المؤسسة: سليماني جلول — الأستاذ: بلبحري كمال — المادة : رياضيات

المستوى و الشعبة : الثالثة علوم تجريبية

المحتوى المعرفي : الإشتقاقية

الكفاءات المستهدفة: – العدد المشتق ـ تعيين معادلة المماس عند نقطة .

– سير الحصة

المراحل	السير (الأنشطة المرافقة لكل مرحلة)	المدة	ملاحظات
الإنطلاق:	⋆ التهيئة النفسية: مناقشة النشاط 1 ص 40 :	10 د	مناقشة النشاط من طرف التلاميذ
بناء المفاهيم:	(انظر أدناه)	15 د	

⋆ التهيئة النفسية:

مناقشة النشاط 1 ص 40 :

1 حساب الأعداد المشتقة :

لدينا : $f'(-1)=0$ هو معامل توجيه المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة -1

نختار نقطتين من المماس مثلا : $A(-1;2)$ و $B(-2;2)$ و منه : $f'(-1)=\frac{2-2}{-1+2}=\frac{0}{1}=0$

$\ast\; g'(-1)=\frac{-1-0}{-1-2}=\frac{1}{3}$ $\quad\ast\; f'(2)=\frac{0-2}{2-0}=-1$ $\quad\ast\; g'(2)=\frac{2-1}{2-0}=\frac{1}{2}$

$\ast\; (f+g)'(-1)=f'(-1)+g'(-1)=\frac{1}{3}$ $\quad\ast\; (fg)'(2)=f'(2).g(2)+g'(2).f(2)=-2$

$\ast\; (\frac{3}{f})'(-1)=-\frac{3f'(-1)}{[f'(-1)]^2}$ $\quad\ast\; (\frac{f}{g})'(2)=\frac{f'(2).g(2)-g'(2).f(2)}{[g(2)]^2}=-\frac{1}{2}$

2 من أجل كل x من $[0;2]$ نضع : $h(x)=f(2x-1)$

ـ حساب $h'(0)$:

لدينا : $h'(x)=2f'(2x-1)$ و منه : $h'(0)=2f'(-1)=0$ و $h'(\frac{3}{2})=2f'(2)=-2$

❶ العدد المشتق ـ الدالة المشتقة :

تعريف: f دالة معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$.

x_0 و x_0+h عددان حقيقيان من I مع: $h\neq 0$.

نقول إن f تقبل الإشتقاق عند x_0 إذا قبلت النسبة $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ نهاية محدودة لما يؤول h إلى 0 .

تسمى هذه النهاية : العدد المشتق للدالة f عند x_0 و نرمز لها بـ : $f'(x_0)$.

نكتب إذن : $f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

أو نكتب : $f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ (بوضع $x=x_0+h$)

ملاحظة :

إذا قبلت الدالة f الإشتقاق عند كل عدد حقيقي x من المجال I فهي تقبل الإشتقاق على I و نرمز لدالتها المشتقة بـ : f' .

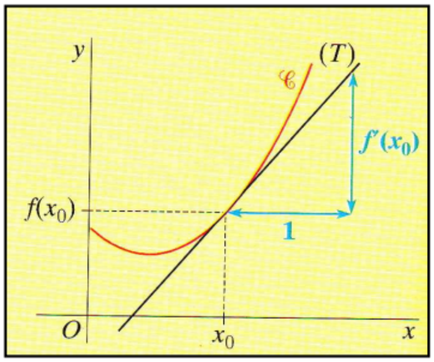
تطبيق (ت 01 ص 58):

❷ التفسير البياني (مماس منحني دالة) :

تعريف وخاصية:

إذا قبلت الدالة f الإشتقاق عند x_0 فإن تمثيلها البياني يقبل في النقطة $A(x_0;f(x_0))$ مماسًا معامل توجيهه $f'(x_0)$ ومعادلته هي :

$$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

المراحل	السير (الأنشطة المرافقة لكل مرحلة)	المدة	ملاحظات
	المماس (T) هو عبارة عن مستقيم معامل توجيهه $f'(x_0)$ إذن : معادلة (T) من الشكل : $y = f'(x_0)x + b$ و النقطة $A(x_0; f(x_0))$ تنتمي إلى (T) . و منه بالتعويض ينتج : $b = f(x_0) - f'(x_0)x_0$ و بالتالي : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ 	10 د	
	مثال: f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x^2 + 2$ معادلة المماس لمنحنى f عند النقطة $x_0 = -1$ هي : $y = f'(-1)(x - (-1)) + f(-1)$ أي : $y = -2x + 1$		
	تمرين تطبيقي : أدرس قابلية إشتقاق الدوال التالية عند $x_0 = 1$ ، ثم فسّر النتيجة بيانيا . ❶ $f(x) = (x^2 - 2x + 3)^2$ ❷ $g(x) = \sqrt{x - 1}$ ❸ $h(x) = 2x\|x - 1\|$	25 د	
تقويم	حل التمرين 04 و 07 و 08 صفحة 58		

ملاحظات عامة حول الحصة: ....

المؤسسة: سليماني جلول | الأستاذ: بلبحري كمال | المادة : رياضيات
المستوى و الشعبة : الثالثة علوم تجريبية
المحتوى المعرفي : الإستمرارية
الكفاءات المستهدفة: - دراسة إستمرارية دالة و سلوكها التقاربي .

- سير الحصة

المراحل	التسيير (الأنشطة المرافقة لكل مرحلة)	المدة	ملاحظات
الإنطلاق:	⋆ التهيئة النفسية: التذكير بمكتسبات السنة الماضية . **نشاط:** نعتبر الدالتان f و g المعرفتان على المجال $[-2;2]$ كما يلي : $\begin{cases} f(x) = x+2 & x \in [-2;0[\\ f(x) = x^2+1 & x \in [0;2] \end{cases}$ و $g(x) = \mid x \mid + 1$ و ليكن (C_f) و (C_g) تمثيليهما البيانيين على الترتيب . ① أنشيء في معلمين مختلفين (C_f) و (C_g) . ② هل يمكنك إنشاء المنحنيين (C_f) و (C_g) بدون رفع القلم (اليد) ؟	15 د	مناقشة النشاط من طرف التلاميذ
بناء المفاهيم:	❶ الاستمرارية : التفسير البياني : تكون الدالة f مستمرة على مجال I عندما يمكن رسم منحناها البياني على هذا المجال دون رفع القلم (اليد) ❷ خواص (نقبل دون برهان) : نقبل بأن كل الدوال المقررة في هذا المستوى و المحصل عليها بالعمليات على دوال مألوفة أو بتركيبها مستمرة على كل مجال من مجموعة تعريفها. **نتائج:** • الدوال المرجعية مستمرة على كل مجال من مجموعة تعريفها. • الدوال كثيرات الحدود، $\cos, \sin$ مستمرة على $\mathbb{R}$. • الدوال الناطقة مستمرة على كل مجال من مجموعة تعريفها. **أمثلة :** ✥ الدالة $x \mapsto 2x^2+6x+11$ ، مستمرة على $\mathbb{R}$. ✥ الدالة $x \mapsto \frac{5x+6}{x^2-1}$ مستمرة على كل من المجالات $]-\infty;-1[\,,\,]-1;1[$ و $]1;+\infty[$. **تطبيق** (ت 47 ص 29):	15 د	

المراحل	التسيير (الأنشطة المرافقة لكل مرحلة)	المدة	ملاحظات
	تمرين تطبيقي : لتكن f الدالة المعرفة على المجال $]-2;3[$ بـ : $\begin{cases} f(x)=x^2+2 & x\in[-2;1[\\ f(x)=2x-1 & x\in[1;3[\end{cases}$ ① مثل بيانيا الدالة f في معلم . ② هل الدالة f مستمرة على المجال $]-2;3[$ ؟ لماذا ؟ ③ اذكر مجالا تكون الدالة f مستمرة عليه .	15 د	
تقويم	حل التمرين 49 صفحة 29	15 د	

ملاحظات عامة حول الحصة: ....

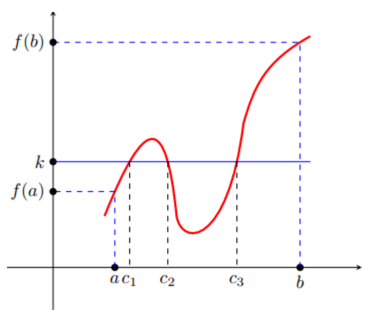
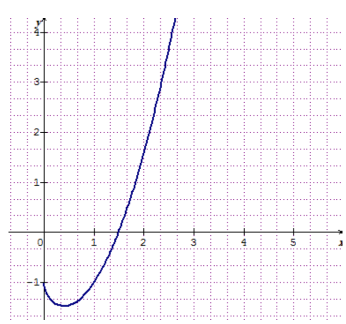
المؤسسة: سليماني جلول — الأستاذ: بلبحري كمال — المادة : رياضيات

المستوى و الشعبة : الثالثة علوم تجريبية

المحتوى المعرفي : الإستمرارية

الكفاءات المستهدفة: – استعمال مبرهنة القيم المتوسطة لإثبات وجود حلول المعادلة $f(x)=k$ ، k عدد حقيقي معطى.

– سير الحصة

المراحل	السير (الأنشطة المرافقة لكل مرحلة)	المدة	ملاحظات
الإنطلاق:	⋆ التهيئة النفسية: نشاط 04ص 07 : ❶ مبرهنة القيم المتوسطة (تقبل دون برهان) : **مبرهنة:** f دالة معرفة و مستمرة على $[a;b]$. من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ ، يوجد على الأقل عدد حقيقي c محصور بين a و b بحيث: $f(c)=k$	20 د	مناقشة النشاط من طرف التلاميذ
بناء المفاهيم:	❷ التفسير البياني : الدالة f مستمرة على المجال $[a;b]$ ، من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ فإن : المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=k$ يقطع حتما منحنى الدالة على الأقل في نقطة . أي أن المعادلة $f(x)=k$ تقبل حلا على الأقل في المجال $[a;b]$  **حالة خاصة :** إذا كانت f دالة مستمرة على مجال $[a;b]$ و كان $f(a)\times f(b)<0$ (العدد 0 محصور بين $f(a)$ و $f(b)$) فإنه يوجد على الأقل عدد حقيقي c محصور بين a و b بحيث $f(c)=0$ أي أن f تنعدم على الأقل مرة واحدة على $[a;b]$.	15 د	
	❸ المعادلة $f(x)=k$: إذا كانت f دالة معرفة و مستمرة $[a;b]$ فإنه من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ ، المعادلة $f(x)=k$ تقبل على الأقل حلا c محصور بين a و b . **ملاحظة:** مبرهنة القيم المتوسطة تأكد فقط وجود حل على الأقل للمعادلة $f(x)=k$ أما تعيين الحلول أو قيم مقربة لها فيتم بإتباع خوارزميات مختلفة. **مثال:** نعتبر f الدالة المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ: $f(x)=x^2-\sqrt{x}-1$. f دالة معرفة و مستمرة على $[0;+\infty[$ و لدينا $f(1)=-1$ و $f(2)=3-\sqrt{2}$ العدد 0 محصور بين $f(1)$ و $f(2)$ و منه: حسب مبرهنة القيم المتوسطة، المعادلة $f(x)=0$ تقبل على الأقل حلا محصورا بين 1 و 2 . 	15 د	

المراحل	التسيير (الأنشطة المرافقة لكل مرحلة)	المدة	ملاحظات

طريقة: لإثبات وجود حلول معادلة على مجال $[a;b]$ باستعمال مبرهنة القيم المتوسطة نتبع الخطوات التالية:

- نكتب المعادلة على الشكل $f(x)=k$.
- نتحقق من إستمرارية الدالة f على المجال $[a;b]$.
- نتحقق من أن العدد k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$.

15 د

تطبيق (ت 50 ص 29):

❹ **الدوال المستمرة والرتيبة تماما على مجال** $[a;b]$:

مبرهنة: إذا كانت f مستمرة و رتيبة تماما على مجال $[a;b]$ فإنه من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ ، المعادلة $f(x)=k$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[a;b]$.

برهان:

نفرض أن الدالة f مستمرة و رتيبة تماما على مجال $[a;b]$.

و ليكن k عدد حقيقي محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ ، و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة، يوجد على الأقل عدد حقيقي c محصور بين a و b بحيث $f(c)=k$.

لنفرض أنه يوجد عدد حقيقي أخر c' يختلف عن c ، محصور بين a و b و يحقق $f(c')=k$.

يكون لدينا $c\neq c'$ و $f(c)=f(c')$ و هذا يناقض الرتابة التامة للدالة f على المجال $[a;b]$

و بالتالي يوجد عدد حقيقي وحيد c من $[a;b]$ بحيث $f(c)=k$ أي أن c هو الحل الوحيد للمعادلة $f(x)=k$.

15 د

ملاحظة:

تقبل المبرهنة السابقة عدة تمديدات في حالة دالة f مستمرة و رتيبة تماما على مجال I مفتوح أو مفتوح من إحدى الجهتين، محدود أو غير محدود.

مثال:

لتكن f الدالة المعرفة على $]-\infty;2[$ بـ: $f(x)=\frac{x+3}{x-2}$.

الدالة f مستمرة و متناقصة تماما على $]-\infty;2[$

و لدينا: $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 2} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$

إذن من أجل كل عدد حقيقي k من $]-\infty;1[$ ، المعادلة $f(x)=k$ تقبل حلا وحيدا x_0 في المجال $]-\infty;2[$.

تمرين تطبيقي :

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[-2;2]$ بـ: $f(x)=2x^3-3x^2-1$.

① أحسب $f'(x)$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

② بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[1;2]$.

40 د

تقويم

③ أعط حصرا بتقريب 10^{-1} (سعته) للعدد α .

حل التمرين 60 و 61 و 64 صفحة 31

ملاحظات عامة حول الحصة: ....

المؤسسة:سليماني جلول الأستاذ: بلبحري كمال المادة : رياضيات

المستوى و الشعبة : الثالثة علوم تجريبية

المحتوى المعرفي : الإشتقاقية

الكفاءات المستهدفة: – حساب مشتقات دوال مألوفة .

– سير الحصة

المراحل	التسيير (الأنشطة المرافقة لكل مرحلة)	المدة	ملاحظات
الإنطلاق:	⋆ التهيئة النفسية: المشتقات والعمليات : ❶ مشتقات دوال مألوفة :	10 د	
بناء المفاهيم:	❷ المشتقات والعمليات على الدوال : النتائج ملخصة في الجدول التالي :	15 د	التعرف على مشتقات الدوال المألوفة

$f(x)$	$f'(x)$	مجالات قابلية الاشتقاق
k (حيث k ثابت حقيقي)	0	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$
x^n ($n \in \mathbb{N}$ و $n \geq 2$)	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$]-\infty;0[$ و $]0;+\infty[$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$

الشروط	الدالة المشتقة	العملية	
f و g قابلتان للإشتقاق على I	$f'+g'$	$f+g$	مجموع دالتين
f و g قابلتان للإشتقاق على I	kf'	kf	ضرب دالة بعدد حقيقي
f و g قابلتان للإشتقاق على I	$f'g+fg'$	fg	جداء دالتين
f و g قابلتان للإشتقاق على I من أجل كل x من I : $f(x) \neq 0$	$-\frac{f'}{f^2}$	$\frac{1}{f}$	مقلوب دالة
f و g قابلتان للإشتقاق على I من أجل كل x من I : $g(x) \neq 0$	$\frac{f'g-fg'}{g^2}$	$\frac{f}{g}$	حاصل قسمة دالتين

نتائج :

⋆ الدوال كثيرات الحدود قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$

⋆ الدوال الناطقة قابلة للإشتقاق على كل مجال محتوى في مجموعة تعريفها

أمثلة :

لنعين مشتقة الدوال التالية المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ :

❶ $f(x) = x^4 - 2x^3 + \frac{1}{3}x^2 - 1$ ❷ $g(x) = (x-3)\sqrt{x}$ ❸ $h(x) = \frac{x^2+1}{2x}$

المراحل	السير (الأنشطة المرافقة لكل مرحلة)	المدة	ملاحظات
	❸ المشتقات المتتابعة : **المشتقات المتتابعة :** f دالة قابلة للإشتقاق على مجال مفتوح I من $\mathbb{R}$ ، f' دالتها المشتقة على هذا المجال . ✧ إذا كانت f' قابلة للإشتقاق على المجال I فإن دالتها المشتقة $(f')'$ تسمى **الدالة المشتقة الثانية** للدالة f ويرمز لها بالرمز f'' أو $f^{(2)}$. وهكذا إذا كانت الدالة f قابلة للإشتقاق n مرة فإن دالتها المشتقة النونية يرمز لها بالرمز $f^{(n)}$ **مثال :** لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=x^4-2x^3+x-1$ لدينا : $f'(x)=4x^3-6x$ و $f''(x)=12x^2-6$ و $f^{(3)}(x)=24x$ ... ❹ الاشتقاقية والاستمرارية : **خاصية:** إذا كانت f قابلة للإشتقاق على مجال I فإنها مستمرة على هذا المجال . **ملاحظة:** عكس هذه الخاصية ليس صحيح دوما . **مثلا:** الدالة $f : x \mapsto \|x\|$ مستمرة عند 0 و لكن غير قابلة للإشتقاق عند 0 لأن : $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} \frac{-x-0}{x}=-1$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{x-0}{x}=1$ و منه : المشتق من اليمين لا يساوي المشتق من اليسار ($f'_d \neq f'_g$) إذن : f لا تقبل الإشتقاق عند 0 .	10 د	
تقويم	حل التمرين 13 و 17 صفحة 59 حل التمرين 24 صفحة 60	25 د	

ملاحظات عامة حول الحصة: ....

المؤسسة:ثانويةسليماني جلول   الأستاذ: بلبحري كمال   المادة : رياضيات

المستوى و الشعبة : الثالثة علوم تجريبية

المحتوى المعرفي : الإشتقاقية

الكفاءات المستهدفة: حساب مشتقة الدالة مركب .

– سير الحصة

المراحل	التسيير (الأنشطة المرافقة لكل مرحلة)	المدة	ملاحظات
الإنطلاق:	⋆ التهيئة النفسية: التذكير بتفكيك دالة وتركيب دالة و مشتقات الدوال $x \longmapsto f(ax+b)$ **نشاط :** f و g دالتان عدديتان معرفتان على R كمايلي : $f(x)=x^2-1$ و $g(x)=x+3$. ① عين عبارة الدالة $f\circ g$. ② احسب $f'(x)$ ، $g'(x)$ و $(f\circ g)'(x)$. ③ قارن بين $(f\circ g)'(x)$ و $g'(x)f'(g(x))$. **مناقشة النشاط :** ① لدينا: $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x+3)$. إذن : $f\circ g(x)=(x+3)^2-1=x^2-6x+8$. ② لدينا : $f'(x)=2x$ و $g'(x)=1$ و $(g\circ f)'(x)=2x-6$. ③ المقارنة بين $(f\circ g)'(x)$ و $g'(x)f'(g(x))$: لدينا: $g'(x)f'(g(x))=1\times f'(x+3)=1\times[2(x+3)]=2x+3$. ومنه : $(f\circ g)'(x)=g'(x)f'(g(x))$.	10 د	مناقشة النشاط من طرف التلاميذ
بناء المفاهيم	**مشتقة الدالة مركب:** **مبرهنة:** إذا قبلت الدالة u الإشتقاق على المجال I من $\mathbb{R}$ ، وإذا قبلت الدالة v الإشتقاق على $u(I)$ فإن الدالة $v\circ u$ قابلة للإشتقاق على I ، ولدينا من أجل كل x من I : $\boxed{[v(u(x))]'(x)=u'(x)v'(u(x))}$ **مثال①:** لتكن الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $f(x)=\sqrt{x^2+1}$. نضع: $u(x)=x^2+1$ و $v(x)=\sqrt{x}$. و منه : $f(x)=(v\circ u)(x)$ و $[v(u(x))]'(x)=u'(x)v'(u(x))$. لدينا: $u'(x)=2x$ و $v'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. إذن: $f'(x)=2x.\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$. **مثال②:** لتكن الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $g(x)=\cos(3x^2-2)$. نضع: $u(x)=3x^2-2$ و $v(x)=\cos x$. و منه : $f(x)=(v\circ u)(x)$ و $[v(u(x))]'(x)=u'(x)v'(u(x))$. لدينا: $u'(x)=6x$ و $v'(x)=-\sin x$. إذن: $f'(x)=6x(-\sin(3x^2-2))$.	10 د	

المراحل	السير (الأنشطة المرافقة لكل مرحلة)	المدة	ملاحظات
	تطبيقات:		
	1/ مشتقة الدالة $x \longmapsto \sqrt{u(x)}$		
	مبرهنة: إذا كانت الدالة u قابلة للإشتقاق على المجال I من $\mathbb{R}$ وكانت u موجبة تماما على I فإن الدالة $\sqrt{u}$ قابلة للإشتقاق على I ، ولدينا من أجل كل x من I : $\left[\sqrt{u(x)}\right]' = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$	10 د	
	برهان:		
	مثال : لتكن f الدالة العددية المعرفة ع $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 5}$.		
	لدينا: $f'(x) = \dfrac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x+5}} = \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x-5}}$.		
	2/ مشتقة الدالة $x \longmapsto [u(x)]^n$		
	مبرهنة: n عدد طبيعي غير معدوم ويختلف عن 1 ، إذا كانت الدالة u قابلة للإشتقاق على المجال I من $\mathbb{R}$ فان الدالة u^n قابلة للإشتقاق على I ولدينا من أجل كل x من I $(u^n)'(x) = nu'(x)[u(x)]^{n-1}$	10 د	
	برهان:		
	مثال : لتكن f الدالة العددية المعرفة ع $\mathbb{R}$ كمايلي : $f(x) = (x^2-3)^4$.		
	لدينا: $f'(x) = 4.2x(x^2-3)^3$ أي : $f'(x) = 8x(x^2-3)^3$.		
	3/ مشتقة الدالة $x \longmapsto \dfrac{1}{[u(x)]^n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$		
	مبرهنة: إذ كانت u دالة قابلة للإشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$ وكانت u لا تنعدم على I فإن الدالة $\dfrac{1}{u^n}$ قابلة للإشتقاق على I ولدينا من أجل كل x من I $\left[\dfrac{1}{u^n}\right]'(x) = -\dfrac{nu'(x)}{[u(x)]^{n+1}})$	10 د	
	برهان:		
	مثال : لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $f(x) = \dfrac{1}{(x^2+3)^3}$		
	لدنيا: $f'(x) = -\dfrac{6x}{(x^2+3)^4}$		
التقويم	حل التمرين 78صفحة66		
	حل التمرين 40صفحة61	10 د	

ملاحظات عامة حول الحصة: ....

المؤسسة: سليماني جلول — الأستاذ: بلبحري كمال — المادة : رياضيات

المستوى و الشعبة : الثالثة علوم تجريبية

المحتوى المعرفي : الإشتقاقية

الكفاءات المستهدفة: – استعمال المشتقات لدراسة خواص دالة و المنحنى المثل لها .

– سير الحصة

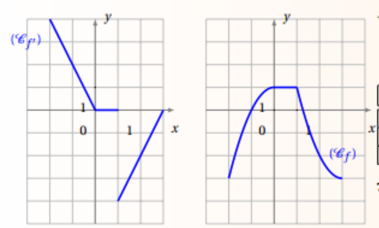
المراحل	التسير (الأنشطة المرافقة لكل مرحلة)	المدة	ملاحظات

الإنطلاق:

⋆ التهيئة النفسية:

نشاط :

يمثل الشكلان $(\mathscr{C}_f)$ و $(\mathscr{C}_{f'})$ جانبه على التوالي منحني دالة f و دالتها المشتقة f'



1 أتمم ملء الجدول التالي :

المجال	إشارة الدالة المشتقة f'	تغيرات الدالة f
$I =]-2,0[$		
$J =]0,1[$		
$K =]1,3($		

2 ذكر بالخاصية التي تربط اشارة الدالة f' بتغيرات الدالة f

المدة: 10 د — ملاحظات: مناقشة النشاط من طرف التلاميذ

بناء المفاهيم:

اتجاه تغير دالة :

❶ المشتقة واتجاه تغير دالة :

مبرهنة (تقبل دون برهان) : f دالة قابلة للإشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$

⋆ إذا كان من أجل كل x من I ، $f'(x) > 0$ ما عدا ممكن من أجل عدد محدود من القيم التي تنعدم الدالة f من أجلها ، فإن : الدالة f متزايدة تماما على I .

⋆ إذا كان من أجل كل x من I ، $f'(x) < 0$ ما عدا ممكن من أجل عدد محدود من القيم التي تنعدم الدالة f من أجلها ، فإن : الدالة f متناقصة تماما على I .

⋆ إذا كان من أجل كل x من I ، $f'(x) = 0$ فإن : الدالة f ثابتة على I .

مثال :

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = x^3$

f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا : $f'(x) = 3x^2$

و منه من إجل كل x من $\mathbb{R}^+$: $f'(x) > 0$ و $f'(0) = 0$

إذن : f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

❷ القيم الحدية المحلية :

تعاريف :

f دالة معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$ و x_0 عدد حقيقي من I .

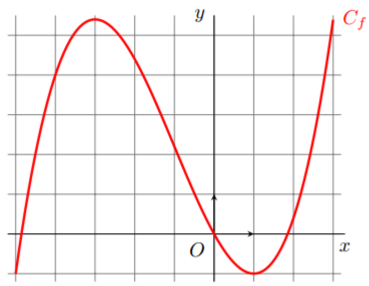
- $f(x_0)$ قيمة حدية محلية عظمى للدالة يعني أنه يوجد مجال مفتوح J محتوى في I ويشمل x_0 بحيث من أجل كل x من J ، $f(x) \leq f(x_0)$.
- $f(x_0)$ قيمة حدية محلية صغرى للدالة يعني أنه يوجد مجال مفتوح J محتوى في I ويشمل x_0 بحيث من أجل كل x من J ، $f(x) \geq f(x_0)$.
- $f(x_0)$ قيمة حدية محلية للدالة يعني أن $f(x_0)$ قيمة حدية محلية عظمى أو صغرى

المدة: 10 د

المراحل	التسيير (الأنشطة المرافقة لكل مرحلة)	المدة	ملاحظات

مثال :

f الدالة المعرفة على المجال $[-4;4]$ بـ: $f(x)=\frac{1}{5}(x^3+3x^2-9x)$ تمثيلها موضح في الشكل المقابل .



5 د

نلاحظ أن : $\frac{27}{5}$ هي قيمة حدية محلية عظمى للدالة عند $x=-3$ و -1 قيمة حدية محلية صغرى للدالة عند $x=1$

مبرهنة (تقبل دون برهان) : f دالة قابلة للإشتقاق على مجال مفتوح I من $\mathbb{R}$ و x_0 عدد حقيقي من I .
إذا انعدمت الدالة المشتقة f' عند x_0 مغيرة إشارتها فإن: $f(x_0)$ قيمة حدية محلية للدالة f .

ملاحظات :

❶ النقطة $(x_0;f(x_0))$ تسمى نقطة حدية (ذروة) و المماس عند هذه النقطة يكون مواز لحامل محور الفواصل معادلته هي : $y=f(x_0)$

❷ إذا قبلت f قيمة حدية محلية عند x_0 فإن : $f'(x_0)=0$

تمرين تطبيقي :

أدرس إتجاه تغير الدوال التالية و عين القيم الحدية المحلية إن وجدت :

❶ $f(x)=-x^4+2x^2+1$ ❷ $g(x)=\frac{1}{2}x^2+x+\frac{4}{x-2}$

❸ $k(x)=(2x-3)\sqrt{x}$ ❹ $h(x)=\sqrt{x^3+1}$

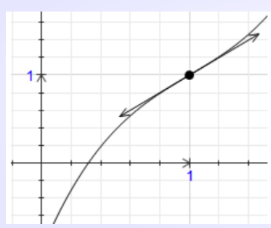
15 د

ملاحظات: مناقشة التطبيق من طرف التلاميذ

❸ **نقطة انعطاف منحنى :**

تعريف:

نقطة الإنعطاف هي النقطة التي يخترق فيها المماس المنحنى البياني .



مبرهنة : f دالة قابلة للإشتقاق مرتين على مجال مفتوح يشمل x_0
⋆ إذا انعدمت المشتقة الثانية f'' عند x_0 مغيرة إشارتها فإن النقطة التي إحداثياتها $(x_0;f(x_0))$ تسمى : نقطة إنعطاف لمنحنى الدالة f .

10 د

مثال :

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=x^3-3x^2+1$

⋆ لنبين أن منحنى الدالة f يقبل نقطة إنعطاف

ملاحظة :

تقويم

✍ إذا انعدمت f' عند x_0 و لا تغير من إشارتها بجوار x_0 فإن النقطة التي إحداثياتها $(x_0;f(x_0))$ تسمى : نقطة إنعطاف لمنحنى الدالة f .

مثلا : الدالة $x\mapsto x^3$ مشتقتها الأولى تنعدم و لا تغير إشارتها بجوار $x_0=0$.

حل التمرين 67 ص 64 و 70 ص 65

10 د

ملاحظات عامة حول الحصة: ....

المؤسسة: سليماني جلول — الأستاذ: بلبحري كمال — المادة : رياضيات

المستوى و الشعبة : الثالثة علوم تجريبية

المحتوى المعرفي : الإشتقاقية

الكفاءات المستهدفة: – استعمال المشتقات لدراسة خواص دالة أو المنحنى الممثل لها (التغيرات ، التقريب الخطي ،...) .

– سير الحصة

المراحل	التسيير (الأنشطة المرافقة لكل مرحلة)	المدة	ملاحظات

الإنطلاق:

⋆ التهيئة النفسية: التذكير بأحسن تقريب تآلفي لدالة بجوار عدد حقيقي x_0 .

التقريب التآلفي:

خاصية:

f دالة معرفة على مجال مفتوح I من $\mathbb{R}$

إذا قبلت الدالة f الإشتقاق عند العدد x_0 من I فإنه توجد دالة ε بحيث من أجل كل عدد حقيقي h حيث x_0+h ينتمي إلى I لدينا: $f(x_0+h)=f(x_0)+hf'(x_0)+h\varepsilon(h)$ مع $\lim\limits_{h\to 0}\varepsilon(h)=0$.

من أجل h قريب من 0 نكتب : $\boxed{f(x_0+h)\simeq f(x_0)+hf'(x_0)}$.

ونسمي $f(x_0)+hf'(x_0)$ التقريب التآلفي لـ : $f(x_0+h)$ من أجل h قريب من 0 .

المدة: 10 د

بناء المفاهيم:

برهان :

ليكن x_0 من I و لدينا f قابلة للإشتقاق عند x_0

و منه : $f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

بوضع : $\varepsilon(h)=\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}-f'(x_0)$

يكون لدينا : $\lim\limits_{h\to 0}\varepsilon(h)=f'(x_0)-f'(x_0)=0$

إذن : $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\varepsilon(h)+f'(x_0)$

و منه : $f(x_0+h)=f(x_0)+hf'(x_0)+h\varepsilon(h)$

مثال : f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2+1}$.

✦ باستعمال تقريب تآلفي للدالة f لنحسب قيمة مقربة إلى 10^{-2} للعدد $f(1.0001)$:

لدينا: $f'(x)=\dfrac{-x^2+4x+1}{(x^2+1)^2}$ ، $f(1)=-\dfrac{1}{2}$ و $f'(1)=1$.

ومنه : $f(1.0001)=f(1+0.0001)\simeq f(1)+0.0001f'(1)$.

إذن : $f(1.0001)\simeq -0.50$.

المدة: 10 د

ملاحظة :

✣ نضع : $x=x_0+h$ أحسن تقريب تآلفي للدالة f يصبح كالتالي : $f(x)\simeq f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$.

مثال : أحسن تقريب تآلفي للدالة $x\mapsto\sqrt{x+1}$ بجوار 0 هي الدالة التآلفية $x\mapsto\frac{1}{2}x+1$

و نكتب : $\sqrt{x+1}\approx\frac{1}{2}x+1$ بجوار 0

المراحل	السير (الأنشطة المرافقة لكل مرحلة)	المدة	ملاحظات

طريقة أولر:

f دالة عددية معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$ دالتها المشتقة f' و $f(x_0) = y_0$.

تسمح طريقة أولر بإنشاء تمثيلات بيانية تقريبية للدالة f باتباع الخطوات التالية :

- ✣ نعلم النقطة $A_0(x_0, y_0)$ ثم نستعمل التقريبات التآلفية بأخذ خطوة h .
- ✣ نضع : $x_1 = x_0 + h$ ومنه : $y_1 = f(x_1) = f(x_0 + h)$.

ولكن : $f(x_0 + h) \simeq f(x_0) + hf'(x_0)$ وهكذا نكون قد عينا النقطة $A_1(x_1; y_1)$.

- ✣ نضع $x_2 = x_1 + h$ إذن : $y_2 = f(x_2) = f(x_1 + h)$

و $f(x_1 + h) \simeq f(x_1) + hf'(x_1)$ ثم نعلم النقطة الثالثة $A_2(x_2; y_2)$.

وهكذا نعلم بعض النقاط ثم نصل بينها فنتحصل على تمثيل بياني تقريبي للدالة f .

تمرين تطبيقي : — 15 د

أنشيء منحنى تقريبي بطريقة أولر للدالة f على المجال $[1; 2]$

حيث : $f(1) = 1$ و $f'(x) = 2x$

طريقة: لتعيين قيمة مقربة لـ $f(x_0 + h)$ نستعمل التقريب :

$f(x_0 + h) \simeq f(x_0) + hf'(x_0)$ حيث : h قريب من الصفر .

مناقشة التطبيق من طرف التلاميذ

الحل :

نختار مثلا الخطوة $h = 0.1$ و نقوم بمسح المجال $[1; 2]$

لدينا مثلا : $f(1.1) \simeq f(1) + 0.1f'(1) \simeq 1.20$

و نتبع نفس الطريقة .

حل التمرين 02صفحة51 . — 25 د

إنشاء تمثيل بياني للدالة f على المجال $[0; 5]$

حيث : $f(0) = 1$ و $f'(x) = \sqrt{x}$

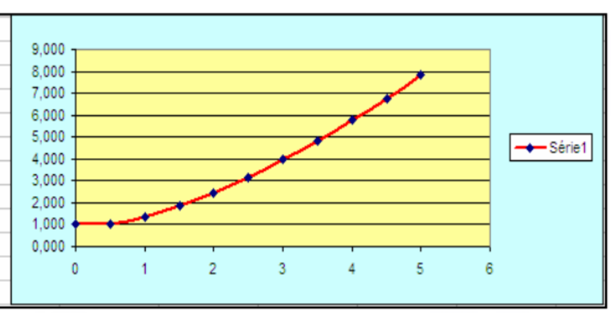
الخطوة هي $h = 0.5$

✦ لدينا : $f(0.5) \simeq f(0) + 0.5f'(0) \simeq 1$

و لدينا : $f(1) \simeq f(0.5) + 0.5f'(0.5) \simeq 1 + 0.5\sqrt{0.5} \simeq 1.354$

نواصل بنفس الطريقة ونلخص النتائج في الجدول الموالي :

x	f(x)
0	1,000
0,5	1,000
1	1,354
1,5	1,854
2	2,466
2,5	3,173
3	3,964
3,5	4,830
4	5,765
4,5	6,765
5	7,826



تقويم

ملاحظات عامة حول الحصة: ....