نهائي رياضيات وعلوم

2016 الأستمرارية

الدرس الثاني

الكفاءة المستهدفة

- حساب نهاية منتهية أو غير منتهية لدالة عند الحدود(المنتهية أو غير المنتهية) لمجالات مجموعة التعريف.
- حساب نهاية باستعمال المبرهنات المتعلقة بالعمليات على النهايات أو المقارنة وتركيب دالتين.
- دراسة السلوك التقاربي لدالة
- استعمال مبرهنة القيم المتوسطة لإثبات وجود حلول للمعادلة $f(x)=k$ ، k عدد حقيقي معطى.

المكتسبات القبلية

- حساب النهايات عند اطراف مجموعة التعريف لدوال مالوفة
- استعمال مبرهنة القيم المتوسطة
- استعمال المشتقات لحل المشكلات

سـيـر الدرس	التوقيت
نشاط 1: مفهوم الاستمرارية 2:استمرارية دالة عند عدد 3: الاستمرارية من اليمين واليسار 4: استمرارية دالة على مجال 5: خواص الاستمرارية 6:مبرهنة القيم المتوسطة 7:الدالة المستمرة والرتيبة	1:سا 1:سا 1:سا 1:سا 1:سا 2:سا

وثائق التحضير	الوسائل البيداغوجية	نقد ذاتي
• دليل الأستاذ • الكتاب المدرسي • المنهاج • الهباج في الرياضيات • الجديد في الرياضيات	• السبورة • جهاز داتاشو	

المؤسســـــــة:	المستـــــــــوى: الثالثة علوم
السنة الدراسية:	ميــدان التعلم: تحليل
التاريـــــــخ:	الوحدة التعلمية: النهايات والاستمرارية
توقيت الحصة :	موضوع الحصة : مفهوم الاستمرارية

المكتسبات القبلية حساب نهاية دالة على مجال تعريفها

- حساب نهاية منتهية أو غير منتهية لدالة عند الحدود (المنتهية أو غير المنتهية) لمجالات مجموعة التعريف.

الأنشطة المقترحة وطبيعتها	الإنجاز (سـير الحصة)	التعليمات والتوجيهات

الأنشطة المقترحة وطبيعتها

نشاط:

المستوى مزود بمعلم ولتكن الدوال المعرفة بعباراتها: $f(x)=x^2$، $g(x)=\sqrt{x-1}$، $h(x)=[x]$.

- جد مجموعات تعريفها
- أحسب $f(1)$، $g(1)$، $h(1)$، $\lim\limits_{x\to1} f(x)$، $\lim\limits_{x\to1} g(x)$، $\lim\limits_{x\to1} h(x)$.
- مثل بيانيا هذه الدوال.

الإنجاز (سـير الحصة)

نـــــشاط

تعريف: نسمي الدالة الجزء الصحيح الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ و التي ترفق بكل عدد حقيقي x العدد الصحيح n حيث $n \le x < n+1$ و نرمز لها بالرمز E أو $[\ ]$.

1) أحسب $[-2,3]$، $E(-1)$، $\left[\sqrt{3}\right]$ و $E(11,01)$.

2) نعتبر الدوال f، g و h المعرفة على المجال $[-2;1[$ كما يلي:
$f(x)=[x]$ ، $g(x)=x-[x]$ ، $h(x)=x^2+1$ و لتكن (C_f)،(C_g)،(C_h) تمثيلاتها البيانية على الترتيب.

- أرسم في معالم مختلفة التمثيلات البيانية (C_f)،(C_g) و(C_h).
- هل بإمكانك رسم المنحنيات (C_f)،(C_g) و(C_h) بدون رفع القلم (اليد) ؟
- هل تقبل الدوال f، g و h نهاية عند -1 ؟ عند 0 ؟
- أكتب خلاصة

الحل:

1) أحسب $[-2,3]$، $E(-1)$، $\left[\sqrt{3}\right]$ و $E(11,01)$.

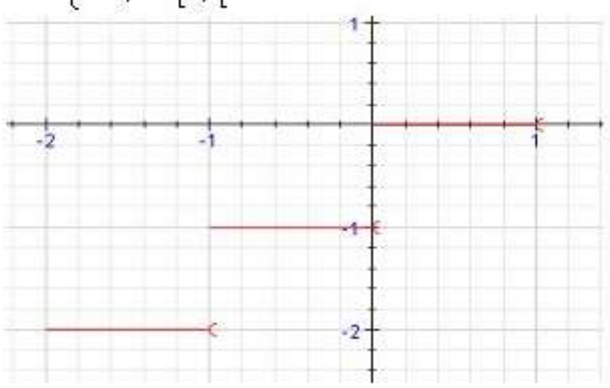
لدينا $-2 \prec -2,3 \le -3$ ومنه $[-2,3]=-3$: $E(-1)=-1$ " $1 \le \sqrt{3} \le 2$ ومنه

$\left[\sqrt{3}\right]=1$: $E(11,01)=11$

2) نعتبر الدوال f، g و h المعرفة على المجال $[-2;1[$ كما يلي:
$f(x)=[x]$ ، $g(x)=x-[x]$ ، $h(x)=x^2+1$ و لتكن (C_f)،(C_g)،(C_h) تمثيلاتها البيانية على الترتيب.

- رسم في معالم مختلفة التمثيلات البيانية (C_f)،(C_g) و(C_h).

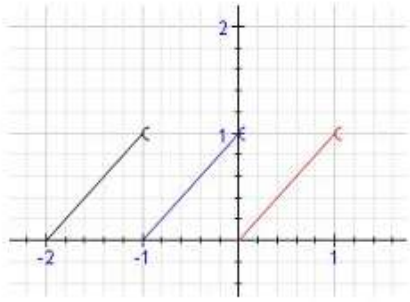
1 (C_f) : لدينا $f(x)=[x]$: $f(x)=\begin{cases}-2\ ; x\in[-2;-1[\\ -1\ ; x\in[-1;0[\\ 0\ ; x\in[0;1[\end{cases}$



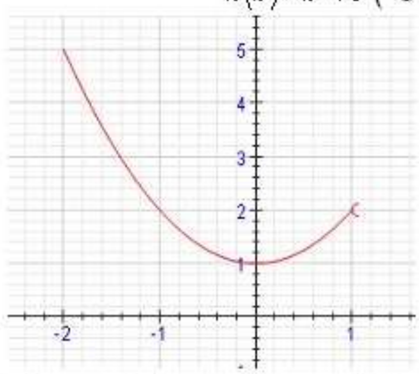
التعليمات والتوجيهات

- من أجل كل عدد حقيقي a غير معزول في مجموعة تعريف الدالة f؛ نعرف استمرارية f عند a كما يلي: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$
- من خلال دوال مثل: $x \mapsto x^2$،
- $x \mapsto |x|$،
- $x \mapsto \sqrt{x}$
- نجعل التلاميذ يلاحظون أن الدالة تكون مستمرة على مجال، عندما يمكن رسم منحنها البياني على هذا المجال دون رفع القلم.
- تقترح أمثلة لدوال غير مستمرة مثل: $x \mapsto [x]$.
- $x \mapsto x-[x]$، مع تمثيلهما بيانيا. حيث يرمز $[x]$ إلى الجزء الصحيح للعدد الحقيقي x.
- كل الدوال المألوفة المقررة في هذا المستوى مستمرة على كل مجال من مجموعة تعريفها.
- لا تثار مسألة البحث في إثبات استمرارية دالة إلا في حالات بسيطة.

$$g(x) = x - [x] : (C_g) - 1 \quad ، \quad g(x) = \begin{cases} x + 2 \; ; x \in [-2;-1[\\ x + 1 \; ; x \in [-1;0[\\ x \; ; x \in [0;1[\end{cases}$$



3- $h(x) = x^2 + 1$



- هل بإمكانك رسم المنحنيات (C_f)، (C_g) و (C_h) بدون رفع القلم (اليد) ؟
- لا يمكن رسم المنحنيين (C_f)، (C_g) دون رفع القلم (اليد)
- بينما يمكن رسم المنحني (C_h) دون رفع القلم (اليد)
- هل تقبل الدوال f، g و h نهاية عند -1 ؟ عند 0 ؟
- الدالتان f، g لا تقبلان نهاية عند -1 وكذا عند الصفر

- الدالة h تقبل نهاية عند -1 و عند 0 لأنها معرفة عندهما : $h(-1) = 2$ و $h(0) = 1$
- خلاصة: يمكن رسم المنحني (C_h) دون رفع القلم (اليد) ، فنقول إن الدالة h مستمرة على المجال $[-2;1]$.
- اما f، g فهما غير مستمرتين على المجال $[-2;1]$

- من أجل كل عدد حقيقي a غير معزول في مجموعة تعريف الدالة f، نعرف استمرارية f عند a كما يلي: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$
- من خلال دوال مثل: $x \mapsto x^2$، - $x \mapsto |x|$، - $x \mapsto \sqrt{x}$
- نجعل التلاميذ يلاحظون أن الدالة تكون مستمرة على مجال، عندما يمكن رسم منحنيها البياني على هذا المجال دون رفع القلم.
- تقترح أمثلة لدوال غير مستمرة مثل: $x \mapsto [x]$، - $x \mapsto x - [x]$، مع تمثيلهما بيانيا. حيث يرمز $[x]$ إلى الجزء الصحيح للعدد الحقيقي x.
- كل الدوال المألوفة المقررة في هذا المستوى مستمرة على كل مجال من مجموعة تعريفها.
- لا تثار مسألة البحث في إثبات استمرارية دالة إلا في حالات بسيطة.

1/2 الأستمرارية

1.1.2. استمرار دالة عند

مثال تمهيدي 01:

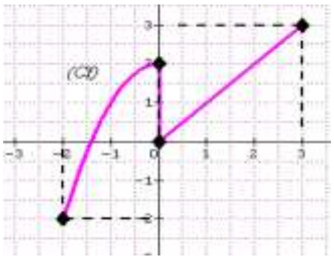
لتكن f الدالة المعرفة على : $[-2,3]$ ب: $f(x)=\begin{cases} -x^2+2, x\in[-2,0[\\ x, \quad x\in[0,3] \end{cases}$

1-مثل بيانيا الدالة f. هل تقبل الدالة f نهاية عند 0؟

2- هل الدالة f مستمرة على المجال : $[-2,3]$ ؟ أذكر مجالا تكون فيه الدالة مستمرة.

الحل: 1-

** أنظر الشكل .لدينا من جهة $\lim\limits_{x \overset{<}{\longrightarrow} 0} f(x)=2$ و من جهة ثانية $\lim\limits_{x \overset{>}{\longrightarrow} 0} f(x)=0$



اذن الدالة f لا تقبل نهاية عند 0.

2- الدالة f غير مستمرة عند 0 وبالتالي فهي غير مستمرة على المجال : $[-2,3]$.

الدالة f مستمرة مثلا على المجال : $[0,3]$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)=-\infty$

تعريف

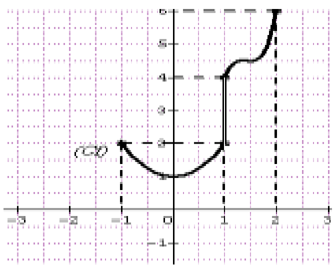
f دالة مجموعة تعريفها I و a عدد حقيقي غير معزول من I.

القول أن الدالة f مستمرة عند a يعني أن نهاية الدالة f عند a هي $f(a)$

f مستمرة عند a يعني أن $\lim\limits_{x \to a} f(x)=f(a)$

ملاحظة: القول أن f مستمرة على مجال $J\subset I$ يعني أن f مستمرة عند كل عدد حقيقي من J.

التفسير البياني : تكون الدالة f مستمرة على مجال $J\subset I$ عندما يمكن رسم منحناها على هذا المجال دون رفع القلم .



مثـــــال 01:

هل الدالة الممثلة في الشكل مستمرة على المجال $[-1,2]$ ؟

الجواب: لا لن منحناها متقطع

مثـــــال 02:

لتكن f الدالة المعرفة على : $]-2,2[$ ب:

$$f(x)=\begin{cases} -x, x\in]-2,0] \\ x^2, x\in]0,2[\end{cases}$$

1-مثل بيانيا الدالة f. هل تقبل الدالة f نهاية عند 0؟

2- هل الدالة f مستمرة على المجال : $]-2,2[$ ؟

مثال:

الدالة $f(x)=x^2+1$ مستمرة عند ال `0` لأن:

1) الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ وهو مجال مفتوح يشمل ال 0

2) $f(0)=0^2+1=1$ و $\lim\limits_{x \overset{>}{\longrightarrow} 0} f(x)=1$

- من أجل كل عدد حقيقي a غير معزول في مجموعة تعريف الدالة f؛ نعرف استمرارية f عند a كما يلي: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$

- من خلال دوال مثل: $x\mapsto x^2$

- ، $x\mapsto |x|$ ،

- $x\mapsto \sqrt{x}$

- نجعل التلاميذ يلاحظون أن الدالة تكون مستمرة على مجال، عندما يمكن رسم منحنها البياني على هذا المجال دون رفع القلم.

- تقترح أمثلة لدوال غير مستمرة مثل: $x\mapsto [x]$ ،

- $x\mapsto x-[x]$, مع تمثيلها بيانيا. حيث يرمز $[x]$ إلى الجزء الصحيح للعدد الحقيقي x .

- كل الدوال المألوفة المقررة في هذا المستوى مستمرة على كل مجال من مجموعة تعريفها.

- لا تثار مسألة البحث في إثبات استمرارية دالة إلا في حالات بسيطة.

2.2.2.استمرار دالة عند عدد

1.2: من اليمين

تعريف
f دالة مجموعة معرفة على $[x_0;a[$ و $a \succ 0$ القول أن الدالة f مستمرة عند a من اليمين يعني أن $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ \succ}} f(x) = f(a)$

مثال نعتبر الدالة f المعرفة على $[-2;4[$ كما يلي:

$$\begin{cases} f(x) = x^2 + x \ ; & x \in [-2;1[\\ f(x) = x - 1 \ ; & x \in [1;4[\end{cases}$$

1) بين انها مستمرة على يمين ال 1

الحل:

لدينا $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ \succ}} f(x) = \lim\limits_{\succ} x - 1 = 0$ و كذلك $f(1) = 1 - 1 = 0$ الدالة مستمرة على يمين 1

2.2: من اليسار

تعريف
f دالة مجموعة معرفة على $[x_0;a[$ و $a \prec 0$ القول أن الدالة f مستمرة عند a من اليسار يعني أن $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ \prec}} f(x) = f(a)$

مثال نعتبر الدالة f المعرفة على $[-2;4[$ كما يلي:

$$\begin{cases} f(x) = x^2 + x \ ; & x \in [-2;1[\\ f(x) = x - 1 \ ; & x \in [1;4[\end{cases}$$

1) بين انها مستمرة على يسار ال 1

الحل:

لدينا $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ \prec}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ \prec}} (x^2 + x) = 2$ و كذلك $f(1) = 2$ الدالة مستمرة على يسار 1

ملاحظة1: القول أن f مستمرة على يمين ويسار عدد يعني أن f مستمرة عند هذا العدد والعكس

ملاحظة2: ادا كانت f مستمرة عند a (على يمين ويسار) فهي معرفة عنده

مثال : لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$\begin{cases} f(x) = x^2 - 2x + 1 \ ; & x \le 2 \\ f(x) = x^2 + x - 5 \ ; & x > 2 \end{cases}$$

1) ادرس استمرارية الدالة f عند 2 .

2) هل الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$ ؟ لماذا؟

الحل

لدينا $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ \succ}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ \succ}} (x^2 - 2x + 1) = 1$ و $f(2) = 1$ الدالة مستمرة على يمين 2

ولدينا $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ \prec}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ \prec}} (x^2 + x - 5) = 1$ و $f(2) = 1$ الدالة مستمرة على يسار 2

ومنه الدالة مستمرة عند ال 2

3.2: على مجال

تعريف

f دالة معرفة على مجال مفتوح I

اذا كانت الدالة f مستمرة عند كل a من I فانها مستمرة على I

ملاحظة1: اذا كانت الدالة f معرفة على المجال $[a;b]$ و مستمرة على $]a;b[$ وعلى a من اليمين وعلى b من اليسار.نقول أنها مستمرة على $[a;b]$

نتيجة(هندسيا): اذا كانت الدالة f مستمرة على $[a;b]$ فان تمثيلها البياني هو خط غير منقطع حداه طرفي المجال ينطبق هذا على الدوال كثيرات الحدود

2/2 خواص الاستمرارية

خواص :(تقبل بدون برهان)

نقبل بأن كل الدوال المقررة في هذا المستوى والمحصل عليها بالعمليات على الدوال المألوفة أو بتركيبها مستمرة على كل مجال من مجموعة تعريفها.

نتائج:

الدوال المرجعية مستمرة على مجال تعريفها.

الدوال كثيرات الحدود ، SIN، COS مستمرة على R.

الدوال الناطقة (حاصل قسمة كثيري حدود) مستمرة على مجال تعريفها.

أمثلة :

- الدالة : $x \longrightarrow x^3 - 2x + 4$ مستمرة على R.
- الدالة $x \longrightarrow \dfrac{x^2 - 3x + 4}{x - 1}$ مستمرة على $]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$.

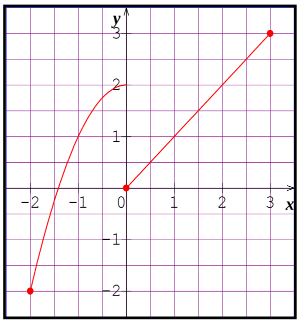
تمرين محلول1: لتكن f الدالة المعرفة على $[-2;3]$ كما يلي:

$f(x) = -x^2 + 2$ إذا كان $x \in [-2;0[$

$f(x) = x$ إذا كان $x \in [0;3]$

1. مثل بيانيا الدالة f. هل تقبل الدالة f نهاية عند 0 ؟
2. هل الدالة f مستمرة على $[-2;3]$ ؟ أذكر مجالا تكون الدالة f مستمرة عليه.

الحل:



1. أنظر الشكل المقابل. لدينا من جهة $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = 2$ و لدينا من جهة ثانية $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = 0$. إذن لا تقبل الدالة f نهاية عند 0.
2. الدالة غير مستمرة عند0 و بالتالي فهي غير مستمرة على $[-2;3]$.

نلاحظ أنه غير ممكن رسم تمثيلها البياني دون رفع القلم.

الدالة f مستمرة مثلا على المجال $[0;3]$.

تمرين منزلي

تمرين رقم 44 الصفحة 29

تمرين رقم : 45 صفحة : 29

تمرين محلول2: نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ بِـ $f(x)=(x^2+x+1)\cos x$

بين أن الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$.

الحل: الدالتان $x\mapsto \cos x$ و $x\mapsto x^2+x+1$ مستمرتان على $\mathbb{R}$.

الدالة f هي جداء دالتين مستمرتين على $\mathbb{R}$ فهي إذن مستمرة على $\mathbb{R}$.

تمرين محلول3: نعتبر الدالة f المعرفة على $[-1;2[$ بِـ: $f(x)=xE(x)+1$

حيث الدالة $x\mapsto E(x)$ هي الدالة الجزء الصحيح (أنظر النشاط الأول)

1. عين عبارة $f(x)$ على كل من المجالات التالية: $[-1;0[$ ، $[0;1[$ و $[1;2[$.
2. أرسم في معلم $(O;I,J)$ المنحنى الممثل للدالة f.
3. هل الدالة f مستمرة على المجال $[-1;1[$؟ على المجال $[-1;2[$؟

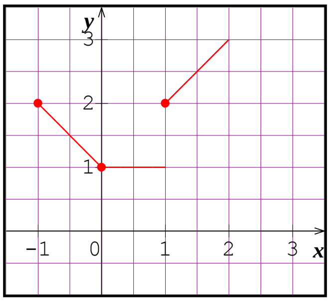
الحل

1. من أجل $x\in[-1;0[$ لدينا $E(x)=-1$ ومنه $f(x)=-x+1$

من أجل $x\in[0;1[$ لدينا $E(x)=0$ ومنه $f(x)=1$

من أجل $x\in[1;2[$ لدينا $E(x)=1$ ومنه $f(x)=x+1$

2. انظر الشكل المقابل.



3. نعم الدالة f مستمرة على المجال $[-1;1[$ لأنه بإمكاننا رسم جزء المنحنى في هذا المجال دون رفع القلم.

الدالة f ليست مستمرة على المجال $[-1;2[$ لأنها غير مستمرة عند 1 كما نلاحظ أنه لا يمكن رسم منحنيها البياني دون رفع القلم.

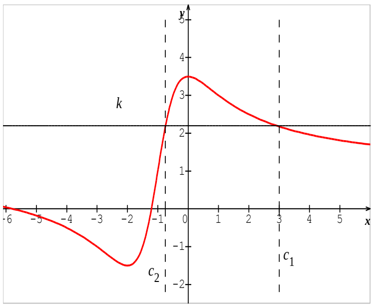
3.2 مبرهنة القيم المتوسطة

مبرهنة

f دالة معرفة و مستمرة على مجال $[a;b]$.

من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$. يوجد على الأقل عدد حقيقي c محصور بين a و b بحيث : $f(c)=k$.

3/2 /1 التفسير البياني



f دالة معرفة و مستمرة على مجال $[a;b]$ وليكن (L) منحنيها البياني في معلم $(O;I,J)$.

من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ ، المستقيم (D) ذو المعادلة $y=k$ يقطع على الأقل مرة واحدة المنحنى (L) في نقطة فاصلتها c محصورة بين a و b.

(بالنسبة للشكل المقابل (D) يقطع (L) في نقطتين فواصلها على الترتيب c_1 و c_2).

2/3/2 المعادلة $f(x)=k$

إذا كانت f دالة معرفة و مستمرة على مجال $[a;b]$ فإنه من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$. المعادلة $f(x)=k$ تقبل على الأقل حلا c محصورا بين a و b.

حالة خاصة: إذا كانت f دالة مستمرة على مجال $[a;b]$

و كان $f(a)\times f(b)<0$ (العدد 0 محصور بين $f(a)$ و $f(b)$)

فإنه يوجد على الأقل عدد حقيقي c محصور بين a و b بحيث $f(c)=0$

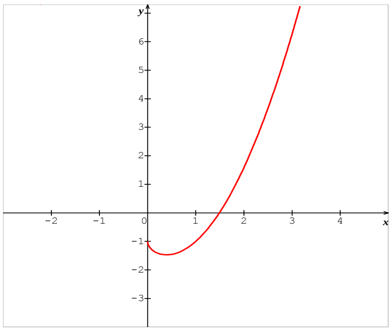
أي أن f تنعدم على الأقل مرة واحدة على $[a;b]$.

ملاحظة: مبرهنة القيم المتوسطة تؤكد فقط وجود حل على الأقل للمعادلة $f(x)=k$

أما تعيين الحلول أو قيم مقربة لها فيتم بإتباع خوارزميات مختلفة.

مثال: لتكن f الدالة المعرفة على المجال $[0;+\infty[$

بـ $f(x)=x^2-\sqrt{x}-1$



f دالة معرفة و مستمرة على $[0;+\infty[$

لدينا $f(1)=-1$ و $f(2)=3-\sqrt{2}$.

العدد 0 محصور بين $f(1)$ و $f(2)$ ، ومنه

حسب مبرهنة القيم المتوسطة. المعادلة $f(x)=0$

تقبل على الأقل حلا محصورا بين 1 و 2.

تمرين: برهن باستعمال مبرهنة القيم المتوسطة.

أن المعادلة $x^3+5x+1=0$ تقبل على الأقل حلا في المجال $]-0,20;-0,19[$.

طريقة: لإثبات وجود حلول معادلة على مجال $[a;b]$ باستعمال مبرهنة القيم المتوسطة نتبع الخطوات التالية:

- نكتب المعادلة على الشكل $f(x)=k$.
- نتحقق من استمرارية الدالة f على المجال $[a;b]$.
- نتحقق من أن العدد k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$.

الحل: يمكن كتابة المعادلة $x^{3}+5x+1=0$ على الشكل $f(x)=0$

حيث f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x^{3}+5x+1$

الدالة f دالة كثير حدود و بالتالي فهي مستمرة على $\mathbb{R}$ و من ثم على المجال $]-0,20;-0,19[$.

لدينا $f(-0,20)=-0,008$ و $f(-0,19)=0,04314$ ومنه لدينا

الدالة f مستمرة على $]-0,20;-0,19[$ و $f(-0,20)\times f(-0,19)<0$

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد α بحيث $f(\alpha)=0$.

ومنه المعادلة $x^{3}+5x+1=0$ لها حل α في المجال $]-0,20;-0,19[$.

ملاحظة: يمكن مراقبة النتيجة باستعمال حاسبة بيانية بحيث يتم

تمثيل الدالة f ثم ملاحظة تقاطعها مع حامل محور الفواصل.

تمرين تطبيقي:

برهن باستعمال مبرهنة القيم أن المعادلة $x^3+x=-1$ تقبل حلا على الأقل في المجال $[-1;0]$.

الحل:

يمكن كتابة المعادلة $x^3+x=-1$ على $f(x)=-1$ حيث f هي الدالة المعرفة على **R** بـ :

$f(x)=x^3+x$.

الدالة f مستمرة على **R** لأنها دالة كثير حدود فهي مستمرة على $[-1;0]$.

لدينا $f(-1)=-2$ و $f(0)=0$

نلاحظ أن العدد (-1) محصور بين العددين $f(-1)$ و $f(0)$

إذن حسب مبرهنة القيم $x^3+x=-1$ تقبل حلا على الأقل في المجال $[-1;0]$.

المتوسطة ، المعادلة

4/2: الدوال المستمرة والرتيبة تماما على مجال

مبرهنة : إذا كانت f دالة مستمرة و رتيبة تماما على مجال $[a;b]$ فإنه من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$. المعادلة $f(x)=k$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[a;b]$.

البرهان: نفرض أن الدالة f مستمرة و رتيبة تماما على المجال $[a;b]$.
و ليكن k عدد حقيقي محصور بين $f(a)$ و $f(b)$. ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة، يوجد على الأقل عدد حقيقي c محصور بين a و b بحيث $f(c)=k$.
لنفرض أنه يوجد عدد حقيقي آخر c' مختلف عن c، محصور بين a و b و يحقق $f(c')=k$.
يكون لدينا حينئذ $c\neq c'$ و $f(c)=f(c')$ و هذا يناقض الرتابة التامة للدالة f على $[a;b]$.
و بالتالي يوجد عدد حقيقي وحيد c من $[a;b]$ بحيث $f(c)=k$ أي أن c هو الحل الوحيد للمعادلة $f(x)=k$.

ملاحظة 1:

إذا كانت الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $[a;b]$ فإن جدول تغيراتها يأخذ الشكل:

x	a $\quad x_0 \quad$ b
$f(x)$	$f(a) \nearrow k \nearrow f(b)$

ملاحظة 2:

إذا كانت الدالة f مستمرة و متناقصة تماما على المجال $[a;b]$ فإن جدول تغيراتها يأخذ الشكل:

x	a $\quad x_0 \quad$ b
$f(x)$	$f(a) \searrow k \searrow f(b)$

مثال:

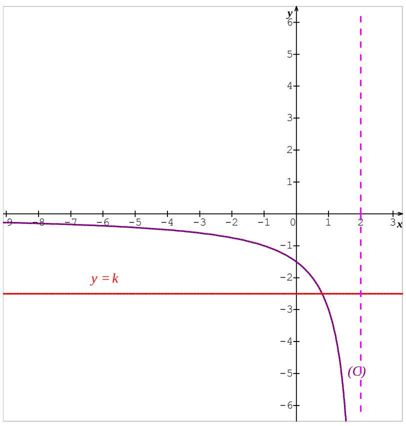
لتكن f الدالة المعرفة على $]-\infty;2[$ بـ $f(x)=\dfrac{3}{x-2}$

الدالة f مستمرة و متناقصة تماما على $]-\infty;2[$

و لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x)=-\infty$.

إذن من أجل كل عدد حقيقي k من $]-\infty;0[$ ،

المعادلة $f(x)=k$ تقبل حلا وحيدا x_0 في المجال $]-\infty;2[$.



تطبيق:

نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=x^3-1200x-100$

1. أحسب $g'(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة g.
2. أرسم التمثيل البياني للدالة g على شاشة حاسبة بيانية باختيار نافذة مناسبة.
3. بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[20;40]$.
4. باستعمال حاسبة بيانية أوجد حصرا لهذا الحل سعته 10^{-2}.

الحل:

1) الدالة g معرفة، مستمرة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

ومن أجل كل x من $\mathbb{R}$. $g'(x)=3(x-20)(x+20)$ و $g(-20)=15900$ و $g(20)=-16100$

و لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$

x	$-\infty$		-20		20		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	15900	$\searrow$	-16100	$\nearrow$	$+\infty$

3) على المجال $[20;40]$، الدالة g مستمرة و متزايدة تماما .

لدينا $g(20)=-16100<0$ و $g(40)=15900>0$ و بمأن $-16100\le 0\le 15900$ أي $0\in[g(20);g(40)]$

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد وحيد $c\in[20;40]$ بحيث $g(c)=0$

4) لتعيين حصرا للحل c و باستعمال الحاسبة البيانية و باختيار الخطوة 0,01 يظهر الجدول القيم التالية $g(34,68)=-6,280768$ و $g(34,69)=17,810709$ و منه نستنتج الحصر التالي:
$34,68< c<34,69$.

و هكذا نقرأ $c\approx 34,6826.....$

تطبيقات

تمرين 56 ص 30 وتمرين 50 ص 29

تمارين محلولة

تمرين 01:

f دالة معرفة على R: كما يلي $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2-4}{x+2} & x\neq -2 \\ f(-2)=-4 \end{cases}$

1) أدرس استمرارية الدالة f عند (-2).

2) هل الدالة f مستمرة على R ؟

الحل:

من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن (-2) يكون لدينا $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x+2}=\dfrac{(x-2)(x+2)}{x+2}$:

ومنه $f(x)=x-2$ اي $\lim\limits_{x\to-2} f(x)=-4$ ومنه $\lim\limits_{x\to-2} f(x)=f(-2)$

إذن الدالة f مستمرة عند (-2)

و مستمرة على المجالين $]-\infty;-2[$ و $]-2;+\infty[$ لأنها دالة ناطقة والدالة f مستمرة

2) الدالة $x \mapsto \frac{x^2-4}{x+2}$

عند (-2) فهي مستمرة على R.

تمرين 02:

f دالة معرفة على R كما يلي:
$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2+x-6}{x+3} \quad ,,,, x\neq -3 \\ f(-3)=-5 \end{cases}$$

1) أدرس استمرارية الدالة f عند (-3).

2) هل الدالة f مستمرة على R ؟

الحل:

من أجل كل عدد x يختلف عن (-3) ، يكون لدينا: $f(x)=\dfrac{x^2+x-6}{x+3}=\dfrac{(x+3)(x-2)}{x+3}$

حقيقي

ومنه $f(x)=x-2$ اي $\lim\limits_{x\to -3} f(x)=-5$ ومنه $\lim\limits_{x\to -3} f(x)=f(-3)$

إذن الدالة f مستمرة عند (-3).

مستمرة على $]-\infty;-3[$ و $]-3;+\infty[$ لأنها دالة ناطقة والدالة f مستمرة

2) الدالة $x \mapsto \dfrac{x^2+x-6}{x+3}$ المجالين

(-3) فهي مستمرة على R.

تمرين 03:

f دالة معرفة على R كما يلي:
$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^3+1}{x+1} \quad x\neq -1 \\ f(-1)=3 \end{cases}$$

1) أدرس استمرارية الدالة f عند (-1).

2) هل الدالة f مستمرة على R ؟

الحل:

1) من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن (-1) :

يكون لدينا $f(x)=\dfrac{x^3+1}{x+1}=\dfrac{(x+1)(x^2-x+1)}{x+1}=x^2-x+1$ اذن

$\lim\limits_{x\to -1} f(x)=3$ ومنه $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=f(-1)$

إذن الدالة f مستمرة عند (-1).

2) الدالة $x \mapsto \dfrac{x^3+1}{x+1}$ مستمرة على المجالين $]-\infty;-1[$ و $]-1;+\infty[$

لأنها دالة ناطقة والدالة مستمرة عند (-1) فهي مستمرة على R.

تمرين 04:

نعتبر الدالة f المعرفة على R كما يلي : $f(x)=(2x^2-3x+4)\cos x$

لماذا الدالة f مستمرة على R؟

الحل:

الدالة $x \mapsto \cos x$ مستمرة على R

الدالة $x \mapsto 2x^2 - 3x + 4$ مستمرة على R لأنها دالة كثير حدود.

الدالة f هي جداء دالتين مستمرتين على R فهي مستمرة على R.

تمرين 05:

نعتبر الدالة f المعرفة على R كما يلي : $f(x) = \dfrac{\sin x}{x^2 + 3}$

أدرس استمرارية الدالة f .

الحل:

من أجل كل عدد حقيقي x، لدينا: $f(x) = \left(\dfrac{1}{x^2 + 3}\right)(\sin x)$

الدالة $x \mapsto \sin x$ مستمرة على R .

الدالة $x \mapsto \dfrac{1}{x^2 + 3}$ مستمرة على R لأنها دالة ناطقة معرفة على R.

الدالة f هي جداء دالتين مستمرتين على R فهي مستمرة على R.

تمرين 06:

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[0;2[$ كما يلي : $f(x) = x + 1 + E(x)$

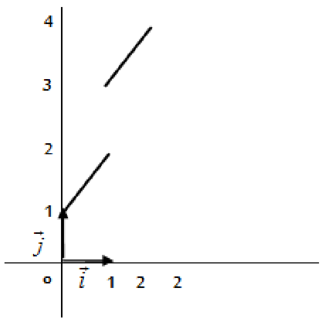
حيث $x \mapsto E(x)$ هي دالة الجزء الصحيح .

1) أكتب ، حسب قيم x ، عبارة $f(x)$ بدون الرمز $E(x)$.

2) أرسم المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد من المستوى .

3) هل الدالة f مستمرة على المجال $[0;2[$ ؟

4) عين المجالات التي تكون فيها f مستمرة.



الحل:

1) لدينا:

$E(x) = 0$ إذا كان $0 \leq x < 1$

$E(x) = 1$ إذا كان $1 \leq x < 2$

إذن:

$f(x) = x + 1$ إذا كان $0 \leq x < 1$

$f(x) = x + 2$ إذا كان $1 \leq x < 2$

2) رسم المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد من المستوى.

3) نلاحظ أنه لا يمكن رسم المنحنى الممثل للدالة f في المجال $[0;2[$ دون رفع القلم.

إذن الدالة f ليست مستمرة على المجال $[0;2[$.

4) الدالة f مستمرة على المجالين $[0;1[$ و $[1;2[$.

تمرين 07:

f دالة معرفة على R كما يلي: $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1} - 1}{x}, & x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

أدرس استمرارية الدالة f عند 0

الحل:

من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم،لدينا:

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}=\frac{(\sqrt{x^2+1}-1)(\sqrt{x^2+1}+1)}{x(\sqrt{x^2+1}+1)}$$

$$=\frac{x^2+1-1}{x(\sqrt{x^2+1}+1)}=\frac{x^2}{x(\sqrt{x^2+1}+1)}$$

إذن: $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+1}$ ومنه $\lim_{x\to 0}f(x)=0$

و بما أن $\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)$ فإن الدالة f مستمرة عند 0 .

تمرين 08:

نعتبر الدالة f المعرفة على R ب: $\begin{cases} f(x)=\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x+2} & ,,, x\neq -2 \\ f(-2)=-\frac{2}{3} \end{cases}$

أدرس استمرارية الدالة f عند (-2).

الحل:

من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن (-2) ، يكون لدينا:

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x+2}=\frac{(\sqrt{x^2+5}-3)(\sqrt{x^2+5}+3)}{(x+2)(\sqrt{x^2+5}+3)}$$

$$=\frac{x^2-4}{(x+2)(\sqrt{x^2+5}+3)}=\frac{x^2+5-9}{(x+2)(\sqrt{x^2+5}+3)}$$

$$=\frac{(x+2)(x-2)}{(x+2)(\sqrt{x^2+5}+3)}$$ اذن $$f(x)=\frac{x-2}{\sqrt{x^2+5}+3}$$

و بما أن $\lim_{x\to -2}f(x)=f(-2)$ فإن الدالة f مستمرة عند (-2).

تمرين 09:

نعتبر الدالة f المعرفة على R ب: $\begin{cases} f(x)=\frac{x-3+\sqrt{x^2+9}}{x} & ,,, x\neq 0 \\ f(0)=\alpha \end{cases}$;

عين قيمة العدد الحقيقي α حتى تكون الدالة f مستمرة على R.

الحل:

الدالة $x\mapsto \frac{x-3+\sqrt{x^2+9}}{x}$ مستمرة على $\mathbb{R}^*$.

إذن حتى تكون f مستمرة على R، يجب أن تكون مستمرة عند 0 أي $\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)$.

الدالة

من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم،لدينا:

$$f(x)=\frac{x-3+\sqrt{x^2+9}}{x}=\frac{(x-3+\sqrt{x^2+9})(x-3-\sqrt{x^2+9})}{x(x-3-\sqrt{x^2+9})}$$

$$=\frac{(x-3)^2-(x^2+9)}{x(x-3-\sqrt{x^2+9})}=\frac{x^2-6x+9-x^2-9}{x(x-3-\sqrt{x^2+9})}$$

$$=\frac{-6x}{x(x-3-\sqrt{x^2+9})}$$

اذن $f(x)=\frac{-6}{x-3-\sqrt{x^2+9}}$ ومنه $\lim_{x\to 0} f(x)=1$

و بما أن $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$ فإن $\alpha=1$.

تمرين 10:

نعتبر الدالة f المعرفة على R ب: $\begin{cases} f(x)=\alpha\times x^2-3\alpha^2.,,,x>0 \\ f(x)=2x-3.............x\leq 0\end{cases}$

عين قيم العدد الحقيقي α التي من أجلها تكون الدالة f مستمرة عند 0.

الحل:

حتى تكون الدالة f مستمرة عند 0 يجب أن يكون: $\alpha\times 0^2-3\alpha^2=2\times 0-3$ أي $-3\alpha^2=-3$ إذن $\alpha=-1$ أو $\alpha=1$

تمرين 11:

أثبت باستعمال مبرهنة القيم المتوسطة أن المعادلة $4x^3+3=0$ تقبل على الأقل حلا في المجال. $[-1;0]$

الحل:

يمكن كتابة المعادلة $4x^3+3=0$ على الشكل $f(x)=-1$ حيث f هي الدالة المعرفة على R ب: $f(x)=4x^3+3$.

الدالة f مستمرة على R لأنها دالة كثير حدود فهي مستمرة على المجال $[-1;0]$.

لدينا $f(-1)=-1$ و $f(0)=3$

نلاحظ أن العدد 0 محصور بين العددين $f(-1)$ و $f(0)$

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة ، المعادلة $4x^3+3=0$ تقبل حلا على الأقل في المجال $[-1;0]$.

تمرين 12:

أثبت باستعمال مبرهنة القيم المتوسطة أن المعادلة $x^3-2x+1=0$ تقبل على الأقل حلا في المجال $[-2;-1]$ ...

الحل:

يمكن كتابة المعادلة $x^3-2x+1=0$ على الشكل $f(x)=0$ حيث:

f هي الدالة المعرفة على R ب: $f(x)=x^3-2x+1$

الدالة f مستمرة على R لأنها دالة كثير حدود فهي مستمرة على المجال $[-2;-1]$

لدينا $f(-2)=-3$ و $f(-1)=2$

نلاحظ أن العدد 0 محصور بين العددين $f(-2)$ و $f(-1)$.

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة ، المعادلة $x^3-2x+1=0$ على الأقل في المجال تقبل حلا $[-2;-1]$.

تمرين 13: أثبت باستعمال مبرهنة القيم المتوسطة أن المعادلة $x^3-3x^2+3=0$ تقبل على الأقل حلا في المجال $\left[1;\frac{3}{2}\right]$.

الحل:

يمكن كتابة المعادلة $x^3-3x^2+3=0$ على الشكل $f(x)=0$ حيث :

f هي الدالة المعرفة على R بـ : $f(x)=x^3-3x^2+3$

الدالة f مستمرة على R لأنها دالة كثير حدود فهي مستمرة على المجال $\left[1;\frac{3}{2}\right]$.

لدينا $f(1)=1$ و $f\left(\frac{3}{2}\right)=-\frac{3}{8}$

نلاحظ أن العدد 0 محصور بين العددين $f\left(\frac{3}{2}\right)$ و $f(1)$.

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة ، المعادلة $x^3-3x^2+3=0$ تقبل حلا على الأقل في المجال $\left[1;\frac{3}{2}\right]$.

تمرين 14:

أثبت باستعمال مبرهنة القيم المتوسطة أن المعادلة $x^4-3x+1=0$ تقبل على الأقل حلا في المجال $[0;1]$.

الحل:

يمكن كتابة المعادلة $x^4-3x+1=0$ على الشكل $f(x)=0$ حيث:

f هي الدالة المعرفة على R بـ : $f(x)=x^4-3x+1$

الدالة f مستمرة على R لأنها دالة كثير حدود فهي مستمرة على المجال $[0;1]$.

لدينا $f(0)=1$ و $f(1)=-1$

نلاحظ أن العدد 0 محصور بين العددين $f(1)$ و $f(0)$.

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة ، المعادلة $x^4-3x+1=0$ تقبل حلا على الأقل في المجال $[0;1]$.

تمرين 15:

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[0;1]$ بـ: $f(x)=x^4+x-0{,}537$

1) أحسب $f'(x)$.

2) ماذا تستنتج بالنسبة للدالة f .

3) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[0;1]$.

الحل:

1) الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $[0;1]$ ، ولدينا: $f'(x)=4x^3+1$

2) من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0;1]$ ، لدينا : $f'(x)>0$

إذن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;1]$.

3) الدالة f مستمرة على R لأنها دالة كثير حدود فهي مستمرة على المجال $[0;1]$.

لدينا $f(0)=-0{,}537$ و $f(1)=1{,}463$

نلاحظ أن العدد 0 محصور بين العددين $f(0)$ و $f(1)$

إذن، حسب مبرهنة القيم المتوسطة، المعادلة $f(x)=0$ تقبل على الأقل حلا x_0 في المجال $[0;1]$.

وبما أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;1]$ فإن x_0 وحيد.

تمرين 16:

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[-2;2]$ بـ : $f(x)=2x^3-3x^2-1$

1) أحسب $f'(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

2) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[1;2]$.

الحل:

1) الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $[-2;2]$ ولدينا: $f'(x)=6x^2-6x$

أي $f'(x)=6x(x-1)$

يكون $f'(x)=0$ إذا كان $x=0$ أو $x=1$

$f(0)=-1$ ، $f(1)=-2$ ، $f(-2)=-29$ ، $f(2)=3$

جدول تغيرات الدالة f :

طريقة التنصيف

طرق حل المعادلة: $f(x)=0$

1)طريقة التنصيف (Halving the interval) :

لنفرض أننا نريد حل المعادلة $f(x)=0$..............(1)

و أخذنا القيم التقريبية للحل x_1,x_2 من أجل ذلك $f(x_1),f(x_2)$ من إشارتين مختلفتين أي أن:

$f(x_1)\times f(x_2)<0$ حيث أن $f(x)$ تابع مستمر في المجال $[x_1;x_2]$

لذلك يوجد حل للمعادلة (1) ضمن هذا المجال ولنحاول الآن إيجاد القيمة التقريبية x_3

من أجل ذلك نوجد $x_2\le x_3\le x_1$ وَ $f(x_3)=0$.

أسهل طريقة لاختيار x_3 أن نأخذ $x_3=\frac{x_2+x_1}{2}$:

و لنحسب $f(x_3)$ ، فإذا كان $f(x_1)\times f(x_3)<0$:

نختار المجال $[x_3;x_1]$ نختار قيمة جديدة x_4 بحيث يكون $x_4=\frac{x_3+x_1}{2}$ ، أما إذا كان $f(x_1)\times f(x_3)<0$

فإن $f(x_2)\times f(x_3)<0$ ونختارالمجال $[x_3;x_2]$ نختار القيمة . $x_4=\frac{x_3+x_2}{2}$

و نستمر بنفس الطريقة حتى نحصل على $|f(x_n)|$ بحيث

تكون إما صغيرة جداً و قريبة من الصفر بالقدر الكافي أو $|x_{i+1}-x_i|\prec\varepsilon$: ، حيث أن ε قيمة صغيرة.

إن هذه الطريقة تعرف باسم التنصيف أو طريقة تقسيم المجال .

مثال باستعمال نظرية القيم المتوسطة عين حل للمعادلة $x^3-3x^2+3=0$ على المجال $[1,2]$

الحل: الدالة f المعرفة كما يلي $f(x)=x^3-3x^2+3$

معرفة ومستمرة على $\mathbb{R}$ فهي مستمرة على $[1,2]$ لانها دالة كثير حدود

نعلم ان الدالة تقبل الاشتقاق على المجال $[1,2]$ ودوالها المشتقة $f'(x)=3x^2-6x$ تنعدم عند

ال 0 و 2

جدول تغيراتها هو

x	$-\infty$ 0 2 $+\infty$
$f'(x)$	+ - +

المجال $[1,2]$ الدالة متناقصة تماما اذن هي رتيبة

نعلم ان $f(1)=1^3-3(1)^2+3=1$ و $f(2)=2^3-3(2)^2+3=-1$ وبالتالي

$f(x_1)\times f(x_2)<0$

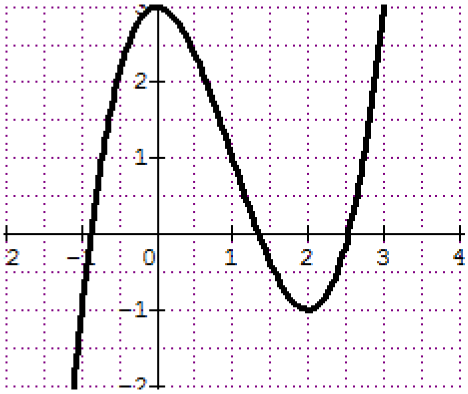
حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حل وحيد α

لأيجاد الحل نأخذ $x_3 = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$: و بما ان $f(x_3) = f(3/2) = -0.375$

$f(3/2) \times f(1) < 0$ نأخذ المجال $\left[1, \frac{3}{2}\right]$ ثم ناخذ $x_4 = \frac{2+3}{4} = \frac{5}{4}$

و بما ان $f(x_4) = f(5/4) = 0.27$ اذن $f(3/2) \times f(5/4) < 0$ نأخذ $x_5 = \frac{11}{8}$

وبما أن $f(x_5) = f(11/8) \simeq 0$ فان $\alpha = \frac{11}{8}$



طريقة نيوتن – رافسون (المماسات):

عند اختيار النقط x_1, x_2 بشكل متقارب من بعضهما البعض فإن الخط الواصل ما بين النقطتين

$P(x_1, f(x_1))\ Q(x_2, f(x_2))$ يستبدل بالمماس عند النقطة P و بالتالي

فإن $x_3 = x_2.f(x_2) - x_1.f(x_1) / f(x_2) - f(x_1)$

و عندما يكون $x_2 = x_1 + h$: فإن: $f(x_2) = f(x_1) + hf'(x_1)$ وبالتالي:

$x_3 = x_1.\left[f(x_1) + hf'(x_1)\right] - (x_1 + h) f(x_1) / hf'(x_1)$

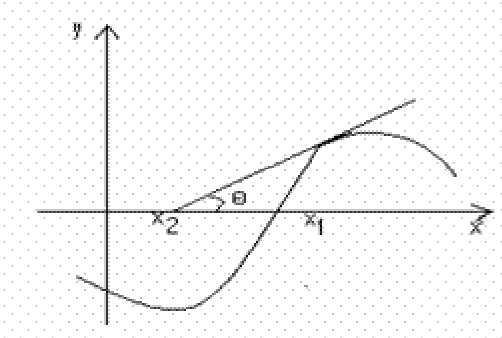
أي إن $x_3 = x_1 - (f(x_1)/f'(x_1))$: و هذه العلاقة يمكن استنتاجها مباشرة و ذلك بإيجاد نقطة تقاطع مماس التابع

$y = f(x)$ عند النقطة x_1 مع المستقيم: $y = 0$

$\tan\theta = f'(x_1) = \frac{f(x_2)}{x_1 - x_2}$ وبالتالي $x_2 = x_1 - (f(x_1)/f'(x_1))$:

و بشكل عام يمكن كتابة العلاقة السابقة كما يلي $x_{n+1} = x_n - (f(x_n)/f'(x_n))$:

و هذه الطريقة تعرف باسم نيوتن



دالة الجزء الصحيح

تعريف: نسمي الدالة الجزء الصحيح الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ و التي ترفق بكل عدد حقيقي x العدد الصحيح n حيث $n \le x < n+1$ و نرمز لها بالرمز E أو $[\ ]$.

1) أحسب $[-2,3]$، $E(-1)$، $\left[\sqrt{3}\right]$ و $E(11,01)$.

2) نعتبر الدوال f، g و h المعرفة على المجال $[-2;1[$ كما يلي:

$f(x)=[x]$ ، $g(x)=x-[x]$، $h(x)=x^2+1$ و لتكن (C_f)،(C_g)،(C_h) تمثيلاتها البيانية على الترتيب.

- أرسم في معالم مختلفة التمثيلاكت البيانية (C_f)،(C_g) و(C_h).
- هل بإمكانك رسم المنحنيات (C_f)،(C_g) و(C_h) بدون رفع القلم (اليد) ؟
- هل تقبل الدوال f، g و h نهاية عند -1 ؟ عند 0 ؟
- أكتب خلاصة.

الحل:

1) حساب $[-2,3]$، $E(-1)$، $\left[\sqrt{3}\right]$ و $E(11,01)$.

$-3 \le -2,3 < -2$ ومنه $[-2,3]=-3$ ، $E(-1)=-1$ ، $1 \le \sqrt{3} < 2$ ومنه $\left[\sqrt{3}\right]=1$

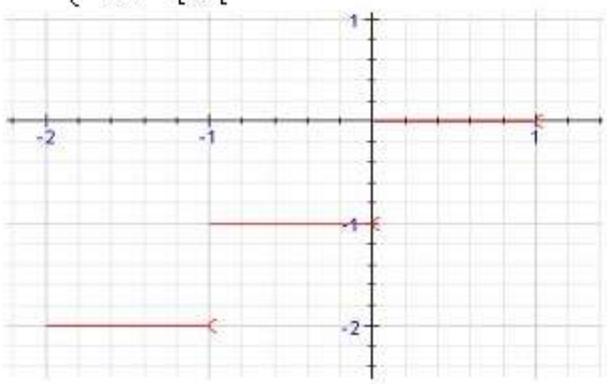
$E(11,01)=11$

) نعتبر الدوال f، g و h المعرفة على المجال $[-2;1[$ كما يلي:

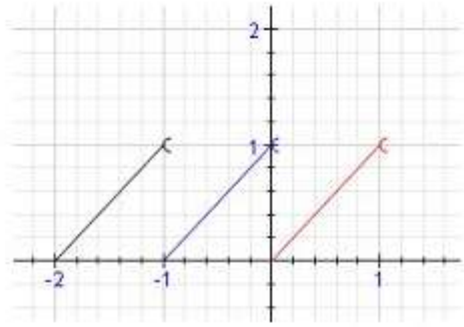
$f(x)=[x]$ ، $g(x)=x-[x]$، $h(x)=x^2+1$ و لتكن (C_f)،(C_g)،(C_h) تمثيلاتها البيانية على الترتيب.

- رسم في معالم مختلفة التمثيلات البيانية (C_f)،(C_g) و(C_h).

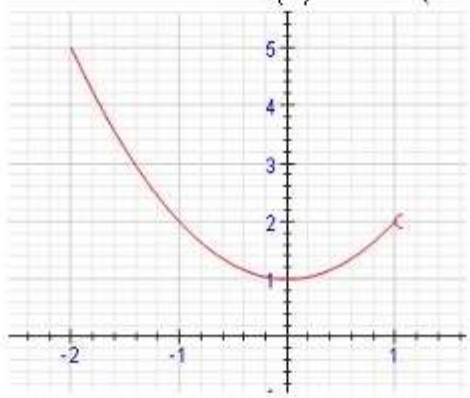
1 (C_f) : $f(x)=[x]$ لدينا : $f(x)=\begin{cases} -2 \ ; x \in [-2;-1[\\ -1 \ ; x \in [-1;0[\\ 0 \ ; x \in [0;1[\end{cases}$



1 -(C_g) : $g(x) = x - [x]$ ، $g(x) = \begin{cases} x+2 \; ; x \in [-2;-1[\\ x+1 \; ; x \in [-1;0[\\ x \; ; x \in [0;1[\end{cases}$



3- $h(x) = x^2 + 1$



- هل بإمكانك رسم المنحنيات (C_f) ، (C_g) و (C_h) بدون رفع القلم (اليد) ؟
- لا يمكن رسم المنحنيين (C_f) ، (C_g) دون رفع القلم (اليد)
- بينما يمكن رسم المنحني (C_h) دون رفع القلم (اليد)
- هل تقبل الدوال f ، g و h نهاية عند -1 ؟ عند 0 ؟
- الدالتان f ، g لا تقبلان نهاية عند -1 وكذا عند الصفر

- الدالة h تقبل نهاية عند -1 و عند 0 لأنها معرفة عندهما : $h(-1) = 2$ و $h(0) = 1$
- خلاصة: يمكن رسم المنحني (C_h) دون رفع القلم (اليد) ، فنقول إن الدالة h مستمرة على المجال $[-2;1[$.
- اما f ، g فهما غير مستمرتين على المجال $[-2;1[$

شرح قاعدة Regle de l'Hôpital

تستعمل هذة قاعدة (R.H) في الحالات ونوع شكل غير محدد من نوع $\frac{0}{0}$ و $\frac{\infty}{\infty}$

خاصية (R.H)

$$\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{h(x)} = \lim_{x \to a} \frac{g'(x)}{h'(x)}$$

مثال

$$\lim_{x \to 4} f(x) = \lim_{x \to 4} \frac{x^2 - 8x + 16}{x^2 - 16} = \frac{0}{0} \text{ F.I}$$

شكل غير محدد