أستعد للباكالوريا

اعداد الاستاذ	YousfiMath	السنة الدراسية
يوسفي عبد الرحمن	Yousfisifou804@yahoo.fr	2015/2016

المحورالأول: النهايات والاستمرارية

المستوى : الثالثة علوم و رياضيات

الموضوع : النهايات والاستمرارية 01 limitres - continuite

الكفاءة المستهدفة

- حساب نهاية منتهية أو غير منتهية لدالة عند الحدود(المنتهية أو غير المنتهية) لمجالات مجموعة التعريف.
- حساب نهاية باستعمال المبرهنات المتعلقة بالعمليات على النهايات أو المقارنة وتركيب دالتين.
- دراسة السلوك التقاربي لدالة
- استعمال مبرهنة القيم المتوسطة لإثبات وجود حلول للمعادلة $f(x)=k$ ، k عدد حقيقي معطى.

المكتسبات القبلية

- حساب النهايات عند اطراف مجموعة التعريف لدوال مالوفة
- الدوال العددية

مخطط الدرس | التوقيت

نشاط : ....

1: تعريف الاستمرارية

2:خواص الاستمرارية

3: نطرية القيم المتوسطة

4: الدوال المستمرة والرتيبة تماما

5:

6:

وثائق التحضير	الوسائل البيداغوجية	نقد ذاتي
• دليل الأستاذ • الكتاب المدرسي • المنهاج • الهباج في الرياضيات • الجديد في الرياضيات	• السبورة • جهاز داتاشو	

المؤسســـــــــة:	المستــــــــوى: الثالثة علوم
السنة الدراسية:	ميـــدان التعلم: تحليل
التاريـــــــــخ:	الوحدة التعلمية: النهايات والاستمرارية
توقيت الحصة :	موضوع الحصة : مفهوم الاستمرارية

المكتسبات القبلية حساب نهاية دالة على مجال تعريفها

- حساب نهاية منتهية أو غير منتهية لدالة عند الحدود (المنتهية أو غير المنتهية) لمجالات مجموعة التعريف.

الأنشطة المقترحة وطبيعتها	الإنجاز (ســير الحصة)	التعليمات والتوجيهات
نشاط: المستوي مزود بمعلم ولتكن الدوال المعرفة بعباراتها: $f(x)=x^2$ ، $g(x)=\sqrt{x-1}$ ، $h(x)=[x]$. - جد مجموعات تعريفها. - أحسب $f(1)$ ، $g(1)$ ، $h(1)$ ، $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$ ، $\lim\limits_{x\to 1} h(x)$. - مثل بيانيا هذه الدوال.	**نـــــشاط** **تعريف:** نسمي الدالة الجزء الصحيح الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ و التي ترفق بكل عدد حقيقي x العدد الصحيح n حيث $n \le x < n+1$ و نرمز لها بالرمز E أو $[\ ]$. 1) أحسب $[-2,3]$ ، $E(-1)$ ، $[\sqrt{3}]$ و $E(11,01)$. 2) نعتبر الدوال f ، g و h المعرفة على المجال $]-2;1[$ كما يلي: $f(x)=[x]$ ، $g(x)=x-[x]$ ، $h(x)=x^2+1$ و لتكن (C_f) ،(C_g) ،(C_h) تمثيلاتها البيانية على الترتيب. • أرسم في معالم مختلفة التمثيلات البيانية (C_f) ،(C_g) و(C_h). • هل بإمكانك رسم المنحنيات (C_f) ،(C_g) و(C_h) بدون رفع القلم (اليد) ؟ • هل تقبل الدوال f ، g و h نهاية عند -1 ؟ عند 0 ؟ • أكتب خلاصة. ملاحظة دالة الجزء الصحيح تم التطرق اليها في المنهاج لذا اشرنا اليها في هذا النشاط	- من أجل كل عدد حقيقي a غير معزول في مجموعة تعريف الدالة f؛ نعرف استمرارية f عند a كما يلي: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$ - من خلال دوال مثل: $x \mapsto x^2$ - $x \mapsto \|x\|$ ، - $x \mapsto \sqrt{x}$ - نجعل التلاميذ يلاحظون أن الدالة تكون مستمرة على مجال، عندما يمكن رسم منحنيها البياني على هذا المجال دون رفع القلم. - تقترح أمثلة لدوال غير مستمرة مثل: $x \mapsto [x]$ ، - $x \mapsto x-[x]$، مع تمثيلهما بيانيا. حيث يرمز $[x]$ إلى الجزء الصحيح للعدد الحقيقي x . - كل الدوال المألوفة المقررة في هذا المستوى مستمرة على كل مجال من مجموعة تعريفها. - لا تثار مسألة البحث في إثبات استمرارية دالة إلا في حالات بسيطة.

2/الأستمرارية

1.2 استمرار دالة عند عدد

نشاط 01:

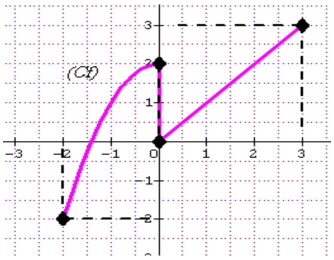
لتكن f الدالة المعرفة على: $[-2,3]$ ب: $f(x)=\begin{cases}-x^2+2, & x\in[-2,0[\\ x, & x\in[0,3]\end{cases}$

1-مثل بيانيا الدالة f. هل تقبل الدالة f نهاية عند 0؟

2- هل الدالة f مستمرة على المجال: $[-2,3]$ ؟ أذكر مجالا تكون فيه الدالة مستمرة.

الحل: 1-

** أنظر الشكل .لدينا من جهة $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0} f(x)=2$ و من جهة ثانية $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=0$



اذن الدالة f لا تقبل الدالة f نهاية عند 0.

2- الدالة f غير مستمرة عند 0 وبالتالي فهي غير مستمرة على المجال: $[-2,3]$.

الدالة f مستمرة مثلا على المجال: $[0,3]$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

تعريف

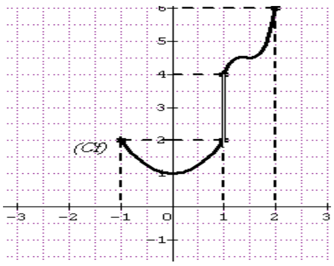
f دالة مجموعة تعريفها I و a عدد حقيقي غير معزول من I.

القول أن الدالة f مستمرة عند a يعني أن نهاية الدالة f عند a هي $f(a)$

** f مستمرة عند a يعني أن $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$

ملاحظة: القول أن f مستمرة على مجال $J\subset I$ يعني أن f مستمرة عند كل عدد حقيقي من J.

التفسير البياني : تكون الدالة f مستمرة على مجال $J\subset I$ عندما يمكن رسمها على هذا المجال دون رفع القلم .



مثـــــال 01:

هل الدالة الممثلة في الشكل مستمرة على المجال $[-1,2]$ ؟

مثـــــال 02:

لتكن f الدالة المعرفة على: $]-2,2[$ ب:

$$f(x)=\begin{cases}-x, & x\in]-2,0]\\ x^2, & x\in]0,2[\end{cases}$$

1-مثل بيانيا الدالة f. هل تقبل الدالة f نهاية عند 0؟

2- هل الدالة f مستمرة على المجال: $]-2,2[$ ؟

مثال:

الدالة $f(x)=x^2+1$ مستمرة عند ال `0` لأن:

1) الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ وهو مجال مفتوح يشمل ال 0

2) $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=1$ و $f(0)=0^2+1=1$

مثال:

الدالة $g(x)=\sqrt{x}$ غير مستمرة عند ال `0` لأن:

1) الدالة g غير معرفة على مجال مفتوح يشمل ال 0 أي $D_g=x\in[0,+\infty[$

- من أجل كل عدد حقيقي a غير معزول في مجموعة تعريف الدالة f؛ نعرف استمرارية f عند a كما يلي: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$

- من خلال دوال مثل: $x\mapsto x^2$ ، - $x\mapsto|x|$ ، - $x\mapsto\sqrt{x}$

- نجعل التلاميذ يلاحظون أن الدالة تكون مستمرة على مجال، عندما يمكن رسم منحنيها البياني على هذا المجال دون رفع القلم.

- تقترح أمثلة لدوال غير مستمرة مثل: $x\mapsto[x]$ ، - $x\mapsto x-[x]$، مع تمثيلهما بيانيا. حيث يرمز $[x]$ إلى الجزء الصحيح للعدد الحقيقي x .

- كل الدوال المألوفة المقررة في هذا المستوى مستمرة على كل مجال من مجموعة تعريفها.

- لا تثار مسألة البحث في إثبات استمرارية دالة إلا في حالات بسيطة.

2.2:استمرار دالة عند عدد

من اليمين

تعريف f دالة مجموعة معرفة على $[x_0;a[$ و $a \succ 0$ القول أن الدالة f مستمرة عند a من اليمين يعني أن
$$\lim_{x \to a^{>}} f(x) = f(a)$$

من اليسار

تعريف f دالة مجموعة معرفة على $[x_0;a[$ و $a \prec 0$ القول أن الدالة f مستمرة عند a من اليساريعني أن $\lim_{x \to a^{<}} f(x) = f(a)$

ملاحظة:1 القول أن f مستمرة على يمين ويسار عدد يعني أن f مستمرة عند هذا العدد والعكس

ملاحظة:2 اذا كانت f مستمرة عند a (على يمين ويسار) فهي معرفة عنده

على مجال

تعريف f دالة معرفة على مجال مفتوح I
اذا كانت الدالة f مستمرة عند كل a من I فانها مستمرة على I

ملاحظة:1 اذا كانت الدالة f معرفة على المجال $[a;b]$ و مستمرة على $]a;b[$ وعلى a من اليمين وعلى b من اليسار.نقول أنها مستمرة على $[a;b]$

نتيجة(هندسيا): اذا كانت الدالة f مستمرة على $[a;b]$ فان تمثيلها البياني هو خط غير منقطع حداه طرفي المجال

ينطبق هذا على الدوال كثيرات الحدود

2/2 خواص الاستمرارية

خواص :(تقبل بدون برهان)

نقبل بأن كل الدوال المقررة في هذا المستوى والمحصل عليها بالعمليات على الدوال المألوفة أو بتركيبها مستمرة على كل مجال من مجموعة تعريفها.

نتائج:

الدوال المرجعية مستمرة على مجال تعريفها.

الدوال كثيرات الحدود ، SIN، COS مستمرة على R.

الدوال الناطقة (حاصل قسمة كثيري حدود) مستمرة على مجال تعريفها.

أمثلة :

- الدالة : $x \longrightarrow x^3 - 2x + 4$ مستمرة على R.
- الدالة $x \longrightarrow \dfrac{x^2 - 3x + 4}{x - 1}$ مستمرة على $]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$.

تمرين رقم 42 الصفحة 29

تمرين رقم : 45 صفحة : 29

- من أجل كل عدد حقيقي a غير معزول في مجموعة تعريف الدالة f؛ نعرف استمرارية f عند a كما يلي: $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$
- من خلال دوال مثل: $x \mapsto x^2$
- ، $x \mapsto |x|$ ،
- $x \mapsto \sqrt{x}$
- نجعل التلاميذ يلاحظون أن الدالة تكون مستمرة على مجال، عندما يمكن رسم منحنيها البياني على هذا المجال دون رفع القلم.
- تقترح أمثلة لدوال غير مستمرة مثل: $x \mapsto [x]$ ،
- $x \mapsto x - [x]$، مع تمثيلهما بيانيا. حيث يرمز $[x]$ إلى الجزء الصحيح للعدد الحقيقي x .
- كل الدوال المألوفة المقررة في هذا المستوى مستمرة على كل مجال من مجموعة تعريفها.
- لا تثار مسألة البحث في إثبات استمرارية دالة إلا في حالات بسيطة.

تمرين محلول1: لتكن f الدالة المعرفة على $[-2;3]$ كما يلي:

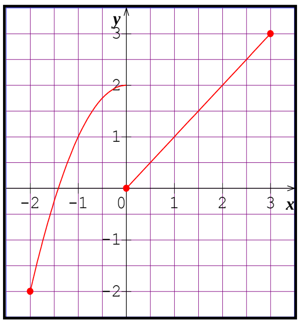
$f(x)=-x^2+2$ إذا كان $x\in[-2;0[$

$f(x)=x$ إذا كان $x\in[0;3]$

1. مثل بيانيا الدالة f. هل تقبل الدالة f نهاية عند 0 ؟

2. هل الدالة f مستمرة على $[-2;3]$ ؟ أذكر مجالا تكون الدالة f مستمرة عليه.

الحل:



1. أنظر الشكل المقابل. لدينا من جهة $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\<}} f(x)=2$ و لدينا من جهة ثانية $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\>}} f(x)=0$. إذن لا تقبل الدالة f نهاية عند 0.

2. الدالة غير مستمرة عند0 و بالتالي فهي غير مستمرة على $[-2;3]$.
نلاحظ أنه غير ممكن رسم تمثيلها البياني دون رفع القلم.
الدالة f مستمرة مثلا على المجال $[0;3]$.

تمرين محلول2: نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ بِ $f(x)=(x^2+x+1)\cos x$

بين أن الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$.

الحل: الدالتان $x\mapsto\cos x$ و $x\mapsto x^2+x+1$ مستمرتان على $\mathbb{R}$.

الدالة f هي جداء دالتين مستمرتين على $\mathbb{R}$ فهي إذن مستمرة على $\mathbb{R}$.

تمرين محلول3: نعتبر الدالة f المعرفة على $[-1;2[$ بِ $f(x)=xE(x)+1$

حيث الدالة $x\mapsto E(x)$ هي الدالة الجزء الصحيح (أنظر النشاط الأول)

1. عين عبارة $f(x)$ على كل من المجالات التالية: $[-1;0[$ ، $[0;1[$ و $[1;2[$.

2. أرسم في معلم $(O;I,J)$ المنحني الممثل للدالة f.

3. هل الدالة f مستمرة على المجال $[-1;1[$ ؟ على المجال $[-1;2[$ ؟

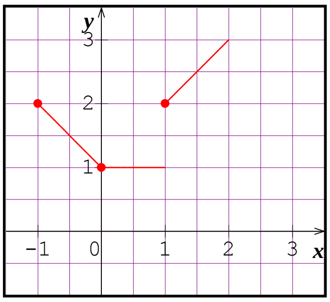
الحل

1. من أجل $x\in[-1;0[$ لدينا $E(x)=-1$ ومنه $f(x)=-x+1$

من أجل $x\in[0;1[$ لدينا $E(x)=0$ ومنه $f(x)=1$

من أجل $x\in[1;2[$ لدينا $E(x)=1$ ومنه $f(x)=x+1$

2. انظر الشكل المقابل.



3. نعم الدالة f مستمرة على المجال $[-1;1[$ لأنه بإمكاننا رسم جزء المنحني في هذا المجال دون رفع القلم.

الدالة f ليست مستمرة على المجال $[-1;2[$ لأنها غير مستمرة عند 1 كما نلاحظ أنه لا يمكن رسم منحنيها البياني دون رفع القلم.

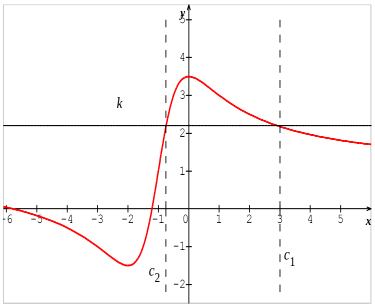
3.2 مبرهنة القيم المتوسطة

مبرهنة

f دالة معرفة و مستمرة على مجال $[a;b]$.
من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$، يوجد على الأقل عدد حقيقي c محصور بين a و b بحيث : $f(c)=k$.

3/2 /1 التفسير البياني

f دالة معرفة و مستمرة على مجال $[a;b]$ وليكن (L) منحنيها البياني في معلم $(O;I,J)$.
من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ ، المستقيم (D) ذو المعادلة $y=k$ يقطع على الأقل مرة واحدة المنحني (L) في نقطة فاصلتها c محصورة بين a و b.
(بالنسبة للشكل المقابل (D) يقطع (L) في نقطتين فواصلها على الترتيب c_1 و c_2).



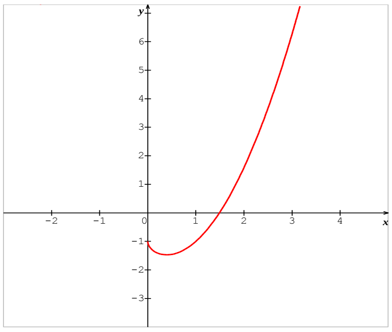
2/3/2 المعادلة $f(x)=k$

إذا كانت f دالة معرفة و مستمرة على مجال $[a;b]$ فإنه من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$. المعادلة $f(x)=k$ تقبل على الأقل حلا c محصور بين a و b.

حالة خاصة: إذا كانت f دالة مستمرة على مجال $[a;b]$ وكان $f(a)\times f(b)<0$ (العدد 0 محصور بين $f(a)$ و $f(b)$) فإنه يوجد على الأقل عدد حقيقي c محصور بين a و b بحيث $f(c)=0$ أي أن f تنعدم على الأقل مرة واحدة على $[a;b]$.

ملاحظة: مبرهنة القيم المتوسطة تؤكد فقط وجود حل على الأقل للمعادلة $f(x)=k$ أما تعيين الحلول أو قيم مقربة لها فيتم بإتباع خوارزميات مختلفة.

مثال: لتكن f الدالة المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـِ $f(x)=x^2-\sqrt{x}-1$
f دالة معرفة و مستمرة على $[0;+\infty[$
لدينا $f(1)=-1$ و $f(2)=3-\sqrt{2}$.
العدد 0 محصور بين $f(1)$ و $f(2)$ ، ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة. المعادلة $f(x)=0$ تقبل على الأقل حلا محصورا بين 1 و 2.



تمرين: برهن باستعمال مبرهنة القيم المتوسطة. أن المعادلة $x^3+5x+1=0$ تقبل على الأقل حلا في المجال $]-0,20;-0,19[$.

طريقة: لإثبات وجود حلول معادلة على مجال $[a;b]$ باستعمال مبرهنة القيم المتوسطة نتبع الخطوات التالية:

- نكتب المعادلة على الشكل $f(x)=k$.
- نتحقق من استمرارية الدالة f على المجال $[a;b]$.
- نتحقق من أن العدد k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$.

الحل: يمكن كتابة المعادلة $x^3+5x+1=0$ على الشكل $f(x)=0$

حيث f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x^3+5x+1$

الدالة f دالة كثير حدود و بالتالي فهي مستمرة على $\mathbb{R}$ و من ثم على المجال $]-0,20;-0,19[$.

لدينا $f(-0,20)=-0,008$ و $f(-0,19)=0,04314$ ومنه لدينا

الدالة f مستمرة على $]-0,20;-0,19[$ و $f(-0,20)\times f(-0,19)<0$

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد α بحيث $f(\alpha)=0$.

ومنه المعادلة $x^3+5x+1=0$ لها حل α في المجال $]-0,20;-0,19[$.

ملاحظة: يمكن مراقبة النتيجة باستعمال حاسبة بيانية بحيث يتم

تمثيل الدالة f ثم ملاحظة تقاطعها مع حامل محور الفواصل.

تمرين تطبيقي:

برهن باستعمال مبرهنة القيم المتوسطة أن المعادلة $x^3+x=-1$ تقبل حلا على الأقل في المجال $[-1;0]$.

الحل:

يمكن كتابة المعادلة $x^3+x=-1$ على الشكل $f(x)=-1$ حيث f هي الدالة المعرفة على R بـ:

. $f(x)=x^3+x$

الدالة f مستمرة على R لأنها دالة كثير حدود فهي مستمرة على $[-1;0]$.

لدينا $f(-1)=-2$ و $f(0)=0$

نلاحظ أن العدد (-1) محصور بين العددين $f(-1)$ و $f(0)$

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة ، المعادلة $x^3+x=-1$ تقبل حلا على الأقل في المجال $[-1;0]$.

4/2: الدوال المستمرة والرتيبة تماما على مجال

مبرهنة : إذا كانت f دالة مستمرة و رتيبة تماما على مجال $[a;b]$ فإنه من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$، المعادلة $f(x)=k$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[a;b]$.

البرهان: نفرض أن الدالة f مستمرة و رتيبة تماما على المجال $[a;b]$.
و ليكن k عدد حقيقي محصور بين $f(a)$ و $f(b)$. ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة، يوجد على الأقل عدد حقيقي c محصور بين a و b بحيث $f(c)=k$.
لنفرض أنه يوجد عدد حقيقي آخر c' مختلف عن c، محصور بين a و b و يحقق $f(c')=k$.
يكون لدينا حينئذ $c\neq c'$ و $f(c)=f(c')$ و هذا يناقض الرتابة التامة للدالة f على $[a;b]$.
و بالتالي يوجد عدد حقيقي وحيد c من $[a;b]$ بحيث $f(c)=k$ أي أن c هو الحل الوحيد للمعادلة $f(x)=k$.

ملاحظة 1:

إذا كانت الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $[a;b]$ فإن جدول تغيراتها يأخذ الشكل:

x	a	x_0	b
$f(x)$	$f(a)$ ↗	k	↗ $f(b)$

ملاحظة 2:

إذا كانت الدالة f مستمرة و متناقصة تماما على المجال $[a;b]$ فإن جدول تغيراتها يأخذ الشكل:

x	a	x_0	b
$f(x)$	$f(a)$ ↘	k	↘ $f(b)$

مثال:

لتكن f الدالة المعرفة على $]-\infty;2[$ بـ $f(x)=\dfrac{3}{x-2}$

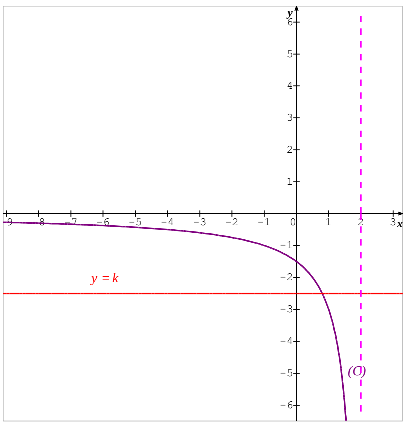
الدالة f مستمرة و متناقصة تماما على $]-\infty;2[$

و لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}} f(x)=-\infty$.

إذن من أجل كل عدد حقيقي k من $]-\infty;0[$ ،

المعادلة $f(x)=k$ تقبل حلا وحيدا x_0

في المجال $]-\infty;2[$.



تطبيق:

نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=x^3-1200x-100$

1. أحسب $g'(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة g.
2. أرسم التمثيل البياني للدالة g على شاشة حاسبة بيانية باختيار نافذة مناسبة.
3. بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[20;40]$.
4. باستعمال حاسبة بيانية أوجد حصرا لهذا الحل سعته 10^{-2}.

الحل:

1) الدالة g معرفة، مستمرة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.
ومن أجل كل x من $\mathbb{R}$، $g'(x)=3(x-20)(x+20)$ و $g(-20)=15900$ و $g(20)=-16100$

و لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$

x	$-\infty$		-20		20		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	15900	$\searrow$	-16100	$\nearrow$	$+\infty$

3) على المجال $[20;40]$، الدالة g مستمرة و متزايدة تماما .
لدينا $g(20)=-16100<0$ و $g(40)=15900>0$ و بمأن $-16100\le 0\le 15900$ أي $0\in[g(20);g(40)]$

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد وحيد $c\in[20;40]$ بحيث $g(c)=0$

4) لتعيين حصرا للحل c و باستعمال الحاسبة البيانية و باختيار الخطوة 0,01 يظهر الجدول القيم التالية
$g(34,68)=-6,280768$ و $g(34,69)=17,810709$ و منه نستنتج الحصر التالي:
$34,68<c<34,69$.
و هكذا نقرأ ..... $c\approx 34,6826$

تطبيقات

تمرين 56 ص 30 وتمرين 50 ص 29

تمارين محلولة

تمرين 01:

f دالة معرفة على R كما يلي:

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2-4}{x+2} & ;\quad x\neq -2 \\ f(-2)=-4 \end{cases}$$

1) أدرس استمرارية الدالة f عند (-2).
2) هل الدالة f مستمرة على R ؟

الحل:

1) من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن (-2)، يكون لدينا: $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x+2}$

$$=\frac{(x-2)(x+2)}{x+2}$$

ومنه $f(x)=x-2$

$\lim\limits_{x\to -2} f(x)=-4$ ومنه $\lim\limits_{x\to -2} f(x)=f(-2)$

f مستمرة عند (-2) .

إذن الدالة

مستمرة على المجالين $]-\infty;-2[$ و $]-2;+\infty[$ لأنها دالة ناطقة والدالة f مستمرة

2) الدالة $x\mapsto \dfrac{x^2-4}{x+2}$

عند (-2) فهي مستمرة على R.

تمرين 02:

f دالة معرفة على R كما يلي:
$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2+x-6}{x+3} & ,,,,x\neq -3\\ f(-3)=-5 \end{cases}$$

1) أدرس استمرارية الدالة f عند (-3) .

2) هل الدالة f مستمرة على R ؟

الحل:

1) من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن (-3) ، يكون لدينا: $f(x)=\dfrac{x^2+x-6}{x+3}$
$$=\frac{(x+3)(x-2)}{x+3}$$

ومنه $f(x)=x-2$

$\lim\limits_{x\to -3} f(x)=-5$ ومنه $\lim\limits_{x\to -3} f(x)=f(-3)$

إذن الدالة f مستمرة عند (-3) .

مستمرة على $]-\infty;-3[$ و $]-3;+\infty[$ لأنها دالة ناطقة والدالة f مستمرة

2) الدالة $\dfrac{x^2+x-6}{x+3}$ $x\mapsto$ المجالين

(-3) فهي مستمرة على R.

تمرين 03:

f دالة معرفة على R كما يلي:
$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^3+1}{x+1} & x\neq -1\\ f(-1)=3 \end{cases}$$

1) أدرس استمرارية الدالة f عند (-1) .

2) هل الدالة f مستمرة على R ؟

الحل:

1) من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن (-1):

يكون لدينا $f(x)=\dfrac{x^3+1}{x+1}=\dfrac{(x+1)(x^2-x+1)}{x+1}=x^2-x+1$ اذن

$\lim\limits_{x\to -1} f(x)=3$ ومنه $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=f(-1)$

إذن الدالة f مستمرة عند (-1) .

2) الدالة $x\mapsto \dfrac{x^3+1}{x+1}$ مستمرة على المجالين $]-\infty;-1[$ و $]-1;+\infty[$

لأنها دالة ناطقة والدالة مستمرة عند (-1) فهي مستمرة على R.

تمرين 04:

نعتبر الدالة f المعرفة على R كما يلي : $f(x)=(2x^2-3x+4)\cos x$

لماذا الدالة f مستمرة على R؟

الحل:

الدالة $x\mapsto \cos x$ مستمرة على R

الدالة $x\mapsto 2x^2-3x+4$ مستمرة على R لأنها دالة كثير حدود.

الدالة f هي جداء دالتين مستمرتين على R فهي مستمرة على R.

تمرين 05:

نعتبر الدالة f المعرفة على R كما يلي : $f(x)=\dfrac{\sin x}{x^2+3}$

أدرس استمرارية الدالة f .

الحل:

من أجل كل عدد حقيقي x، لدينا: $f(x)=\left(\dfrac{1}{x^2+3}\right)(\sin x)$

الدالة $x\mapsto \sin x$ مستمرة على R .

الدالة $x\mapsto \dfrac{1}{x^2+3}$ مستمرة على R لأنها دالة ناطقة معرفة على R.

الدالة f هي جداء دالتين مستمرتين على R فهي مستمرة على R.

تمرين 06:

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[0;2[$ كما يلي : $f(x)=x+1+E(x)$

حيث $x\mapsto E(x)$ هي دالة الجزء الصحيح .

1) أكتب ، حسب قيم x ، عبارة $f(x)$ بدون الرمز $E(x)$.

2) أرسم المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد من المستوى .

3) هل الدالة f مستمرة على المجال $[0;2[$ ؟

4) عين المجالات التي تكون فيها f مستمرة.

الحل:

1) لدينا:

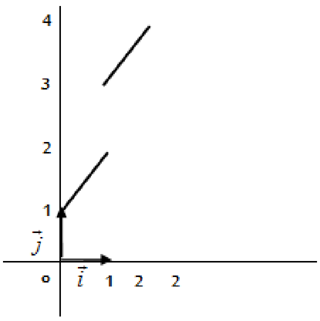
$E(x)=0$ إذا كان $0\le x<1$

$E(x)=1$ إذا كان $1\le x<2$

إذن:

$f(x)=x+1$ إذا كان $0\le x<1$

$f(x)=x+2$ إذا كان $1\le x<2$



2) رسم المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد من المستوي.

3) نلاحظ أنه لا يمكن رسم المنحنى الممثل للدالة f في المجال $[0;2[$ دون رفع القلم.

إذن الدالة f ليست مستمرة على المجال $[0;2[$.

4) الدالة f مستمرة على المجالين $[0;1[$ و $[1;2[$.

تمرين 07:

f دالة معرفة على R كما يلي: $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}, & x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

أدرس استمرارية الدالة f عند 0

الحل:

من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم،لدينا:

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}=\frac{(\sqrt{x^2+1}-1)(\sqrt{x^2+1}+1)}{x(\sqrt{x^2+1}+1)}$$

$$=\frac{x^2+1-1}{x(\sqrt{x^2+1}+1)}=\frac{x^2}{x(\sqrt{x^2+1}+1)}$$

إذن: $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+1}$ ومنه $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$

و بما أن $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$ فإن الدالة f مستمرة عند 0 .

تمرين 08:

نعتبر الدالة f المعرفة على R بـ: $\begin{cases} f(x)=\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x+2} & ,,,x\neq -2 \\ f(-2)=-\frac{2}{3} \end{cases}$

أدرس استمرارية الدالة f عند (-2).

الحل:

من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن (-2) ، يكون لدينا:

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x+2}=\frac{(\sqrt{x^2+5}-3)(\sqrt{x^2+5}+3)}{(x+2)(\sqrt{x^2+5}+3)}$$

$$=\frac{x^2-4}{(x+2)(\sqrt{x^2+5}+3)}=\frac{x^2+5-9}{(x+2)(\sqrt{x^2+5}+3)}$$

$$=\frac{(x+2)(x-2)}{(x+2)(\sqrt{x^2+5}+3)}$$ اذن $$f(x)=\frac{x-2}{\sqrt{x^2+5}+3}$$

و بما أن $\lim\limits_{x\to -2}f(x)=f(-2)$ فإن الدالة f مستمرة عند (-2).

تمرين 09:

نعتبر الدالة f المعرفة على R بـ: $\begin{cases} f(x)=\frac{x-3+\sqrt{x^2+9}}{x} & ,,,x\neq 0 \\ f(0)=\alpha \end{cases}$;

عين قيمة العدد الحقيقي α حتى تكون الدالة f مستمرة على R.

الحل:

الدالة $x\mapsto\frac{x-3+\sqrt{x^2+9}}{x}$ مستمرة على R^*.

إذن حتى تكون الدالة f مستمرة على R، يجب أن تكون مستمرة عند 0 أي $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$.

من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم،لدينا:

$$f(x)=\frac{x-3+\sqrt{x^2+9}}{x}=\frac{(x-3+\sqrt{x^2+9})(x-3-\sqrt{x^2+9})}{x(x-3-\sqrt{x^2+9})}$$

$$=\frac{x^2-6x+9-x^2-9}{x(x-3-\sqrt{x^2+9})}=\frac{(x-3)^2-(x^2+9)}{x(x-3-\sqrt{x^2+9})}$$

اذن $f(x)=\dfrac{-6}{x-3-\sqrt{x^2+9}}$ ومنه $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$

$=\dfrac{-6x}{x(x-3-\sqrt{x^2+9})}$

و بما أن $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$ فإن $\alpha=1$.

تمرين 10:

نعتبر الدالة f المعرفة على R بـ : $\begin{cases} f(x)=\alpha\times x^2-3\alpha^2.,,,x>0 \\ f(x)=2x-3.............x\le 0\end{cases}$

عين قيم العدد الحقيقي α التي من أجلها تكون الدالة f مستمرة عند 0 .

الحل:

حتى تكون الدالة f مستمرة عند 0 يجب أن يكون: $\alpha\times 0^2-3\alpha^2=2\times 0-3$ أي

$-3\alpha^2=-3$ إذن $\alpha=-1$ أو $\alpha=1$

تمرين 11:

أثبت باستعمال مبرهنة القيم المتوسطة أن المعادلة $4x^3+3=0$ تقبل على الأقل حلا في المجال $[-1;0]$.

الحل:

يمكن كتابة المعادلة $4x^3+3=0$ على الشكل $f(x)=-1$ حيث f هي الدالة المعرفة على Rبـ:

$f(x)=4x^3+3$.

الدالة f مستمرة على R لأنها دالة كثير حدود فهي مستمرة على المجال $[-1;0]$.

لدينا $f(-1)=-1$ و $f(0)=3$

نلاحظ أن العدد 0 محصور بين العددين $f(-1)$ و $f(0)$

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة ، المعادلة $4x^3+3=0$ تقبل حلا على الأقل في المجال $[-1;0]$.

تمرين 12:

أثبت باستعمال مبرهنة القيم المتوسطة أن المعادلة $x^3-2x+1=0$

تقبل على الأقل حلا في المجال $[-2;-1]$ ...

الحل:

يمكن كتابة المعادلة $x^3-2x+1=0$ على الشكل $f(x)=0$ حيث:

f هي الدالة المعرفة على R بـ : $f(x)=x^3-2x+1$

الدالة f مستمرة على R لأنها دالة كثير حدود فهي مستمرة على المجال $[-2;-1]$

لدينا $f(-2)=-3$ و $f(-1)=2$

نلاحظ أن العدد 0 محصور بين العددين $f(-2)$ و $f(-1)$.

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة ، المعادلة $x^3-2x+1=0$ على الأقل في المجال

تقبل حلا $[-2;-1]$.

تمرين 13: أثبت باستعمال مبرهنة القيم المتوسطة أن المعادلة

$x^3-3x^2+3=0$ تقبل على الأقل حلا في المجال $\left[1;\dfrac{3}{2}\right]$.

الحل:

يمكن كتابة المعادلة $x^3-3x^2+3=0$ على الشكل $f(x)=0$ حيث :

f هي الدالة المعرفة على R بـ : $f(x)=x^3-3x^2+3$

الدالة f مستمرة على R لأنها دالة كثير حدود فهي مستمرة على المجال $\left[1;\frac{3}{2}\right]$.

لدينا $f(1)=1$ و $f\left(\frac{3}{2}\right)=-\frac{3}{8}$

نلاحظ أن العدد 0 محصور بين العددين $f\left(\frac{3}{2}\right)$ و $f(1)$.

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة $x^3-3x^2+3=0$ تقبل حلا على الأقل في المجال $\left[1;\frac{3}{2}\right]$.

، المعادلة

تمرين 14:

أثبت باستعمال مبرهنة القيم المتوسطة أن $x^4-3x+1=0$ تقبل على الأقل حلا في المجال $[0;1]$.

المعادلة

الحل:

يمكن كتابة المعادلة $x^4-3x+1=0$ على الشكل $f(x)=0$ حيث:

f هي الدالة المعرفة على R بـ : $f(x)=x^4-3x+1$

الدالة f مستمرة على R لأنها دالة كثير حدود فهي مستمرة على المجال $[0;1]$.

لدينا $f(0)=1$ و $f(1)=-1$

نلاحظ أن العدد 0 محصور بين العددين $f(1)$ و $f(0)$.

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة ، $x^4-3x+1=0$ تقبل حلا على الأقل في المجال $[0;1]$.

المعادلة

تمرين 15:

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[0;1]$ بـ : $f(x)=x^4+x-0{,}537$

1) أحسب $f'(x)$.

2) ماذا تستنتج بالنسبة للدالة f .

3) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[0;1]$.

الحل:

1) الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $[0;1]$ ، ولدينا: $f'(x)=4x^3+1$

2) من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0;1]$ ، لدينا : $f'(x)>0$

إذن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;1]$.

3) الدالة f مستمرة على R لأنها دالة كثير حدود فهي مستمرة على المجال $[0;1]$.

لدينا $f(0)=-0{,}537$ و $f(1)=1{,}463$

نلاحظ أن العدد 0 محصور بين العددين $f(0)$ و $f(1)$

إذن، حسب مبرهنة القيم المتوسطة. المعادلة $f(x)=0$ تقبل على الأقل حلا x_0 في المجال $[0;1]$.

وبما أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;1]$ فإن x_0 وحيد.

تمرين 16:

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[-2;2]$ بـ : $f(x)=2x^3-3x^2-1$

1) أحسب $f'(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

2) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[1;2]$.

الحل:

1) الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $[-2;2]$ ولدينا: $f'(x)=6x^2-6x$

أي $f'(x)=6x(x-1)$

يكون $f'(x)=0$ إذا كان $x=0$ أو $x=1$

$f(0)=-1$ ، $f(1)=-2$ ، $f(-2)=-29$ ، $f(2)=3$

جدول تغيرات الدالة f :

طريقة التنصيف

طرق حل المعادلة: $f(x)=0$

1)طريقة التنصيف (Halving the interval) :

لنفرض أننا نريد حل المعادلة $f(x)=0..............(1)$

و أخذنا القيم التقريبية للحل x_1,x_2 من أجل ذلك $f(x_1),f(x_2)$ من إشارتين مختلفتين أي أن:

$f(x_1)\times f(x_2)<0$ حيث أن $f(x)$ تابع مستمر في المجال $[x_1;x_2]$

لذلك يوجد حل للمعادلة (1) ضمن هذا المجال ولنحاول الآن إيجاد القيمة التقريبية x_3

من أجل ذلك نوجد $x_2\le x_3\le x_1$ وَ $f(x_3)=0$.

أسهل طريقة لاختيار x_3 أن نأخذ $x_3=\frac{x_2+x_1}{2}$:

و لنحسب $f(x_3)$، فإذا كان $f(x_1)\times f(x_3)<0$:

نختار المجال $[x_3;x_1]$ نختار قيمة جديدة x_4 بحيث يكون $x_4=\frac{x_3+x_1}{2}$ ، أما إذا كان

$f(x_1)\times f(x_3)<0$

فإن $f(x_2)\times f(x_3)<0$ ونختارالمجال $[x_3;x_2]$ نختار القيمة . $x_4=\frac{x_3+x_2}{2}$

و نستمر بنفس الطريقة حتى نحصل على $|f(x_n)|$ بحيث

تكون إما صغيرة جداً و قريبة من الصفر بالقدر الكافي أو $|x_{i+1}-x_i|\prec\varepsilon$: ، حيث أن ε قيمة صغيرة.

إن هذه الطريقة تعرف باسم التنصيف أو طريقة تقسيم المجال .

مثال باستعمال نظرية القيم المتوسطة عين حل للمعادلة $x^3-3x^2+3=0$ على المجال $[1,2]$

الحل: الدالة f المعرفة كما يلي $f(x)=x^3-3x^2+3$

معرفة ومستمرة على $\mathbb{R}$ فهي مستمرة على $[1,2]$ لانها دالة كثير حدود

نعلم ان الدالة تقبل الاشتقاق على المجال $[1,2]$ ودالتها المشتقة $f'(x)=3x^2-6x$ تنعدم عند

ال0 و 2

جدول تغيراتها هو

x	$-\infty$ 0 2 $+\infty$
$f'(x)$	+ - +

المجال $[1,2]$ الدالة متناقصة تماما اذن هي رتيبة

نعلم ان $f(1)=1^3-3(1)^2+3=1$ و $f(2)=2^3-3(2)^2+3=-1$ وبالتالي

$f(x_1)\times f(x_2)<0$

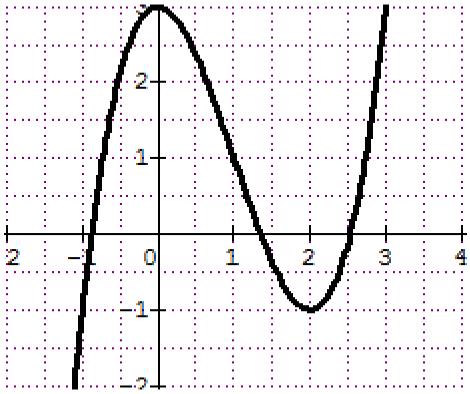
حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حل وحيد α

لأيجاد الحل نأخذ $x_3=\frac{1+2}{2}=\frac{3}{2}$: و بما ان $f(x_3)=f(3/2)=-0.375$

$f(3/2)\times f(1)<0$ نأخذ المجال $\left[1,3/2\right]$ ثم باخذ $x_4=\frac{2+3/4}{}=5/4$

و بما ان $f(x_4)=f(5/4)=0.27$ اذن $f(3/2)\times f(5/4)<0$ نأخذ $x_5=11/8$

وبما أن $f(x_5)=f(11/8)\simeq 0$ فان $\alpha=11/8$



طريقة نيوتن – رافسون (المماسات):

عند اختيار النقط x_1,x_2 بشكل متقارب من بعضهما البعض فإن الخط الواصل ما بين النقطتين

$P(x_1,f(x_1))\,Q(x_2,f(x_2))$ يستبدل بالمماس عند النقطة P و بالتالي

فإن $x_3=x_2.f(x_2)-x_1.f(x_1)/f(x_2)-f(x_1)$

و عندما يكون $x_2=x_1+h$: فإن: $f(x_2)=f(x_1)+hf'(x_1)$ وبالتالي:

$x_3=x_1.\left[f(x_1)+hf'(x_1)\right]-(x_1+h)f(x_1)/hf'(x_1)$

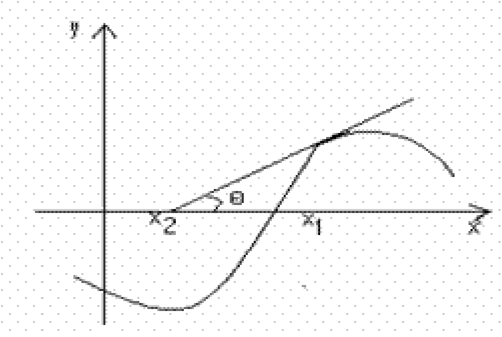
أي إن $x_3=x_1-(f(x_1)/f'(x_1))$: و هذه العلاقة يمكن استنتاجها مباشرة و ذلك بإيجاد نقطة تقاطع مماس التابع

$y=f(x)$ عند النقطة x_1 مع المستقيم: $y=0$

$\tan\theta=f'(x_1)=\dfrac{f(x_2)}{x_1-x_2}$ وبالتالي $x_2=x_1-(f(x_1)/f'(x_1))$:

و بشكل عام يمكن كتابة العلاقة السابقة كما يلي $x_{n+1}=x_n-(f(x_n)/f'(x_n))$:

و هذه الطريقة تعرف باسم نيوتن



دالة الجزء الصحيح

تعريف: نسمي الدالة الجزء الصحيح الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ و التي ترفق بكل عدد حقيقي x العدد الصحيح n حيث $n \le x < n+1$ و نرمز لها بالرمز E أو $[\ ]$.

1) أحسب $[-2,3]$ ، $E(-1)$ ، $\left[\sqrt{3}\right]$ و $E(11,01)$.

2) نعتبر الدوال f ، g و h المعرفة على المجال $[-2;1[$ كما يلي:

$f(x)=[x]$ ، $g(x)=x-[x]$ ، $h(x)=x^2+1$ و لتكن (C_f) ، (C_g) ، (C_h) تمثيلاتها البيانية على الترتيب.

- أرسم في معالم مختلفة التمثيلاكت البيانية (C_f) ، (C_g) و (C_h).
- هل بإمكانك رسم المنحنيات (C_f) ، (C_g) و (C_h) بدون رفع القلم (اليد) ؟
- هل تقبل الدوال f ، g و h نهاية عند -1 ؟ عند 0 ؟
- أكتب خلاصة.

الحل:

1) حساب $[-2,3]$ ، $E(-1)$ ، $\left[\sqrt{3}\right]$ و $E(11,01)$.

$-3 \le -2,3 < -2$ ومنه $[-2,3]=-3$ ، $E(-1)=-1$ ، $1 \le \sqrt{3} < 2$ ومنه $\left[\sqrt{3}\right]=1$

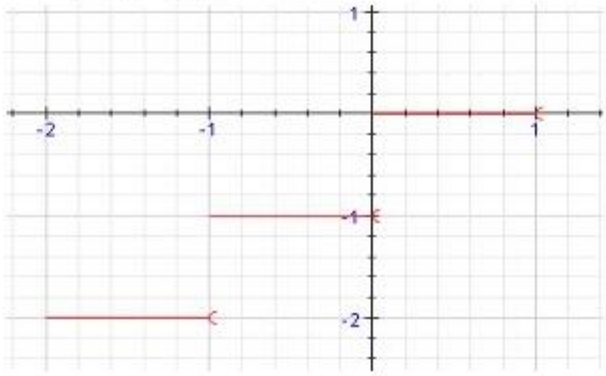
$E(11,01)=11$

(نعتبر الدوال f ، g و h المعرفة على المجال $[-2;1[$ كما يلي:

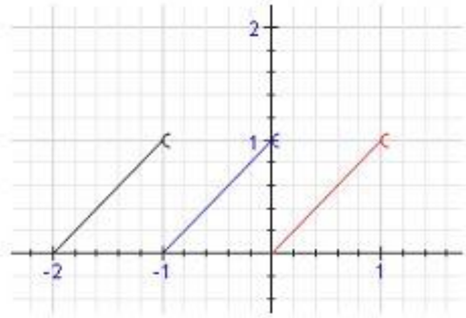
$f(x)=[x]$ ، $g(x)=x-[x]$ ، $h(x)=x^2+1$ و لتكن (C_f) ، (C_g) ، (C_h) تمثيلاتها البيانية على الترتيب.

- رسم في معالم مختلفة التمثيلات البيانية (C_f) ، (C_g) و (C_h).

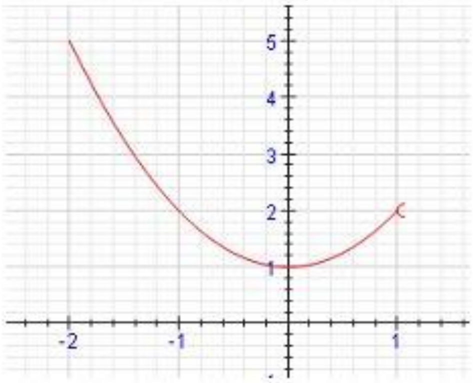
1 (C_f) : $f(x)=[x]$ لدينا : $f(x)=\begin{cases} -2\ ; x\in[-2;-1[\\ -1\ ; x\in[-1;0[\\ 0\ ; x\in[0;1[\end{cases}$



1 - (C_g) : $g(x)=x-[x]$ ، $g(x)=\begin{cases} x+2 \ ; x\in[-2;-1[\\ x+1 \ ; x\in[-1;0[\\ x \ ; x\in[0;1[\end{cases}$



3- $h(x)=x^2+1$



- هل بإمكانك رسم المنحنيات (C_f) ، (C_g) و (C_h) بدون رفع القلم (اليد) ؟
- لا يمكن رسم المنحنيين (C_f) ، (C_g) دون رفع القلم (اليد)
- بينما يمكن رسم المنحني (C_h) دون رفع القلم (اليد)
- هل تقبل الدوال f ، g و h نهاية عند -1 ؟ عند 0 ؟
- الدالتان f ، g لا تقبلان نهاية عند **1−** وكذا عند الصفر

- الدالة h تقبل نهاية عند -1 و عند 0 لأنها معرفة عندهما : $h(-1)=2$ و $h(0)=1$
- خلاصة: يمكن رسم المنحني (C_h) دون رفع القلم (اليد) ، فنقول إن الدالة h مستمرة علي المجال $]-2;1[$.
- اما f ، g فهما غير مستمرتين علي المجال $]-2;1[$

مهدي سليمان

/http://slimanemath.ahlamontada.com

Regle de l'Hôpital شرح قاعدة

تستعمل هذه قاعدة (R.H) في الحالات ونوع شكل غير محدد من نوع $\frac{0}{0}$ و $\frac{\infty}{\infty}$

خاصية (R.H) .

$$\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{h(x)} = \lim_{x \to a} \frac{g'(x)}{h'(x)}$$

مثال

$$\lim_{x \to 4} f(x) = \lim_{x \to 4} \frac{x^2 - 8x + 16}{x^2 - 16} = \frac{0}{0} \text{ F.I}$$

شكل غير محدد