المؤسسة: ثانوية خالص سليمان -بشلول - البويرة		بطاقة رقم:03/03	الأستاذ: شداني عبد المالك
الحصة	تحليل	التاريخ	سبتمبر 2015
المحور	النهايات و الاستمرار	القسم	3 علوم تجريبية
الموضوع	العمليات على النهايات	المدة	ساعتين
الكفاءات المستهدفة	حساب نهاية باستعمال المبرهنات المتعلقة بالعمليات على النهايات	المعارف المكتسبة	النهايات (السنة الثانية)
الوسائل البداغوجية	السبورة + المدور	المراجع	الكتاب المدرسي

سير الدرس	مراحل الدرس	الزمن

1. تتمات على النهايات بعض نهايات الدوال المرجعية:

$\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ * $\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty$ * $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$ *

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$ * $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2=+\infty$ * $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$ * $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$ *

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ * $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$ * $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\frac{1}{x}=+\infty$ * $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0}\frac{1}{x}=-\infty$ *

2. العمليات على النهايات

f و g دالتان. a يمثل عدد حقيقي أو $+\infty$ أو $-\infty$. نقبل دون برهان المبرهنات التالية:

نهاية مجموع دالتين:

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$l\in\mathbb{R}$	$l\in\mathbb{R}$	$l\in\mathbb{R}$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$l'\in\mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x)$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت	$-\infty$

نهاية جداء دالتين:

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$l\in\mathbb{R}$	$l>0$	$l>0$	$l<0$	$l<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0	0
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$l'\in\mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a}(f(x)\times g(x))$	$l\times l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت	ح ع ت

نهاية حـــــــاصل قسمة دالتين:

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$l\in\mathbb{R}^*$	l	0	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$l'\in\mathbb{R}^*$	$+\infty$	0	$-\infty$	$l'>0$	$l'<0$	$l'>0$	$l'<0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)$	$\frac{l}{l'}$	0	ح ع ت	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت	ح ع ت	ح ع ت	ح ع ت

ملاحظات

- تسمى الحالات التي لا تسمح فيها النظريات السابقة من استنتاج النهاية بحالات "عدم التعيين"
- إذا قبلت دالة f نهاية عند عدد حقيقي a تكون هذه النهاية وحيدة.

حالة عامة: 1) نهاية دالة كثير حدود عند $+\infty$ أو $-\infty$ هي نهاية حدها الأعلى درجة
2) نهاية الدالة الناطقة عند $+\infty$ أو $-\infty$ هي نهاية حاصل قسمة الحد الأعلى درجة في البسط على الحد الأعلى درجة في المقام.

مرحلة التقويم و الإستثمار	تطبيق: تمرين رقم 18 إلى 22 صفحة 27	15د

حلول بعض التمارين :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^3+x-1}{x^2+1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ $\Leftarrow$ ملاحظة: الطريقة غير صالحة

بجوار العدد x_0

2) $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1}\dfrac{x^3+x-2}{x^2-1}$ نجد: $\dfrac{0}{0}$ (ح ع ت) ، في حالة $\dfrac{0}{0}$ نستعمل عموما القسمة الاقليدية او العدد المشتق

الازالة: لدينا، $x^3+x-2=(x-1)(x^2+x+2)$ و $x^2-1=(x-1)(x+1)$ ومنه:

$$\lim_{x\xrightarrow{>}1}\frac{x^3+x-2}{x^2-1}=\lim_{x\xrightarrow{>}1}\frac{(x-1)(x^2+x+2)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\xrightarrow{>}1}\frac{x^2+x+2}{x+1}=2$$

3) $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}2}\dfrac{x^2+2x-3}{x-2}=+\infty$ لأن : $\begin{cases}\lim\limits_{x\xrightarrow{>}2}(x^2+2x-3)=+5\\ \lim\limits_{x\xrightarrow{>}2}(x-2)=0^+\end{cases}$

x	$+\infty$	3		2	$-\infty$
x^2-5x+6	+	0	−	0	+

0^- 0^+

5) $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}2}\dfrac{x^2+x-1}{2-x}=+\infty$ لأن : $\begin{cases}\lim\limits_{x\xrightarrow{>}2}(x^2+x-1)=+5\\ \lim\limits_{x\xrightarrow{>}2}(2-x)=0^-\end{cases}$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$-x+2$	+	0	−

بقيم أصغر 0^+ 0^- بقيم أكبر

6) ح ع ت $+\infty-\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{3x^2-x+1}-2x\right]$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{3x^2-x+1}-2x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[|x|\sqrt{3-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-2x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[x\sqrt{3-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-2x\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x\left[\sqrt{3-\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to0}+\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\to0}}-2\right]=\lim_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{3}-2\right)=\lim_{x\to+\infty}(-0,27x)=-\infty$$

7) ح ع ت $+\infty-\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2+x-3}-x\right]$ ، نلاحظ نفس المعامل لـ x نستعمل المرافق

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2+x-3}-x\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x-3}-x\right)\left(\sqrt{x^2+x-3}+x\right)}{\sqrt{x^2+x-3}+x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^2+x-3)-x^2}{\sqrt{x^2+x-3}+x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-3}{\sqrt{x^2+x-3}+x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\left(1-\frac{3}{x}\right)}{\cancel{x}\left[\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}}+1\right]}=\frac{1}{2}$$

طرائق: حالة عدم التعيين $\frac{0}{0}$

$f(x)$ تتضمن sin او cos	المقام من الشكل $x+a$ او $ax+b$	$f(x)$ تتضمن جذرا $\sqrt{\ }$	$f(x)$ تتضمن كثيرات حدود
نظهر احد النهايات الشهيرة: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0$	**طريقة العدد المشتق** 1) إظهار العبارة $\frac{f(x)-f(0)}{x-a}$ 2) $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(0)}{x-a}=f'(a)$	**طريقة المرافق** 1)نضرب $f(x)\times\frac{\text{مرافق}}{\text{مرافق}}$ 2) ثم نقوم بالاختزال	**طريقة الاختزال** 1) نحلل البسط و المقام 2) نختزل على $(x-a)$ $f(x)=\frac{(x-a)(...)}{(x-a)(...)}$

حالة عدم التعيين $+\infty-\infty$

<table>
<tr><th colspan="5">$f(x)$ تتضمن جذرا $\sqrt{\ }$</th></tr>
<tr><th>$f(x)=\sqrt{ax+b}+\alpha x+\beta$</th><th colspan="2">$f(x)=\sqrt{ax^2+bx+c}-\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}$</th><th colspan="2">$f(x)=\sqrt{ax^2+bx+c}+\alpha x+\beta$</th></tr>
<tr><td rowspan="2">نضع x كعامل مشترك</td><td>$a=\alpha$</td><td>$a\neq\alpha$</td><td>$\sqrt{a}=\alpha$</td><td>$\sqrt{a}\neq\alpha$</td></tr>
<tr><td>نضع x كعامل مشترك</td><td colspan="2">نستعمل طريقة المرافق</td><td>نضع x كعامل مشترك</td></tr>
</table>

حالة عدم التعيين $\frac{\infty}{\infty}$:

$f(x)$ تتضمن جذرا $\sqrt{\ }$
نضع الحد الأكبر درجة كعامل مشترك $\sqrt{ax^2+bx+c}=\lvert x\rvert\sqrt{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}$ ، $\sqrt{ax+b}=\lvert x\rvert\sqrt{\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}}$

ملاحظات حول سير الحصة:..