الدالة قوة على الدالة اللوغاريتمية . تمرين تطبيقي: ـ احسب النهايات التالية : ❶ $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\ln x)$ ❷ $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)\ln x$ ❸ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{4x^3-x^2+3}$ ❹ $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2+2x-\ln x$ ❺ $\lim\limits_{x\to 0}(x^3-x)\ln x$ ♠ حل التمرين 42 و 45 صفحة 136.		مناقشة النشاط من طرف التلاميذ

ملاحظات عامة حول الحصة: ....

المؤسسة: سليماني جلول	الأستاذ: بلبحري كمال	المادة : رياضيات
المستوى و الشعبة : الثالثة علوم تجريبية		
المحتوى المعرفي : الدوال اللوغارتمية		
الكفاءات المستهدفة: – توظيف خواص الدالة اللوغارتمية النيبيرية .		

– سير الحصة

المراحل	التسيير (الأنشطة المرافقة لكل مرحلة)	المدة	ملاحظات
الإنطلاق:	⋆ التهيئة النفسية: التذكير بنهاية ومشتقة دالة مركب دراسة الدالة $\ln\circ u$: ❶ النهايات: لحساب نهاية الدالة $\ln\circ u$ نستعمل المبرهنة المتعلقة بنهاية مركب دالتين . مثال: f الدالة العددية المعرفة على $]3;+\infty[$ كمايلي: $f(x)=\ln(x-3)$. ⋆ لدينا: $\lim\limits_{x\to3}(x-3)=0$ و بما أن : $\lim\limits_{X\to0}\ln X=-\infty$ فإن: $\lim\limits_{x\to3}\ln(x-3)=-\infty$ ⋆ لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-3)=+\infty$ و بما أن : $\lim\limits_{X\to+\infty}\ln X=+\infty$ فإن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x-3)=+\infty$ ❷ اتجاه التغير:		التذكير بمبرهنة نهاية مركب دالتين
بناء المفاهيم:	**خاصية:** إذا كانت u دالة معرفة و موجبة تماما على مجال I فإن للدالتين u و $\ln\circ u$ نفس إتجاه التغير على المجال I برهان : بما أن : الدالة $\ln$ متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$ فإن : للدالتين $\ln\circ u$ و u نفس إتجاه التغير على I (حسب المبرهنة الخاصة باتجاه تغير دالة مركبة) مثال: f الدالة العددية المعرفة على $]2;+\infty[$ كمايلي: $f(x)=\ln\left(\dfrac{5}{x-2}\right)$ نلاحظ أن : $f=\ln\circ u$ حيث u الدالة المعرفة على $]2;+\infty[$ بـ : $u(x)=\dfrac{5}{x-2}$ بما أن : الدالة u متناقصة تماما على $]2;+\infty[$ فإن: f متناقصة تماما على $]2;+\infty[$ ❸ مشتقة الدالة $\ln\circ u$: **خاصية:** إذا كانت u دالة قابلة للإشتقاق و موجبة تماما على مجال I فإن الدالة $\ln\circ u$ قابلة للشتقاق على I ولدينا من أجل كل x من I : $\boxed{(\ln\circ u)'(x)=\dfrac{u'(x)}{u(x)}}$		بمساعدة التلاميذ نثبت هذه الخاصية باستعمال مبرهنة إتجاه تغير التركيب

المراحل	التسيير (الأنشطة المرافقة لكل مرحلة)	المدة	ملاحظات
	برهان : إذا كانت u قابلة للإشتقاق و موجبة تماما على مجال I علما أن الدالة $\ln$ قابلة للإشتقاق على $]0;+\infty[$ فإن : $\ln\circ u$ قابلة للإشتقاق على I ⋆ بتطبيق قاعدة حساب مشتقة دالة مركبة : من أجل كل x من I : $(\ln\circ u)'(x) = u'(x)\times(\ln)'[u(x)] = u'(x)\times\dfrac{1}{u(x)}$ مثال①: لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $f(x)=\ln(x^2+x+1)$ لدينا: $f'(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$ مثال②: لتكن g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=\ln(e^{-x}+3)$ لدينا : $g'(x)=\dfrac{-e^{-x}}{e^{-x}+3}$ تطبيق حل بكالوريا 2012 :		
تقويم	♠ حل التمرين 84 و 85 و 88 صفحة 108 ♠ حل التمرين 96 و 97 صفحة 109		

ملاحظات عامة حول الحصة: ....

المؤسسة: سليماني جلول	الأستاذ: بلبحري كمال	المادة : رياضيات

المستوى و الشعبة : الثالثة علوم تجريبية

المحتوى المعرفي : الدوال اللوغاريتمية

الكفاءات المستهدفة: – خواص دالة اللوغاريتم العشري و تطبيقاتها .

– سير الحصة

المراحل	التسيير (الأنشطة المرافقة لكل مرحلة)	المدة	ملاحظات
الإنطلاق:	⋆ التهيئة النفسية:		
بناء المفاهيم:	دالة اللوغاريتم العشري : **تعريف:** نسمي دالة اللوغاريتم العشري الدالة التي نرمز إليها بالرمز $\log$ و المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $\log x = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$ ⋆ لدينا : $\log 1 = 0$ و $\log 10 = 1$ **خواص:** من أجل كل عددين حقيقيين a و b من $]0;+\infty[$ ومن أجل كل عدد صحيح n لدينا: ❶ $\log(ab) = \log a + \log b$ ❷ $\log\left(\dfrac{a}{b}\right) = \log a - \log b$ ❸ $\log a^n = n \log a$ برهان : **حالة خاصة:** من أجل كل عدد صحيح n لدينا: $\log 10^n = n$ **خاصية:** الدالة $\log$ متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$ **نتيجة:** إذا كان x عددا حقيقيا حيث : $10^n \leq x \leq 10^{n+1}$ فإن : $n \leq \log x \leq n+1$ **مثال:** نعتبر العدد الحقيقي x حيث : $x = 3,87 \times 10^7$ لدينا : $10^7 < x < 10^8$ و منه : $\log 10^7 < \log x < \log 10^8$ نجد هكذا أن : $7 < \log x < 8$		

المراحل	السير (الأنشطة المرافقة لكل مرحلة)	المدة	ملاحظات

معرفة عدد الأرقام في الكتابة العشرية :

طريقة: x عدد حقيقي حيث $x > 1$:

❶ نعين باستعمال الحاسبة الجزء الصحيح للعدد $\log x$

و ليكن : $E(\log x) = p$

❷ نستنتج الحصر $p \leq \log x < p+1$ و منه : $10^p \leq x < 10^{p+1}$

❸ عدد أرقام العدد x هو : $p+1$

تمرين تطبيقي :

بحلول شهر جانفي لعام 2013 اكتشف *curtis cooper* العدد الأولي الثامن و الأربعون لأعداد مرسين .

(الأعداد الأولية التي تكتب من الشكل : $2^p - 1$ مع: p أولي)

هذا العدد هو : $M_{48} = 2^{57885161} - 1$

❶ باستعمال الحاسبة عين الجزء الصحيح للعدد $\log(M_{48})$

❷ استنتج الحصر التالي : $10^{17425169} \leq M_{48} < 10^{17425170}$

❸ ما هو عدد أرقام M_{48} ؟

تطبيق :

⋆ ما هو عدد أرقام 2016^{2017} ؟

تقويم

♠ حل التمرين 98 و 100 و 101 صفحة 108

ملاحظات عامة حول الحصة: ....