المؤسسة: ثانوية خالص سليمان	بطاقة رقم:04/04	الأستاذ: شداني عبد المالك

الحصة	تحليل	التاريخ	سبتمبر 2015
المحور	النهايات و الإستمرار	القسم	3 علوم تجريبية
الموضوع	نهاية دالة مركبة و النهايات بالمقارنة	المدة	ساعتين
الكفاءات المستهدفة	حساب النهايات باستعمال نهاية دالة مركبة أو النهايات بالمقارنة	المعارف المكتسبة	حساب النهاية ، تركيب دالتين
الوسائل البداغوجية	السبورة + المسطرة	المراجع	الكتاب المدرسي+ المنهاج

سير الدرس	مراحل الدرس	الزمن

نشاط إستكشافي

نشاط1: fدالة معرفة على $]0;+\infty[$بـ: $f(x)=\frac{1}{x}$ وgمعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x)=x^2+1$

1)عرف الدالة $g\circ f$ ($g[f(x)]$) 2)عين b نهاية f عند $a=+\infty$

3)عين c نهاية gعند b 4)عين نهاية $g\circ f$ عند $a=+\infty$, ماذا تلاحظ؟

صياغة الكفاءة

1/نهاية دالة مركبة:

تعريف: c,b,a تمثل أعداد حقيقية أو $\pm\infty$, h,g,f دوال عددية حيث : $f=g\circ h$

إذا كانت $\lim\limits_{x\to a}h(x)=b$ و $\lim\limits_{x\to b}g(x)=c$ فإن : $\lim\limits_{x\to a}g\circ f(x)=c$

تمرين تطبيقي1: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $f(x)=3\left(1-\frac{4}{x}\right)^2+2$

أدرس نهاية الدالة f عند $+\infty$ و عند $-\infty$.

الحل: الدالة f هي مركب الدالتين u و v بهذا الترتيب أي $f=vou$ حيث :

$\begin{cases}u(x)=1-\frac{4}{x}\\ v(x)=3x^2+2\end{cases}$ بمأن $\lim\limits_{x\to+\infty}u(x)=1$ و $\lim\limits_{x\to 1}v(x)=5$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=5$

بمأن $\lim\limits_{x\to+\infty}u(x)=1$ و $\lim\limits_{x\to 1}v(x)=5$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=5$

تمرين تطبيقي2: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $f(x)=\cos\left(\frac{2}{x}-\frac{\pi}{2}\right)$

أدرس نهاية الدالة fعند $\frac{2}{\pi}$.

الحل: الدالة f هي مركب الدالتين u و v بهذا الترتيب أي $f=vou$ حيث :

بمأن $\begin{cases}u(x)=\frac{2}{x}-\frac{\pi}{2}\\ v(x)=\cos x\end{cases}$ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}u(x)=\frac{\pi}{2}$ و $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}v(x)=0$ فإن $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}f(x)=0$.

2/حساب النهايات بالمقارنة:

مبرهنة1: (الحد من الأسفل) g,f دالتان معرفتان على D من $\mathbb{R}$

إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$ و $f(x)\geq g(x)$ من أجل x كبير جدا بالقدر الكافي فإن :

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

مثال: لتكن fالدالة المعرفة من أجل كل عدد حقيقي x حيث $x>3$ بـ: $f(x)=\frac{2x}{\sqrt{x+3}}$

1) بين أنه إذا كان $x>3$ فإن $\frac{1}{\sqrt{x+3}}>\frac{1}{\sqrt{2x}}$ 2) استنتج نهاية الدالة fعند $+\infty$.

الحل:

1) لدينا $x>3$ ومنه $x+x>x+3$ أي $2x>x+3$. وبالتالي

$\sqrt{2x}>\sqrt{x+3}$ إذن: $\frac{1}{\sqrt{x+3}}>\frac{1}{\sqrt{2x}}$

2) من أجل $x>3$ لدينا $\frac{1}{\sqrt{x+3}}>\frac{1}{\sqrt{2x}}$ ومنه: $\frac{2x}{\sqrt{x+3}}>\frac{2x}{\sqrt{2x}}$ إذن: $f(x)>\sqrt{2x}$

وبما أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{2x}=+\infty$ إذن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

مبرهنة2: (الحد من الأعلى) g,f دالتان معرفتان على D من $\mathbb{R}$

إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=-\infty$ و $f(x)\le g(x)$ من أجل x كبير جدا بالقدر الكافي فإن :

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$

تمرين تطبيقي:1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x يكون: $3\cos x-2x\le 3-2x$

2) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}(3\cos x-2x)$.

الحل

1) لدينا من أجل كل عدد حقيقي x ، $\cos x\le 1$ ومنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$،

$3\cos x\le 3$ وبالتالي من أجل كل عدد حقيقي x ، $3\cos x-2x\le 3-2x$

2) لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $3\cos x-2x\le 3-2x$ ومنه من أجل كل x كبير بالقدر الكافي: $3\cos x-2x\le 3-2x$ وبما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}(3-2x)=-\infty$ فإن

$\lim\limits_{x\to+\infty}(3\cos x-2x)=-\infty$

مبرهنة3: (الحصر) g,f دالتان معرفتان على D من $\mathbb{R}$ و l عددحقيقي ثابت و h دالة حيث من أجل x كبير بالقدر الكافي لدينا : $h(x)\le f(x)\le g(x)$, إذا كانت :

$\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=l$ فإن : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=l$

ملاحظة مهمة: تبقى المبرهنات السابقة صحيحية في حالتي : $x\to-\infty$ و $x\to a$ حيث a عدد حقيقي

تمرين تطبيقي: لتكن f الدالة المعرفة على $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=\frac{1-2\sin x}{x^2}$

1) بين أنه من أجل كل x من $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$: $-\frac{1}{x^2}\le f(x)\le\frac{3}{x^2}$

2) استنتج نهاية الدالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

الحل: 1) من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$: $-1\le\sin x\le 1$ ومنه $-2\le -2\sin x\le 2$ ومنه

$-1\le 1-2\sin x\le 3$ إذن $-\frac{1}{x^2}\le\frac{1-2\sin x}{x^2}\le\frac{3}{x^2}$ أي $-\frac{1}{x^2}\le f(x)\le\frac{3}{x^2}$

2) من أجل كل x من $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$، لدينا: $-\frac{1}{x^2}\le f(x)\le\frac{3}{x^2}$

بما أن $\lim\limits_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=0$ و $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3}{x^2}\right)=0$ فإن $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$

مرحلة التقويم و الإستثمار

تطبيق: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ حيث : $f(x)=\frac{4+\sin x}{x^2}$

1- عين العددين a,b بحيث من أجل كل عدد x يحقق $a\le 4+\sin x\le b$ و استنتج عبارة الدالتين h و g حيث من أجل كل x من D_f يكون $h(x)\le f(x)\le g(x)$

2- أحسب نهايات f عند $+\infty$ و $-\infty$

الحل :

1) من اجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}^*$ لدينا: $-1 \le \sin x \le 1$ ومنه $-3 \le 4+\sin x \le 4$

ومنه : $\frac{-3}{x^2} \le \frac{4+\sin x}{x^2} \le \frac{4}{x^2}$ أي $\frac{-3}{x^2} \le f(x) \le \frac{4}{x^2}$ لأن $\frac{1}{x^2} > 0$

2) حساب النهايات :

لدينا: $\lim\limits_{|x|\to+\infty} \frac{-3}{x^2} = \lim\limits_{|x|\to+\infty} \frac{5}{x^2} = 0$ ومنه نجد: $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0 \end{cases}$

تمارين من الكتاب المدرسي.(مهـــــــم جدا

ملاحظات حول سير الحصة.....