الرقم:01/ 25

| | |
|---|---|
| المؤسســـة: | المستـــوى: 3 رياضي، 3ت رياضي، 3ع تج |
| السنة الدراسية: 2015 / 2016. | ميدان التعلم: تحليل |
| التاريـــخ: ........................................................ .......... | الوحدة: النهايات والاستمرارية |
| توقيت الحصـة:. | موضوع الحصة: حساب نهاية دالة. |

## المكتسبات القبلية:

**الكفاءات القاعدية:** حساب نهاية منتهية أو غير منتهية لدالة عند الحدود (المنتهية أو غير المنتهية) لمجالات مجموعة التعريف.

**مؤشرات الكفـاءة:** حساب نهاية دالة.

---

### الأنشطة المقترحة وتطبيقها

## نشاط:

لتكن الدالة $f: x \mapsto \dfrac{2x^2+3}{x^2}$

1) حدد مجموعة تعريف $f$ .

2) بين أنه من أجل كل $x \in D_f$ يكون: $f(x) = 2 + \dfrac{3}{x^2}$

3) هل توجد قيم لـ $x$ يكون من أجلها $f(x) > 10^{10}$ ؟ ما هو تعليقك؟

4) أكمل الجدول التالي، ثم استنتج $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x)$ ، $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ .

| $x$ | $10^{-5}$ | $10^{-3}$ | $0.1$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | |

| $0.25$ | $0.5$ | $1$ | $2$ | $3$ |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |

| $10$ | $10^3$ | $10^5$ | $10^{10}$ |
|---|---|---|---|
| | | | |

5) اعتمادا على ما سبق، وعلى شفعية $f$ أنشئ في المستوي المزود بمعلم م م $(C_f)$ .

6) هل يعطي $(C_f)$ تفسيرا بيانيا للنهايتين السابقتين؟

---

### الإنجاز (سير الحصة)

**I/ تمهيد:**

**II/ العرض:** النهايات (تذكير وتتمات)

### 1/ نهاية دالة عند $x_0$ :

**تعريف1:** القول إن نهاية الدالة $f$ عند $x_0$ هي $+\infty$ يعني أنه من أجل كل عدد حقيقي $A$ ، يوجد عدد حقيقي موجب تماما $B$ ، بحيث: إذا كان $|x - x_0| < B$ فإن $f(x) > A$ (أي يمكن جعل $f(x)$ أكبر من أي عدد حقيقي اذا كان $x$ قريبا بالقدر الكافي من $x_0$ )

ونكتب $\boxed{\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty}$.

**تعريف2:** القول إن نهاية الدالة $f$ عند $x_0$ هي $l$ يعني أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما $A$ ، يوجد عدد حقيقي موجب تماما $B$ ، بحيث: إذا كان $|x - x_0| < B$ فإن $|f(x) - l| < A$ (أي يمكن جعل $f(x)$ أقرب من أي عدد حقيقي إلى $l$ اذا كان $x$ قريبا بالقدر الكافي من $x_0$ ) ونكتب $\boxed{\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l}$.

### 2/ نهاية دالة عند $+\infty$ :

**تعريف3:** القول أن نهاية الدالة $f$ عند $+\infty$ هي $+\infty$ يعني أنه من أجل كل عدد حقيقي $A$ ، يوجد عدد حقيقي $B$ ، بحيث: إذا كان $x > B$ فإن $f(x) > A$ (أي يمكن جعل $f(x)$ أكبر من أي عدد حقيقي اذا كان $x$ كبيرا بالقدر الكافي) ونكتب $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$.

**ملاحظات:**

أ/ يمكن الحصول على تعاريف لنهايات أخرى بنفس الطريقة.

ب/ $|x - x_0| < B$ معناه $x \in \left]x_0 - B, x_0 + B\right[$ .

جـ/ إذا قبلت دالة نهاية فهي وحيدة.

### 3/ النهاية من اليمين والنهاية من اليسار:

**تعريف4:** القول أن نهاية الدالة $f$ عند $x_0$ بقيم أكبر (أو على يمين $x_0$ ) هي $+\infty$ يعني أنه من أجل كل عدد حقيقي $A$ ، يوجد عدد حقيقي موجب تماما $B$ بحيث: إذا كان $0 < x - x_0 < B$ فإن $f(x) > A$ (أي يمكن جعل $f(x)$ أكبر من أي عدد حقيقي إذا كان $x$ قريبا بالقدر الكافي من $x_0$ و $x > x_0$ ) ونكتب $\boxed{\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ >}} f(x) = +\infty}$.

**تعريف5:** القول أن نهاية الدالة $f$ عند $x_0$ بقيم أصغر (أو على يسار $x_0$ ) هي $+\infty$ يعني أنه من أجل كل عدد حقيقي $A$ ، يوجد عدد حقيقي موجب تماما $B$ بحيث: إذا كان $0 < x_0 - x < B$ فإن $f(x) > A$ (أي يمكن جعل $f(x)$ أكبر من أي عدد حقيقي إذا كان $x$ قريبا بالقدر الكافي من $x_0$ و $x < x_0$ ) ونكتب $\boxed{\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ <}} f(x) = +\infty}$.

**ملاحظة هامة:** ( $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ <}} f(x) = l$ و $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ >}} f(x) = l$ تكافئ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ ).

## III/ تطبيق: من رقم 12 إلى رقم 17 ص 26 و27.

---

### توجيهات ـ تعاليق ـ أمثلة لأنشطة

ننطلق من وضعيات ذات دلالة تتعلق بالدوال المدروسة في السنة الثانية ثانوي، و نهتم فقط بدوال تكون مجموعة تعريفها معطاة أو سهلة التعيين.

- تدعيم مكتسبات التلاميذ حول مفهوم النهاية في وضعيات بسيطة (مثلا النهاية المنتهية عند عدد حقيقي $x_0$ ) وتوظيف ذلك في أمثلة بسيطة ثم توسع إلى وضعيات أخرى. ولتوضيح ذلك، نعتمد على تمثيلات بيانية باستعمال برمجيات مناسبة كالمجدولات كما يمكن توظيف الحاسبة البيانية: بإزاحة النافذة نحو اليسار عندما يؤول $x$ إلى $-\infty$ بإزاحة النافذة نحو اليمين عندما يؤول $x$ إلى $+\infty$ بإنجاز تكبير للنافذة بجوار $x_0$ عندما يؤول $x$ إلى $x_0$ . وذلك لتخمين نهاية أو المصادقة عليها.

تستغل هذه المناسبة للتذكير بالمستقيم المقارب الموازي لحامل محور الفواصل.

تعديل2008/2009: يحذف تعيين مجموعة تعريف دالة.

**الرقم:** 02/ 25

| | |
|---|---|
| **المؤسســـــة:** | **المستــــوى:** 3 رياضي، 3ت رياضي، 3ع تج |
| **السنة الدراسية:** 2015 / 2016. | **ميدان التعلم:** تحليل |
| **التاريـــــــخ:** ............................................ .......... | **الوحدة:** النهايات والاستمرارية |
| **توقيت الحصــة:** ساعتان. | **موضوع الحصة:** حساب نهاية باستعمال المبرهنات |

**المكتسبات القبلية:**

**الكفاءات القاعدية:** حساب نهاية باستعمال المبرهنات المتعلقة بالعمليات على النهايات.

**مؤشرات الكفـاءة:** حساب نهايات دالة اعتمادا على نهايات معروفة.

| *الأنشطة المقترحة وتطبيقها* | *الإنجاز (سير الحصة)* | توجيهات ـ تعاليق ـ أمثلة لأنشطة |
|---|---|---|

**نشاط:**

أحسب نهايات كل دالة مما يلي عند أطراف مجالات تعريفها.

$f: x \mapsto -\sqrt{x} + x$

$g: x \mapsto (x^2+1)(2x-1)$

$h: x \mapsto \dfrac{-1}{\sqrt{|x|}}$

$t: x \mapsto \dfrac{x^2-1}{x^2-x}$.

**I/ تمهيد:**

**II/ العرض:**

**مبرهنات أولية على النهايات:**

$f$ و $g$ دالتان، $x_0$ و $l$ ، $l'$ أعداد حقيقية؛ نقبل دون برهان، النتائج التالية المعطاة على شكل جداول.

**أ- نهاية المجموع:**

| إذا كانت $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ هي: | وكانت $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ هي: | فإن $\lim\limits_{x\to x_0} (f+g)(x)$ هي: |
|---|---|---|
| $l$ | $l'$ | $l+l'$ |
| $l$ | $+\infty$ | $+\infty$ |
| $l$ | $-\infty$ | $-\infty$ |
| $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ |
| $-\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ |
| $+\infty$ | $-\infty$ | حالة عدم تعيين |

**ب- نهاية الجداء:**

| إذا كانت $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ هي: | وكانت $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ هي: | فإن $\lim\limits_{x\to x_0} (f\times g)(x)$ هي: |
|---|---|---|
| $l$ | $l'$ | $l\times l'$ |
| $l\,(l>0)$ | $+\infty$ | $+\infty$ |
| $l\,(l<0)$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
| $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ |
| $0$ | $+\infty$ أو $-\infty$ | حالة عدم تعيين |

**ملاحظة:** الحالتان $(+\infty,-\infty)$ ، $(-\infty,-\infty)$ تستنتجان من الحالة $(+\infty,+\infty)$ .

**جـ- نهاية المقلوب:**

| إذا كانت $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ هي: | فإن $\lim\limits_{x\to x_0} (\frac{1}{f})(x)$ هي: |
|---|---|
| $;l\ \ (l\neq 0)$ | $\frac{1}{l}$ |
| $+\infty$ | $0$ |
| $-\infty$ | $0$ |
| $0;\ (f(x)>0)$ | $+\infty$ |
| $0;\ (f(x)<0)$ | $-\infty$ |

**د- نهاية حاصل القسمة:** لحساب نهاية حاصل قسمة دالتين نعتمد على المقلوب والجداء.

**هـ- نهاية الجذر التربيعي لدالة:** (نعتبر الآن $l$ موجبا)

| إذا كانت $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ هي: | فإن $\lim\limits_{x\to x_0} \sqrt{f(x)}$ هي: |
|---|---|
| $l$ | $\sqrt{l}$ |
| $+\infty$ | $+\infty$ |

**ملاحظة:** تبقى النتائج السابقة صحيحة من أجل $x\to+\infty$ أو $x\to-\infty$ .

**III/ تطبيق:** من رقم 18 إلى رقم 29 ص27 و28.

تعطي المبرهنات الشهيرة المتعلقة بمجموع و جداء وحاصل قسمة نهايتين دون برهان.(يمكن أن يقدم برهانا عن حالة بسيطة).

تعديل2008/2009: يحذف تعيين مجموعة تعريف دالة.

الرقم:25/03

| | |
|---|---|
| المؤسســـــة: | المستـــــوى: 3 رياضي، 3ت رياضي، 3ع تج |
| السنة الدراسية:2015 / 2016. | ميدان التعلم: تحليل |
| التاريــــــخ: ........................................... .......... | الوحدة: النهايات والاستمرارية |
| توقيت الحصـة:. | موضوع الحصة: حساب نهاية باستعمال المبرهنات |

**المكتسبات القبلية:**

**الكفاءات القاعدية:** حساب نهاية باستعمال المبرهنات المتعلقة بالمقارنة وتركيب دالتين.

**مؤشرات الكفـاءة:**

| الأنشطة المقترحة وطبيعتها | الإنجاز (سير الحصة) | توجيهات ـ تعاليق ـ أمثلة لأنشطة |
|---|---|---|

### الأنشطة المقترحة وطبيعتها

**نشاط1:**

1) أحسب كلا مما يلي:

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3+x^2-4x+2}{x^2-1}$

$\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\sqrt{2x+1}$

$\lim\limits_{x\to1}\sqrt{2\dfrac{x^3+x^2-4x+2}{x^2-1}+1}$

2) نعتبر الدالة $f$ حيث $f(x)=\dfrac{4+\sin x}{x^2}$.

- حدد مجموعة تعريفها.
- عين عددين حقيقيين $a$ ، $b$ بحيث من أجل كل عدد $x$ يتحقق: $a\le 4+\sin x\le b$ واستنتج عبارة دالتين $g$ و $h$ حيث من أجل كل $x$ من $D_f$ يكون: $h(x)\le f(x)\le g(x)$.
- أحسب نهايات $f$ عند أطراف مجموعة تعريفها.

**نشاط2:** أحسب ما يلي:

$\lim\limits_{x\to+\infty}(2x^2-3x+5)$

$\lim\limits_{x\to-\infty}(2x^2-3x+5)$

$\lim\limits_{x\to-\infty}(-x^3-3x^2+5)$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^3-3x+1}{-3x^3-3x^2+1}$

### الإنجاز (سير الحصة)

**I/ تمهيد:**

**II/ العرض:** **مبرهنات أولية على النهايات:**

**1ـ نهاية مركب دالتين:**

**مبرهنة1:** $a$ ، $b$ و $c$ أعداد حقيقية.

إذا كانت $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b$ و $\lim\limits_{x\to b}g(x)=c$ فإن: $\lim\limits_{x\to a}(gof)=c$

**2ـ النهايات بالمقارنة:** $f$ ، $g$ و $h$ دوال معرفة على مجال $I$ يشمل $x_0$.

**مبرهنة2:** (الحد من الأسفل) إذا كان على كل المجال $I$: $f(x)\le g(x)$ وكانت $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=+\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=+\infty$.

**مبرهنة3:** (الحد من الأعلى) إذا كان على كل المجال $I$: $f(x)\le g(x)$ وكانت $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=-\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=-\infty$.

**مبرهنة4:** (الحصر) إذا كان على كل المجال $I$: $h(x)\le f(x)\le g(x)$ وكانت $\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=l$ فإن $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=l$.

**ملاحظة:** تبقى المبرهنات السابقة صحيحة من أجل $x\mapsto+\infty$ أو $x\mapsto-\infty$.

**3ـ نهايات بعض الدوال المألوفة:**

**أـ الدالة كثيرة الحدود :**

$\boxed{\text{نهاية كثيرة حدود عند } +\infty \text{ أو } -\infty \text{ هي نهاية حدها الأعلى درجة.}}$

**ب- الدالة الناطقة :**

نهاية دالة ناطقة عند $+\infty$ أو $-\infty$ هي نهاية حاصل قسمة حدها الأعلى درجة في البسط على حدها الأعلى درجة في المقام.

**III/ تطبيق:ت1:** من رقم 30 إلى رقم 37 ص28.

**ت2:** عين مجموعة تعريف كل دالة المعرفة فيما يلي ثم احسب النهايات عند أطرافها.

$f(x)=\dfrac{3x^3+x-4}{x-1}$ ؛ $g(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2-5x+6}$ ؛ $h(x)=\dfrac{x^3+3x^2-4x-12}{x^2+4x+3}$.

**ت3:** تذكر أن مشتقة الدالة $\sin$ هي $\cos$، واحسب $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}$.

**ت4:** احسب النهايات التالية: $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+x-6}{\sqrt{x-2}}$ (اضرب في $\sqrt{x-2}$)،

$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x}{\sqrt{x+1}-1}$ ، $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{x+5}-3}{\sqrt{x}-\sqrt{2x-4}}$ (استعمل مرافقي البسط والمقام)،

$\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)$ (اضرب واقسم على المرافق)،

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{\sin 3x}$ ، $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x}{x}$ ، $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x}{\tan x}$ ، $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\sin x}{1-\cos x}$ (اضرب في المرافق وانشر البسط).

### توجيهات ـ تعاليق ـ أمثلة لأنشطة

- تعطى مبرهنات الحصر (نهاية منتهية، غير منتهية، وكذا المبرهنة التي تربط الترتيب بين دالتين والترتيب بين نهايتين).
- حساب نهاية دالة مركبة $gof$ يطبق في الحالة التي تكون فيها $g$ الدالة مألوفة.

تعديل2008/ 2009: يحذف تعيين مجموعة تعريف دالة. نقتصر على الدوال المرجعية بدل المألوفة في معالجة نهاية مركب دالتين.

**الرقم:** 04/ 25

| | |
|---|---|
| **المؤسســـــة:** | **المستـــوى:** 3 رياضي، 3ت رياضي، 3ع تج |
| **السنة الدراسية:** 2015 / 2016. | **ميدان التعلم:** تحليل |
| **التاريـــــخ:** ................................................... | **الوحدة:** النهايات والاستمرارية |
| **توقيت الحصـة:** . | **موضوع الحصة:** السلوك التقاربي لدالة. |

**المكتسبات القبلية:**

**الكفاءات القاعدية:** دراسة السلوك التقاربي لدالة.

**مؤشرات الكفـاءة:**

| الأنشطة المقترحة وطبيعتها | الإنجاز (سير الحصة) | توجيهات ـ تعاليق ـ أمثلة لأنشطة |
|---|---|---|
| **نشاط:** المستوي مزود بمعلم، ولتكن الدوال المعرفة بعباراتها:<br>$f(x)=\sqrt{4-x^2}$ ،<br>$g(x)=2+\dfrac{1}{x-1}$ ،<br>$h(x)=\dfrac{x^2+3x+1}{x+1}$ .<br>**1-** حدد مجموعات تعريفها، ثم أحسب نهاياتها عند أطرافها.<br>**2-** أحصر $f(x)$ .<br>**3-** استعن ببعض القيم لـ $x$ وأنشئ $(C_f)$ .<br>**4-** خمن التمثيل البياني لـ $g$ على المجال $]1,+\infty[$ .<br>**5-** بين أن:<br>$h(x)=x+2-\dfrac{1}{x+1}$<br>وأحسب $a$ ، $b$ حيث $a=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{h(x)}{x}$ ،<br>$b=\lim\limits_{x\to+\infty}[h(x)-ax]$ .<br>**6-** أحسب:<br>$\lim\limits_{x\to+\infty}[h(x)-(ax+b)]$ | **I/ تمهيد:**<br>**II/ العرض:** **السلوك التقاربي لدالة:**<br>$(C_f)$ التمثيل البياني للدالة $f$ في المستوي المزود بمعلم، و $x\in D_f$ .<br>**الفرع اللانهائي:** إذا أمكن جعل $\lvert x\rvert$ أو $\lvert f(x)\rvert$ يؤول إلى $+\infty$ نقول إن $(C_f)$ يقبل فرعا لانهائيا.<br>**المستقيمات المقاربة والفروع المكافئة:**<br>أ- إذا كان $\lim\limits_{x\to x_0}\lvert f(x)\rvert=+\infty$ فإن المستقيم $(\Delta):x=x_0$ مقارب لـ $(C_f)$ .<br>ب - إذا كان $\lim\limits_{\lvert x\rvert\to+\infty} f(x)=y_0$ فإن المستقيم $(\Delta):y=y_0$ مقارب لـ $(C_f)$ .<br>جـ - إذا كان $\lim\limits_{\lvert x\rvert\to+\infty}\lvert f(x)\rvert=+\infty$ ، نحسب $\lim\limits_{\lvert x\rvert\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ ، نميز 4 حالات التالية:<br>أولا: إذا كان $\lim\limits_{\lvert x\rvert\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$ ، $(C_f)$ يقبل فرعا مكافئا باتجاه محور الفواصل.<br>ثانيا: إذا كان $\lim\limits_{\lvert x\rvert\to+\infty}\left\lvert\dfrac{f(x)}{x}\right\rvert=+\infty$ ، $(C_f)$ يقبل فرعا مكافئا باتجاه محور التراتيب.<br>ثالثا: إذا كان $\lim\limits_{\lvert x\rvert\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a$ و $a\neq0$ و $\lim\limits_{\lvert x\rvert\to+\infty}\lvert f(x)-ax\rvert=+\infty$ ، $(C_f)$ يقبل فرعا مكافئا باتجاه المستقيم المعرف بالمعادلة $y=ax$ .<br>رابعا: إذا كان $\lim\limits_{\lvert x\rvert\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a$ و $a\neq0$ و $\lim\limits_{\lvert x\rvert\to+\infty}\lvert f(x)-ax\rvert=b$ ، فإن المستقيم المعرف بالمعادلة $y=ax+b$ مقارب لـ $(C_f)$ .<br>**ملاحظة:**<br>المستقيم $(\Delta):y=ax+b$ مقاربا لـ $(C_f)$ **معناه** $\lim\limits_{\lvert x\rvert\to+\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$<br>**III/ تطبيق:**<br>**ت1)** أ/ أدرس الفروع اللانهائية للتمثيلات البيانية في المستوي المنسوب إلى معلم، للدوال المعرفة فيما يلي: $f:x\mapsto x^2$ ، $g:x\mapsto\sqrt{-x}$ ، $h:x\mapsto\dfrac{1-x^2}{x}$ . ب/ باستخدام الحاسبة البيانية مثل بيانيا هذه الدوال، وتحقق من دراستك السابقة.<br>**ت2)** بين أن المستقيم $(l):y=2x-1$ مقارب لتمثيل الدالة $x\mapsto\dfrac{2x^2-x+1}{x}$ .<br>**ت3)** من رقم 01 إلى رقم 11 ص26. | تسمح الملاحظة عند استعمال برمجيات مناسبة أو حاسبة بيانية بتخمين وجود مستقيم مقارب أو منحن مقارب للمنحنى الممثل لدالة ، وتحديد الوضعية النسبية لهما و تبرر النتائج الملاحظة عن طريق الحساب.<br>تعديل2009/2008: يحذف تعيين مجموعة تعريف دالة. |

**الرقم:** 05/ 25

| | |
|---|---|
| **المؤسســـــة:** | **المستـــوى:** 3 رياضي، 3ت رياضي، 3ع تج |
| **السنة الدراسية:** 2015 / 2016. | **ميدان التعلم:** تحليل |
| **التاريـــــخ:** ........................................................ ........... | **الوحدة:** النهايات والاستمرارية. |
| **توقيت الحصـة:**. | **موضوع الحصة:** استمرار دالة |

**المكتسبات القبلية:**

**الكفاءات القاعدية:** استعمال مبرهنة القيم المتوسطة لإثبات وجود حلول للمعادلة $f(x)=k$، $k$ عدد حقيقي معطى.

**مؤشرات الكفـاءة:**

| الأنشطة المقترحة وطبيعتها | الإنجاز (سير الحصة) | توجيهات - تعاليق - أمثلة لأنشطة |
|---|---|---|
| | | |

### الأنشطة المقترحة وطبيعتها

**نشاط:**

المستوي مزود بمعلم، ولتكن الدوال المعرفة بعباراتها:

$f(x)=x^2$ ، $g(x)=\sqrt{x-1}$ ، $h(x)=[x]$.

- جد مجموعة تعريفها.
- أحسب $f(1)$ ، $g(1)$ ، $h(1)$ ، $\lim\limits_{x\to1} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to1} g(x)$ ، $\lim\limits_{x\to1} h(x)$.
- مثل بيانيا هذه الدوال.

### الإنجاز (سير الحصة)

## I/ تمهيد:

## الاستمرار

## II/ العرض:

**استمرار دالة عند $x_0$ :**

**تعريف1:** $f$ دالة عددية معرفة عند $x_0$ ، و $x_0$ غير معزول في $D_f$ .

إذا كان $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ نقول إن $f$ مستمرة عند $x_0$ .

مثال: أدرس استمرارية الدوال التالية عند3: $f(x)=2x-1$ ، $g(x)=\sqrt{x-3}$ ، $h(x)=[x+2]$ .(أحسب النهاية من اليمين ومن اليسار إذا اقتضى الأمر)

**استمرارية دالة على مجال:**

**تعريف2:** $f$ دالة عددية معرفة على مجال $I$ من $R$ مفتوح.

إذا كانت $f$ مستمرة عند كل قيمة من $I$ نقول إنها مستمرة على $I$ .

**نتائج:-** الدالة المستمرة على المجال $[a , b]$ تمثيلها البياني خط غير منقطع بدايته النقطة ذات الفاصلة $a$ ، ونهايته النقطة ذات الفاصلة $b$.

- الدوال كثيرات الحدود مستمرة على $R$ . والدوال الناطقة مستمرة على كل مجال من مجالات تعريفها.

* $f$ ، $g$ دالتان، $x_0$ ، $\lambda$ عددان حقيقيان.

- إذا كانت $f$ مستمرة عند $x_0$ ، و $g$ مستمرة عند $f(x_0)$ ، تكون $gof$ مستمرة عند $x_0$ .
- إذا كانت $f$ و $g$ مستمرتين عند $x_0$ ، تكون الدوال $f+g$ ، $f\times g$ ، $\lambda f$ ، $\dfrac{f}{g}$ $(g(x_0)\neq0)$ مستمرة عند $x_0$ .
- استمرار دالة عند عدد معناه استمرارها عنده من اليمين ومن اليسار.
- إذا كانت $f$ مستمرة عند $x_0$ (أو على يمينه أو على يساره)، فإنها معرفة عنده.
- إذا كانت $f$ معرفة على المجال $[a,b]$، ومستمرة على $]a,b[$ و على $a$ من اليمين وعلى $b$ من اليسار، نقول إنها مستمرة على $[a,b]$.

## III/ تطبيق:

**ت1)** من رقم 42 إلى رقم 49 ص29.

**ت2)** نعرف الدالة $f$ على $R$ كما يلي: $f(x)=x^2+1$ إذا كان $x\geq0$ و $f(x)=-x$ إذا كان $x<0$ .

1/ من أجل $x$ موجب تماما أدرس استمرارية $f$ عند0. ثم من أجل $x$ موجب تماما.

2/ ما الخلاصة حول استمرار $f$ عند0؟

3/ أدرس استمرار الدالة $h$ حيث $(h(x)=[x+2])$ عند 3.

4/ أدرس استمرار الدالة $f : x\mapsto\sqrt{1-x}$ عند 1.

### توجيهات - تعاليق - أمثلة لأنشطة

من أجل كل عدد حقيقي $a$ غير معزول في مجموعة تعريف الدالة $f$؛ نعرف استمرارية $f$ عند $a$ كما يلي:

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$

- من خلال دوال مثل: $x\mapsto x^2$ ، $x\mapsto|x|$ ، $x\mapsto\sqrt{x}$ نجعل التلاميذ يلاحظون أن الدالة تكون مستمرة على مجال، عندما يمكن رسم منحنيها البياني على هذا المجال دون رفع القلم.
- تقترح أمثلة لدوال غير مستمرة مثل: $x\mapsto[x]$ ، $x\mapsto x-[x]$ مع تمثيلهما بيانيا. حيث يرمز $[x]$ إلى الجزء الصحيح للعدد الحقيقي $x$.
- كل الدوال المألوفة المقررة في هذا المستوى مستمرة على كل مجال من مجموعة تعريفها.
- لا تثار مسألة البحث في إثبات استمرارية دالة إلا في حالات بسيطة.

تعديل2008/2009: يحذف تعيين مجموعة تعريف دالة.

الرقم:06/ 25

| | |
|---|---|
| المؤسســـــة: | المستـــوى: 3 رياضي، 3ت رياضي، 3ع تج |
| السنة الدراسية:2015 / 2016. | ميدان التعلم: تحليل |
| التاريـــــخ: ................................................ .......... | الوحدة: النهايات والاستمرارية. |
| توقيت الحصـة: | موضوع الحصة: مبرهنة القيم المتوسطة وتطبيقاتها. |

**المكتسبات القبلية:**

**الكفاءات القاعدية:** استعمال مبرهنة القيم المتوسطة لإثبات وجود حلول للمعادلة $f(x)=k$، $k$ عدد حقيقي معطى.

**مؤشرات الكفـاءة:**

| الأنشطة المقترحة وطبيعتها | الإنجاز (سير الحصة) | توجيهات - تعاليق - أمثلة لأنشطة |
|---|---|---|

**نشاط:**

نعتبر الدالة $f: x \mapsto x^3+1$ معرفة على المجال $\left[-\frac{3}{2},2\right]$.

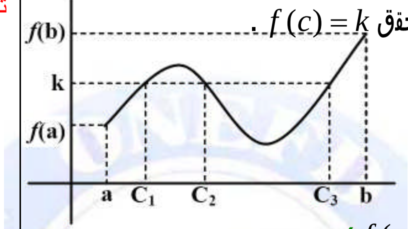
- أدرس استمرار $f$ على هذا المجال.
- أنشئ التمثيل البياني لها.
- اختر العدد $k$ حيث $f(-\frac{3}{2})<k<f(2)$ وادرس هندسيا وجود حلول المعادلة $f(x)=k$ على المجال $\left[-\frac{3}{2},2\right]$.

## I/ تمهيد:

## II/ العرض: مبرهنة القيم المتوسطة

**مبرهنة1: (القيم المتوسطة)** (نقبل بدون برهان المبرهنة التالية)

إذا كانت الدالة $f$ مستمرة على المجال $[a,b]$ فإنه من أجل كل عدد k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ يوجد عدد $c$ محصور بين a و b يحقق $f(c)=k$.




مثال1: في الشكل الموالي توجد ثلاث أعداد.

**مبرهنة2:** في المبرهنة السابقة إذا كانت $f$ رتيبة تماما على $[a,b]$ فإن العدد $c$ وحيد.

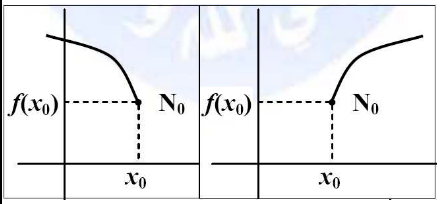
برهان:(بين أنه في حالة فرض وجود $c_1$، $c_2$ فإن $f(c_1)\neq f(c_2)$ )

**مبرهنة3:** إذا كانت الدالة $f$ مستمرة على المجال $[a,b]$، وكان $f(a)\times f(b)<0$ فإنه يوجد عدد $c$ من المجال $]a,b[$ يحقق $f(c)=0$. (البرهان سهل)

مثال2: بين أن المعادلة $x^3+x-1=0$ تقبل حلا في المجال $\left[\frac{1}{2},1\right]$.

**نقطة التوقف:** إذا كانت الدالة $f$ مستمرة عند $x_0$ من اليمين فقط، أو من اليسار فقط، نسمي النقطة $N_0(x_0,f(x_0))$ نقطة توقف

مثال3: أنظر الشكل المقابل ☜.




## III/ تطبيق: من رقم 50إلى رقم 67 ص من29 إلى 31.

**تطبيق آخر:** أكتب بالتفصيل الخطوات الضرورية لتفسير بيانيا المثال2 بحاسبة بيانية.

يجب أن تسأل هل نقطة التوقف مقررة؟

تعديل2009/2008: يحذف تعيين مجموعة تعريف دالة.

الرقم: 07/ 25

| | |
|---|---|
| **المؤسسة:** | **المستوى:** 3 رياضي، 3ت رياضي، 3ع تج |
| **السنة الدراسية:** 2015 / 2016. | **ميدان التعلم:** تحليل |
| **التاريخ:** ........................................... | **الوحدة:** الاشتقاقية |
| **توقيت الحصة:**. | **موضوع الحصة:** حساب مشتقات دوال. |

**المكتسبات القبلية:**

**الكفاءات القاعدية:** توظيف المشتقات لحل مشكلات.

**مؤشرات الكفاءة:**

## الأنشطة المقترحة وطبيعتها

**نشاط1:**

لتكن الدوال المعرفة بـ: $f(x)=x^2$ ، $g(x)=\sqrt{x}$ ، $h(x)=x^3-3x^2+x-1$ ، $s(x)=\dfrac{2x^2-1}{x+2}$ .

ـ أحسب باستخدام التعريف $f'(0)$ ، $f'(-1)$ ، $g'(0)$ ، $g'(1)$ .

ـ أكتب معادلة لمماس $(C_g)$ في المستوي المنسوب إلى معلم، عند النقطة التي فاصلتها 1.

ـ جد الدالة المشتقة لكل من الدالتين $h$ ، $s$ .

**نشاط2:** أدرس قابلية اشتقاق الدالة $f: x\mapsto |x|$ عند 0.

**إثبات أن الدالة القابلة للاشتقاق على مجال مستمرة عليه. (يمكن اقتراح هذه المسألة في واجب منزلي):**

لتكن $f$ دالة تقبل الاشتقاق على مجال $I$. وليكن $x_0$ عددا كيفيا منه. ولتكن الدالة:

$$\begin{cases} g(x)=\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} & si: x\neq x_0 \\ g(x_0) = f'(x_0) \end{cases}$$

1/ بين أن $g$ مستمرة على $I$.

2/ من أجل $x\neq x_0$ عبر عن $f(x)$ بدلالة $g(x)$، ثم استنتج $\lim_{x\to x_0} f(x)$.

3/ استنتج المطلوب.

## الإنجاز (سير الحصة)

### I/ تمهيد:

### II/ العرض:

**قابلية الاشتقاقية للدالة عند $x_0$:**

$f$ دالة معرفة على المجال D من R يشمل العدد $x_0$ . إذا كانت $\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=l$ نقول إن $f$ تقبل الاشتقاق عند $x_0$ ونسمي العدد $l$ عددها المشتق عند $x_0$ . ونكتب: $f'(x_0)=l$ . ونسمي النسبة $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ نسبة تزايد $f$ بين $x_0$ و $x_0+h$ .

**ملاحظة:** بوضع $h=x_1-x_0$ نجد نسبة التزايد هي $\dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$ .

**نتيجة:** $f$ تقبل الاشتقاق عند $x_0$ معناه عددها المشتق من يمين $x_0$ هو نفسه من يساره.

**التفسير الهندسي ومعادلة المماس:** في المستوي المنسوب إلى معلم ليكن $(C_f)$ التمثيل البياني لـ $f$ . وهي تقبل الاشتقاق عند $x_0$ من $D_f$ . إن مماس $(C_f)$ في النقطة $A(x_0, f(x_0))$ معرف بالمعادلة: $\boxed{y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)}$

**قابلية الاشتقاق على مجال:** إذا كانت دالة تقبل الاشتقاق عند كل قيمة من مجال، نقول إنها تقبل الاشتقاق على هذا المجال.

**نتيجة:** كل دالة تقبل الاشتقاق على مجال هي مستمرة على هذا المجال.(أنظر جزء الأنشطة)

**تعريف الدالة المشتقة:** الدالة المشتقة لدالة $f$ على مجال هي الدالة التي ترفق بكل عدد $a$ منه العدد $f'(a)$ ، ونرمز لها بـ $f'$ .

**مشتقات بعض الدوال (نتائج ومبرهنات):**

| عبارة الدالة | عبارة المشتقة | ميدان قابلية الاشتقاق | ملاحظات |
|---|---|---|---|
| $k$ | $0$ | $R$ | $k$ ثابت |
| $x^n$ | $nx^{n-1}$ | | $n\in N^*$ |
| $\sqrt{x}$ | $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ | $R_+^*$ | |
| $\dfrac{1}{x}$ | $\dfrac{-1}{x^2}$ | $R^*$ | |
| $\sin x$ | $\cos x$ | $R$ | |
| $\cos x$ | $-\sin x$ | | |
| $\lambda f(x)$ | $\lambda f'(x)$ | | $f$ تقبل الاشتقاق |
| $f(x)+g(x)$ | $f'(x)+g'(x)$ | | $f$ و $g$ تقبلان الاشتقاق |
| $f(x)\times g(x)$ | $f'(x)\times g(x)+f(x)\times g'(x)$ | | |
| $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ | $\dfrac{f'(x)\times g(x)-f(x)\times g'(x)}{g^2(x)}$ | | $f$ و $g$ تقبلان الاشتقاق و $g$ لا تنعدم |
| $\sqrt{f(x)}$ | $\dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$ | | $f$ تقبل الاشتقاق و $f(x)>0$ |

### III/ تطبيق:

من رقم01 إلى رقم24ص58إلى60. **تطبيق2:** جد مشتقة الدالة: $x\mapsto \tan x$ .

## توجيهات ـ تعاليق ـ أمثلة لأنشطة

ـ التذكير بالنتائج المحصل عليها في السنة الثانية.

ندرس أمثلة حول دوال من مثل: الدوال الناطقة (حاصل قسمة كثير حدود من الدرجة 2أو3 على كثير حدود من الدرجة 1أو2). الدوال الصماء $x\mapsto\sqrt{f(x)}$ ، حيث $f$ دالة قابلة للاشتقاق. الدوال المثلثية: $x\mapsto\cos(ax+b)$ ، $x\mapsto\sin(ax+b)$ ، $x\mapsto\tan(x)$ .

ـ فيما يخص الدوال الصماء نتطرق إلى المماس الموازي لحامل محور التراتيب.

يمكن الملاحظة أن كل دالة قابلة للاشتقاق على مجال هي دالة مستمرة على هذا المجال.

تعديل2009/2008: يحذف تعيين مجموعة تعريف دالة.

**الرقم:** 08/ 25

| | |
|---|---|
| **المؤسســـــة:** | **المستـــوى:** 3 رياضي، 3ت رياضي، 3ع تج |
| **السنة الدراسية:** 2015 / 2016. | **ميدان التعلم:** تحليل |
| **التاريـــــخ:** ............................................ ......... | **الوحدة:** الاشتقاقية |
| **توقيت الحصـة:** ساعتان. | **موضوع الحصة:** دراسة الدوال |

**المكتسبات القبلية:**

**الكفاءات القاعدية:** استعمال المشتقات لدراسة خواص دالة والمنحني الممثل لها ( التغيرات، التقريب الخطي، نقطة الانعطاف،...)

**مؤشرات الكفـاءة:** دراسة دالة وتمثيلها بيانيا.

| الأنشطة المقترحة وطبيعتها | الإنجاز (سير الحصة) | توجيهات ـ تعاليق ـ أمثلة لأنشطة |
|---|---|---|

**نشاط1:** أنظر مع التطبيقات.

**نشاط2:** في الفيزياء أعطيت فاصلة (موضع) متحرك بدلالة الزمن كما يلي:

$y = 0.2\sin(50\pi t - \frac{\pi}{4})$

أوجد عبارتي دالتي السرعة والتسارع بدلالة الزمن. (التلاميذ في هذا الوقت ربما لا يعرفون معنى التسارع فيشار على أنه هو المشتق الثاني للموضع بالنسبة للزمن)

## I/ تمهيد:

## II/ العرض: دراسة الدوال

تعديل2008/2009: يحذف تعيين مجموعة تعريف دالة.

**اتجاه تغير وإشارة المشتقة:** $f'$ الدالة المشتقة للدالة $f$ على المجال $I$.

إذا كانت $f'$ موجبة على $I$ ، فإن $f$ متزايدة عليه، وإذا كانت $f'$ سالبة عليه فإن $f$ متناقصة عليه، وإذا كانت $f'$ معدومة عليه فإن $f$ ثابتة عليه.

**ملاحظة:** تبقى هذه النتيجة صحيحة إذا انعدمت $f'$ من أجل قيم معزولة في المجال المذكور.

**القيم الحدية والدالة المشتقة:**

إضافة إلى ما سبق إذا انعدمت $f'$ وغيرت إشارتها عند $x_0$ فإن الدالة $f$ تقبل قيمة حدية محلية. وتسمى النقطة من التمثيل البياني ذات الفاصلة $x_0$ ذروة لهذا التمثيل.

**التقريب التآلفي لدالة:**

**تعريف:** نسمي الدالة التآلفية $x \mapsto f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ تقريبا تآلفيا للدالة $f$ بجوار $x_0$ ، ونقبل أنه أحسن تقريب تآلفي لها.

**فائدة:** في الفيزياء إذا كانت $f$ تمثل فاصلة متحرك، فإن $f'$ تمثل سرعته، وإذا كانت $f$ تمثل سرعته، فإن $f'$ تمثل تسارعه.

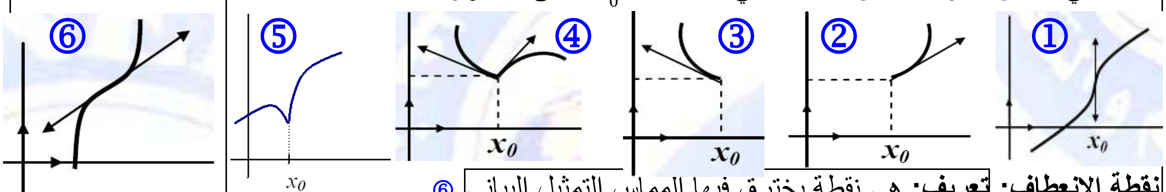
**حالات خاصة:**

أولا: إذا كان $\lim_{h\to 0}\left|\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right| = +\infty$ فإن $(C_f)$ يقبل عند النقطة التي فاصلتها $x_0$ مماسا① أو نصف مماس⑤ موازيا لحامل محور التراتيب (نقطة رجوع).

ثانيا: إذا قبلت $f$ الاشتقاق عند $x_0$ من اليمين فقط، وكان $l_1$ عددها المشتق من اليمين، فإن $(C_f)$ يقبل نصف مماس من اليمين②، معرف بما يلي: $\boxed{x \geq x_0 \text{ و } y = l_1(x-x_0)+f(x_0)}$

ثالثا: إذا قبلت $f$ الاشتقاق عند $x_0$ من اليسار فقط، وكان $l_2$ عددها المشتق من اليسار، فإن $(C_f)$ يقبل نصف مماس من اليسار③، معرف بما يلي: $\boxed{x \leq x_0 \text{ و } y = l_1(x-x_0)+f(x_0)}$.

رابعا: إذا كان $l_1$ عددها المشتق من اليمين عند $x_0$ وكان $l_2$ عددها المشتق من اليسار و $l_1 \neq l_2$ ، فإن $(C_f)$ يقبل نصفي مماسين④، و النقطة من التمثيل البياني ذات الفاصلة $x_0$ تسمى نقطة زاوية.




**نقطة الانعطاف:** **تعريف:** هي نقطة يخترق فيها المماس التمثيل البياني.⑥

**نتيجة:** إذا كانت $f''$ الدالة المشتقة للدالة $f'$ وهي الدالة المشتقة الثانية للدالة $f$ عند $x_0$ ، وانعدمت $f''$ وغيرت إشارتها عند $x_0$ ، فإن النقطة $A(x_0, f(x_0))$ هي نقطة انعطاف لـ $(C_f)$.

## III/ تطبيق:

**تطبيق1:** من رقم 25 إلى33 ص 60، 61.

**تطبيق2:** نعتبر الدالة $f$ حيث: $f(x)=\sqrt{1+x}$ .

الرجاء اقلب الصفحة

1- عين مجموعة تعريف $f$ ، وادرس قابلية اشتقاقها عند 1-.

2- أدرس اشتقاق الدالة عند0، واكتب معادلة لـ $(\Delta)$ مماس $(C_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة0.

3- عين أحسن تقريب تآلفي لـ $f$ بجوار0. واحسب قيمة مقربة لـ $\sqrt{0.9999}$ .

4- أنشئ $(C_f)$ و $(\Delta)$ .

**تطبيق3:** لتكن الدالة $f$ المعرفة بـ: $f(x)=\dfrac{(x+1)^2}{x^2-3x+2}$ .

I) 1- عين $D_f$ مجموعة تعريف $f$ . وبين أنه من أجل كل $x$ من $D_f$ : $f(x)=a+\dfrac{b}{x-1}+\dfrac{c}{x-2}$ ، حيث $a$ ، $b$ ، $c$ أعداد حقيقية يطلب تعيينها.

2- أدرس الفروع اللانهائية، والمستقيمات المقاربة لـ $(C_f)$ .

3- أدرس الوضعية النسبية للمستقيم المقارب الأفقي $(\Delta)$ مع $(C_f)$ .

4- أدرس تغيرات الدالة $f$ .

5- عين تقريبا تآلفيا لـ $f$ عند 0.

6- أنشئ $(C_f)$ ومستقيماته المقاربة.

II) نعرف الدالة $g$ كما يلي: $g(x)=\dfrac{x^2+2|x|+1}{x^2-3|x|+2}$ .

1- عين $D_f$ $D_g$ مجموعة تعريف $g$ ، ثم اكتب $g(x)$ بدون رمز القيمة المطلقة.

2- أدرس استمرارية وقابلية الاشتقاق للدالة $g$ عند0. ثم ادرس شفعيتها.

3- استنتج $(\gamma)$ التمثيل البياني لـ $g$ اعتمادا على $(C_f)$ .

4- ناقش حسب قيم الوسيط $m$ ، بيانيا وجود وعدد حلول المعادلة:

$(m-1)x^2-(3m+2)x+2m-1=0$ .

**نشاط1:** $f$ دالة تقبل الاشتقاق على $R$ ، وجدول تغيرات $f'$ فيما يلي:

| $x$ | $-\infty$ | -1 | 0 | 2 | 3 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+\infty$ | 2 | 0 | -1 | 0 | $+\infty$ |

والمطلوب: استنتج اتجاه تغير $f$ .

| | |
|---|---|
| **المؤسســـــة:** | **المستـــوى:** 3 رياضي، 3ت رياضي، 3ع تج |
| **السنة الدراسية:** 2015 / 2016. | **ميدان التعلم:** تحليل |
| **التاريــــــخ:** ........................................................... | **الوحدة:** الاشتقاقية |
| **توقيت الحصـة:** ساعة واحدة. | **موضوع الحصة:** مشتق دالة مركبة. المشتقات المتتابعة |

**المكتسبات القبلية:**

**الكفاءات القاعدية:** حساب مشتق دالة مركبة. المشتقات المتتابعة

**مؤشرات الكفـاءة:** إيجاد مشتقة دالة مركبة، إيجاد المشتقات المتتابعة لدالة تقبل الاشتقاق.

| الأنشطة المقترحة وطبيعتها | الإنجاز (سير الحصة) | توجيهات ـ تعاليق ـ أمثلة لأنشطة |
|---|---|---|
| **نشاط1:** نعتبر الدالتين $f$ و $g$ فيما يلي: $f(x)=(x+1)^4$ ، $g(x)=x^3+x^2+x+1$ .<br>ـ جد الدالتين المشتقتين $f'$ ، $g'$ .<br>ـ اشتق الدالة $g'$ ، ثم اشتق الدالة الناتجة و هكذا واصل العملية مع كل دالة من الدوال المحصل عليها.<br>**نشاط2:** نعتبر الدوال $f$ ، $h$ و $g$ المعرفة بما يلي: $f(x)=\sqrt{x^2+2}$، $h(x)=x^2+2$، $g(x)=\sqrt{x}$.<br>1/ بين أن $f(x)=(g o h)(x)$ .<br>3/ جد كلا من: $g'(x)$، $h'(x)$، $f'(x)$، $h'(x)\times g'[h(x)]$.<br>4/ أحسب المشتقات المتتابعة لـg على $]0,+\infty[$. | **I/ تمهيد:**<br>**II/ العرض:**<br>**مشتق دالة مركبة:** $g$ ، $f$ دالتان تقبلان الاشتقاق عند $x_0$ ، و $g(x_0)$ على التوالي.<br>الدالة $fo\,g$ تقبل الاشتقاق حيث:<br>$\boxed{(fog)'(x_0)=(f[g(x_0)])'=g'(x_0)\times f'[g(x_0)]}$.<br>مثال: عين مشتقة الدوال التالية: $f:x\mapsto \cos(2x+\frac{\pi}{3})$ ، $g:x\mapsto\sqrt{2x^2-3}$ ، $h:x\mapsto(x^2+2)^5$ .<br>**المشتقات المتتابعة لدالة:** $f$ دالة تقبل الاشتقاق على مجال $I$ ، و $f'$ مشتقتها.<br>إذا كانت $f'$ تقبل الاشتقاق على $I$ ، نرمز لمشتقتها بـ $f''$ ، ونسميها المشتقة الثانية لـ $f$ .<br>إذا كانت $f''$ تقبل الاشتقاق على $I$ ، نرمز لمشتقتها بـ $f'''$ ، ونسميها المشتقة الثالثة لـ $f$ .<br>إذا كانت $f'''$ تقبل الاشتقاق على $I$ ، نرمز لمشتقتها بـ $f^{(4)}$ ، ونسميها المشتقة الرابعة لـ $f$<br>.... و هكذا ....<br>**تسمية:** الدوال: $f^{(1)}$ ، $f^{(2)}$ ، ... ، $f^{(n)}$ تدعى المشتقات المتتابعة للدالة $f$ .<br>مثال: عين المشتقات المتتالية (المتعاقبة) للدالة: $f:x\mapsto x^4-\frac{1}{3}x^3+12x-6$ .<br>**III/ تطبيق:** من رقم34 إلى رقم40 ص61. | تعديل2008/2009:<br>يحذف تعيين مجموعة تعريف دالة. |

المؤسســــــة:

السنة الدراسية:2015 / 2016.

التاريـــــخ: ............................................... ..........

توقيت الحصـة:.

المستـــوى: 3 رياضي، 3ت رياضي، 3ع تج

ميدان التعلم: تحليل

الوحدة: الدالة الأسية

موضوع الحصة: الدالة الأسية(طريقة أولر) **عمل تطبيقي**.

**المكتسبات القبلية:**

**الكفاءات القاعدية:** إنشاء تقريبي للتمثيل البياني للدالة الأسية.

**مؤشرات الكفـاءة:**

| الأنشطة المقترحة وطبيعتها | الإنجاز (سير الحصة) | توجيهات ـ تعاليق ـ أمثلة لأنشطة |
|---|---|---|
| الحصة عبارة عن عمل تطبيقي | (see below) | (see below) |

**الأنشطة المقترحة وطبيعتها:** الحصة عبارة عن عمل تطبيقي

## الإنجاز (سير الحصة)

**I/ تمهيد:**

**II/ العرض:** **طريقة أولر**

**عرض الطريقة:** من أجل دالة $f$ تقبل الاشتقاق عند $x_0$ نعلم أن: $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. فمن أجل $h$ قريب من الصفر وثابت، نجد $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\approx f'(x)$، وبوضع $f(x+h)-f(x)=\Delta y$، و $h=\Delta x$ نجد $\boxed{\Delta y=\Delta x f'(x)}$.

**دراسة مثال:** لنحاول إنشاء تقريبي للتمثيل البياني لحل المعادلة التفاضلية $y'=y$ الذي يحقق $f(0)=1$ .

ليكن $f$ هو الحل المذكور، إذن: $f'(x)=f(x)$ ولكن: $\Delta y=\Delta x.f'(x)$ ومنه $f(x+h)-f(x)=h.f'(x)$ أي $f(x+h)-f(x)=h.f(x)$ ومنه: $\boxed{f(x+h)=(1+h).f(x)}$ ولدينا: $\boxed{f(0)=1}$ نجد مثلا بوضع $x=0$ أن:

$f(0.005)=1.005$ و $f(-0.005)=0.995$ وذلك من أجل القيمتين 0.005، -0.005 لـ $h$ على الترتيب.

وبذلك يكون لدينا ثلاث نقط من التمثيل البياني المطلوب. ولأجل الحصول على نقط أخرى منه نعطي قيما أخرى لـ $x$ .

**باستخدام مجدول $Excel$ :**

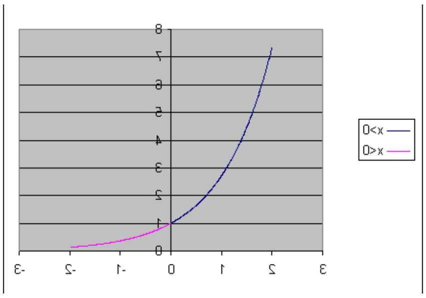
عند اتباع الخطوات أدناه نمثل بالتقريب الحل المذكور في المثال السابق على المجال $[-2,+2]$ .

( كلما كان $h$ أقرب إلى الصفر كلما كان التمثيل أقرب للصواب)

$\boxed{h=0.005 \text{ نعتبر مثلا}}$.

ـ نفتح مصنف $Excel$ وفي الورقة الأولى، وبالضبط في الخلية $A1$ نكتب العنوان المناسب للعمل. ـ وفي $B2$ مثلا نكتب $h$، وفي $C2$ نكتب 0.005 . ـ في $A3$ نكتب $x<0$ ، وفي $D3$ نكتب $x>0$ . ـ في $A4$، $B4$، $D4$، $E4$ نكتب على التوالي: x، $f(x)$، x، $f(x)$ . ـ في $A5$، $B5$، $D5$، $E5$ نكتب على التوالي: 0، 1، 0، 1. ـ في $A6$، $B6$، $D6$، $E6$ نكتب على التوالي: $\boxed{=\text{A5-0.005}}$، $\boxed{=0.995^*\text{B5}}$، $\boxed{=\text{D5+0.005}}$، $\boxed{=1.005^*\text{E5}}$ ـ ننسخ محتوى هذه الخلايا الأخيرة في الخلايا عموديا إلى غاية $A405$، $B405$، $D405$، $E405$ على الترتيب. (تحصل على القيم لـ $x$ من -2 إلى +2) تكون بذلك قد حصلت على قيم كافية لـ x، و $f(x)$ من أجل إنشاء $(C_f)$ على المجال $[-2,+2]$.

التمثيل البياني: ـ حدد الخليتين $A5$، $B5$ ثم انقر على الزر، ثم على، ثم على، ثم على التالي >، ثم على سلسلة، ثم على إزالة، ثم على إضافة، ثم في خانة "الاسم" أكتب مثلا $x<0$، وفي خانة "قيم س" ضع المؤشر ثم حدد من العمود $A5$ إلى $A405$، وفي خانة "قيم ص" ضع المؤشر ثم حدد من العمود $B5$ إلى $B405$، إذا نقرت على التالي تحصل على التمثيل البياني من أجل $x\in[-2,0]$، لكن انقر على إضافة، ثم في خانة "الاسم" أكتب $x>0$، وفي خانة "قيم س" ضع المؤشر ثم حدد من العمود $D5$ إلى $D405$، وفي خانة "قيم ص" ضع المؤشر ثم حدد من العمود $E5$ إلى $E405$، ثم على التالي >، وأخيرا على إنهاء، تحصل بذلك على التمثيل البياني على المجال $[-2,2]$.




**III/ تطبيق:** باستخدام الطريقة السابقة أنشئ تمثيلا تقريبيا لـ $f$ حل المعادلة التفاضلية $y'=\frac{1}{x}$ الذي يحقق $f(1)=0$ .

تطبيق آخر: نفس السؤال مع $y''=-4y$ . مع $f(0)=1$.

**توجيهات ـ تعاليق ـ أمثلة لأنشطة:**

- يمكن توظيف العلاقة $\Delta y\approx f'(x).\Delta x$ باستعمال مجدول لتقريب دالة تكون حلا لأحدى المعادلات التفاضلية: $y'=\frac{1}{x}$ $y'=y$ $y''=-\omega^2 y$.
- تعرف الدالة الأسية كحل خاص للمعادلة التفاضلية $Y'=Y$ التي تحقق $Y(0)=1$.
- نبدأ بإنشاء حل تقريبي لهذه المعادلة باستعمال مجدول (بتطبيق طريقة أولر) ثم بعدها نقبل بوجود هذا الحل.
- نقدم هذه الدالة في مرحلة مبكرة من السنة الدراسية قصد توظيفها في العلوم الفيزيائية.

تعديل2008/2009: يحذف تعيين مجموعة تعريف دالة.

الرقم: 11/ 25

| | |
|---|---|
| **المؤسســـــة** | **المستــــوى:** 3 رياضي، 3ت رياضي، 3ع تج |
| **السنة الدراسية:** 2016 / 2015. | **ميدان التعلم:** تحليل |
| **التاريــــــخ:** ........................................................ ........... | **الوحدة:** الدالة الأسية |
| **توقيت الحصــة:**. | **موضوع الحصة:** الدالة الأسية(تعريف، خواص الدالة($x \mapsto \exp(x)$)) |

## المكتسبات القبلية:

## الكفاءات القاعدية: توظيف خواص الدالة الأسية النيبيرية. معرفة وتفسير النهايات $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ ، $\lim_{x \to -\infty} xe^x = 0$ .

## مؤشرات الكفــاءة:

| الأنشطة المقترحة وطبيعتها | الإنجاز (سير الحصة) | توجيهات ـ تعاليق ـ أمثلة لأنشطة |
|---|---|---|
| **نشاط1:** الدالة المدروسة في الحصة السابقة تسمى الدالة الأسية. اعتمادا على ذلك، جد: مجموعة تعريفها، وإشارتها، وجدول تغيراتها. ما تخمينك حول الفروع اللانهائية؟<br>**نشاط2:**<br>**-1** $f$ دالة تحقق $f'=f$ ، جد $f'''$ ، $f^{(4)}$ .<br>**-2** نرمز لـ $f$ بـ exp، ونعتبر $f(0)=1$ ونعرف $g$ كما يلي: $g(x)=\exp(x)\times\exp(-x)$ جد $g'$ . واستنتج أن $g(x)=1$ . هل يمكن أن تنعدم exp؟<br>**-3** بين أن $\exp(x)>0$ .<br>(اعتمد على $\exp(0)$ والبرهان بالخلف وعلى م القيم المتوسطة) | **I/ تمهيد:**<br>**II/ العرض:** **الدالة الأسية**<br>**الدالة الأسية:**<br>**مبرهنة وتعريف:**<br>المعادلة التفاضلية $y'=y$ تقبل حلا وحيدا $f$ على $R$ يحقق $f(0)=1$ نرمز له بـ $\exp$ .<br>ونسمي هذا الحل الدالة الأسية، إذن هي معرفة بالشرطين:<br>- الدالة exp تقبل الاشتقاق على $R$ ودالتها المشتقة هي $\exp$ .<br>- $\exp(0)=1$ .<br>**نتيجتان:** أ- $\exp(x)>0$<br>ب - حلول المعادلة $y'=a.y$ هي $x \mapsto k.\exp(ax)$ (تبرهن فيما بعد في التطبيقات)<br>**خواص أخرى:** $a$ ، $b$ عددان حقيقيان، و $n$ عدد طبيعي.<br>**(1** $\boxed{\exp(a+b)=\exp a\times\exp b}$<br>**إثبات:** نعتبر الدالة: $f: x \mapsto \exp(x+b)$ ، هي تقبل الاشتقاق على $R$ ، حيث: $f': x \mapsto \exp(x+b)$ ، ومنه وبالاعتماد على نتيجة ب ـ وباعتبار $a=1$ نجد $f(x)=k.\exp(x)$ ، أي $\exp(x+b)=k.\exp(x)$ ، فمن أجل $x=0$ نجد $\exp b=k$ ، ومن أجل $x=a$ نجد $\exp(a+b)=\exp a\times\exp b$ و هـ م.<br>**(2** $\boxed{\exp(-a)=\frac{1}{\exp a}}$ (تستنتج من س3 في النشاط) **(3** $\boxed{\exp(a-b)=\frac{\exp a}{\exp b}}$ (سهل)<br>**(4** $\boxed{\exp(na)=(\exp a)^n}$ (بالتراجع)<br>**(5** ونقبل أنه كذلك من أجل $n \in R$ : $\boxed{\exp(na)=(\exp a)^n}$ .<br>**(6** $\boxed{\exp(x)=e^x}$ . حيث $e=\exp(1)$ . (**إثبات:** $\exp(x)=\exp(x.1)=(\exp 1)^x=e^x$ )<br>**إعادة المبرهنات والنتائج السابقة باستعمال الرمز** $e^x$ **:**<br>**-1** $\boxed{e^x>0}$ **-2** $\boxed{y'=a.y \text{ حلول المعادلة } x\mapsto k.e^{ax} \text{ هي }}$ **-3** $\boxed{e^{a+b}=e^a\times e^b}$<br>**-4** $\boxed{e^{-a}=\frac{1}{e^a}}$ **-5** $\boxed{e^{a-b}=\frac{e^a}{e^b}}$ **-6** من أجل كل $n\in R$ : $\boxed{e^{na}=(e^a)^n}$ .<br>**ملاحظة1: تعطي الحاسبة:** ... 2,718281828 .<br>**ملاحظة2:** من خلال تعريف العدد $e$ نجد: $\boxed{a=b \text{ تكافئ } e^a=e^b}$<br>$\boxed{a<b \text{ تكافئ } e^a<e^b}$ $\boxed{x>0 \text{ تكافئ } e^x>1}$ $\boxed{x<0 \text{ تكافئ } e^x<1}$.<br>**III/ تطبيق:**<br>**ت1)** لإثبات **النتيجة ب** اتبع ما يلي: - بين أن الدالة المعطاة هي فعلا حل.<br>- افرض وجود حل آخر $g$ . - بين أن الدالة المعرفة بـ $u(x)=\frac{g(x)}{\exp(ax)}$ ثابتة، واستنتج أن $g$ أيضا من الشكل المذكور.<br>اقلب الصفحة | - تعرف الدالة الأسية كحل خاص للمعادلة التفاضلية $Y'=Y$ التي تحقق $Y(0)=1$<br>- نستنتج من التعريف خواص الدالة الأسية. $\exp(x)>0$ ، $\exp(a+b)=\exp a\times\exp b$<br>الترميز $e^x$ ، النهايات والمنحنى الممثل لها.<br>تعديل2009/2008: يحذف تعيين مجموعة تعريف دالة. |

# تابع للمذكرة 11 / 25 تحليل 3 رياضي، 3ت رياضي، 3ع تج

**ت2)** نعتبر الدالة $f$ حيث: $f(x)=e^{x}-x$ ، أدرس إشارة $f'$ وأنشئ جدول تغيرات $f$ ، دون حساب نهاياتها، ثم استنتج إشارة $f$ ، ورتب العددين $e^{x}$ ، $x$ ، واستخلص $\lim_{x\to+\infty} e^{x}$ .

**ت3)** أحسب النهايات $\lim_{x\to-\infty} e^{x}$ ، $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x}}{x}$ (حل $e^{\frac{x}{2}} > \frac{x}{2}$ ومنه $\left(e^{\frac{x}{2}}\right)^{2} > \left(\frac{x}{2}\right)^{2}$ إذا $e^{x} > \frac{x^{2}}{4}$ أي $\frac{e^{x}}{x} > \frac{x}{4}$ واستنتج المطلوب)، $\lim_{x\to-\infty} xe^{x}$ ، $\lim_{x\to 0} \frac{e^{x}-1}{x}$ .

**ت4)** 1) أدرس تغيرات الدالة الأسية.

2) أدرس الفروع اللانهائية لتمثيلها البياني في المستوي المزود بمعلم.

3) أكتب معادلة لمماس تمثيلها البياني عند النقطة $A(0,1)$ .

4) أنشئ التمثيل البياني والمماس.

**ت5)** من رقم      إلى رقم      ص

الرقم:12/ 25

| | |
|---|---|
| المؤسسة: | المستـــوى: 3 رياضي، 3ت رياضي، 3ع تج |
| السنة الدراسية: 2015 / 2016. | ميدان التعلم: تحليل |
| التاريـــــخ: ............................................ | الوحدة: الدالة الأسية |
| توقيت الحصـة:. | موضوع الحصة: الدالة اللوغاريتمية |

**المكتسبات القبلية:**

**الكفاءات القاعدية:** توظيف خواص الدالة الأسية النيبيرية. معرفة وتفسير النهايات: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ ، $\lim\limits_{x\to0^+} x\ln x=0$ .

**مؤشرات الكفـاءة:**

| الأنشطة المقترحة وطبيعتها | الإنجاز (سير الحصة) | توجيهات ـ تعاليق ـ أمثلة لأنشطة |
|---|---|---|
| **نشاط:** $a$ عدد حقيقي كيفي. اعتمادا على التمثيل البياني للدالة الأسية ناقش وجود وعدد حلول كل معادلة مما يلي في $R$: <br> $e^x=1$.....(1) <br> $e^x=e$.....(2) <br> $e^x=4$.....(3) <br> $e^x=a$.....(4). | **I/ تمهيد:** <br> **II/ العرض:** الدالة اللوغاريتمية <br> **اللوغاريتم النيبري لعدد:** <br> **تعريف:** $a$ عدد حقيقي موجب تماما، العدد $b$ الحل الوحيد للمعادلة $e^x=a$ (أي $a=e^b$) يسمى اللوغاريتم النيبري لـ $a$. ونرمز له بـ $\ln a$. <br> **الدالة اللوغاريتمية النيبرية:** <br> **تعريف:** الدالة اللوغاريتمية النيبرية هي الدالة $x\mapsto\ln x$، وهي معرفة على $R_+^*$ و تأخذ قيمها في $R$ . نقول إن الدالة ln هي الدالة العكسية للدالة الأسية. <br> أمثلة: لنبحث عن $\ln 1$ وليكن $b$: أي $\ln 1=b$ معناه $1=e^b$ معناه $1=e^{\ln 1}$ ومنه $\ln 1=0$ . <br> لنبحث عن $\ln e$ وليكن $b$: أي $\ln e=b$ معناه $e=e^b$ معناه $e^1=e^{\ln e}$ ومنه $\ln e=1$ . <br> بالحاسبة العلمية نجد: $\ln 2=0.69314718\,0559945309\,4172321214\,5818$ . <br> **نتائج:** من خلال ما سبق نستنتج أنه من أجل أي عددين حقيقيين $a$، $b$ يكون: <br> $\boxed{\ln e^a=a}$ ، $\boxed{e^{\ln a}=a\ (a>0)}$ ، $\boxed{\ln 1=0\ ،\ \ln e=1}$ ، $\boxed{\ln a\times b=\ln a+\ln b}$. <br> **إثبات الأخيرة:** (يكفي أن نبين أن $e^{\ln a\times b}=e^{\ln a+\ln b}$ لأننا نعلم أن $x=y$ تكافئ $e^x=e^y$). <br> ونجد أيضا: $\boxed{\ln\frac{1}{a}=-\ln a}$ ، $\boxed{\ln\frac{a}{b}=\ln a-\ln b}$ ، $\boxed{\ln a^n=n\ln a}$ حيث $n\in R$ . <br> **دراسة الدالة اللوغاريتمية النيبرية:** <br> **مجموعة التعريف** $]0,+\infty[$ <br> **الاشتقاق:** لنعتبر الدالة $f:x\mapsto e^{\ln x}$ هي تقبل الاشتقاق على $]0,+\infty[$ (لأنها هي $x\mapsto x$) <br> ونجد من جهة $f':x\mapsto \ln' x.e^{\ln x}$ ومن جهة أخرى $f':x\mapsto 1$ ، إذا $1=\ln' x.e^{\ln x}$ ومنه <br> $1=x\ln' x$ ، أي $\boxed{\ln' x=\frac{1}{x}}$ ، إذا: <br> $\boxed{\text{الدالة } x\mapsto\frac{1}{x} \text{ هي مشتقة الدالة } \ln}$ . <br> **مشتقة الدالة** $f:x\mapsto\ln\|g(x)\|$ حيث $g$ دالة قابلة للاشتقاق على $R$ و لا تنعدم. <br> أ- إذا كانت $g(x)>0$ نجد $f':x\mapsto\frac{g'(x)}{g(x)}$ ، ب- وإلا نجد $f':x\mapsto\frac{g'(x)}{g(x)}$ ، ومنه <br> $\boxed{\text{الدالة } f':x\mapsto\frac{g'(x)}{g(x)} \text{ هي مشتقة الدالة } f:x\mapsto\ln\|g(x)\|}$ . <br> **النهايات:** إثبات أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ : (يجب أن نستخدم التعريف) ليكن $A\in R_+^*$ ولنتأكد من وجود $x\in R_+^*$ حيث $\ln x>A$ . <br> قبل ذلك لدينا $e<3$ ومنه $e^2<10$ إذا $e^{10}<10^5$ فيكون $10<\ln 10^5$ ....(1) <br> باعتبار $A<10^{n+1}$ ....(2) - وهذا ممكن - نأخذ $x\geq(10^5)^{10^n}$ نجد $\ln x\geq\ln(10^5)^{10^n}$ <br> اقلب الصفحة | - نبين من أجل كل عدد حقيقي $a$ موجب تماما، أنّ المعادلة $e^x=a$ تقبل حلا وحيدا نرمز له بالرمز $\ln a$ ، يمكن القول حينئذ أن الدالة $\ln$ هي الدالة العكسية للدالة الأسية، لكن لا تعطى أي دراسة تفصيلية حول الدالة العكسية. <br> - تستنتج الخواص الجبرية والتحليلية للدالة اللوغاريتمية من خواص $\ln$ الدالة الأسية $\exp$ . <br> تتم الإشارة إلى أن المنحنيين الممثلين للدالتين $\ln$ و $\exp$ متناظرين بالنسبة للمنصف الأول في المعلم المتعامد والمتجانس وتبرير ذلك. <br> تعديل2008/2009: يحذف تعيين مجموعة تعريف دالة. يحذف التطرق إلى التسمية "الدالة العكسية" بالنسبة إلى الدالة اللوغاريتمية النبيري. |

# تابع للمذكرة 12 / 25 تحليل 3 رياضي، 3ت رياضي، 3ع تج

أي $\ln x \geq 10^n.\ln 10^5$ وحسب (1) نجد $\ln x \geq 10^{n+1}$ وحسب (2) يكون $\ln x > A$. إذا $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty}$. و هـ م.

**III/ تطبيق:**

**ت1)** أحسب $\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \ln x$ (ضع $t = \frac{1}{x}$)، $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}$ (اعتمادا بين أنه من أجل $x > 1$ يكون $e^x \geq x$) $0 \leq \frac{\ln x}{x} \leq \frac{2\sqrt{x}}{x}$، واستنتج المطلوب)، $\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} x\ln x$ (ضع $t = \frac{1}{x}$)، $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x}$ (استعمل مشتقة $\ln$ عند1).

**ت2)** المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس، ولتكن الدالة $f : x \mapsto \ln x$.

- أدرس تغيرات $f$. - أكتب معادلة لـ $(\Delta)$ مماس $(C_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة1.
- أدرس الفروع اللانهائية لـ $(C_f)$.
- أنشئ $(\Delta)$ و $(C_f)$، وكذا التمثيل البياني للدالة الأسية.

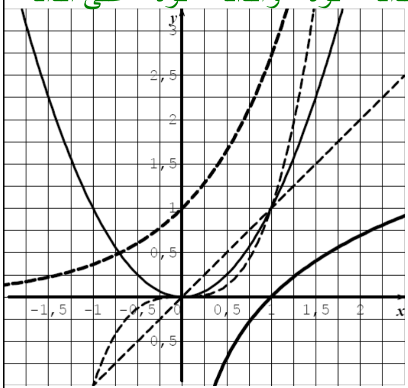
الرقم:13/ 25

| | |
|---|---|
| **المؤسسـ ـ ـ ـة:** | **المستـ ـ ـوى:** 3 رياضي، 3ت رياضي، 3ع تج |
| **السنة الدراسية:**2015 / 2016. | **ميدان التعلم:** تحليل |
| **التاريـ ـ ـ ـخ:** ........................................................ | **الوحدة:** الدالة الأسية |
| **توقيت الحصـة:**. | **موضوع الحصة:** التزايد المقارن للدوال الأسية ودوال القوى واللوغاريتمات. |

**المكتسبات القبلية:**

**الكفاءات القاعدية:** توظيف خواص الدالة الأسية النيبيرية والدالة اللوغاريتمية النيبيرية.

**مؤشرات الكفـاءة:**

<table>
<tr><th>الأنشطة المقترحة وطبيعتها</th><th>الإنجاز (سير الحصة)</th><th>توجيهات - تعاليق - أمثلة لأنشطة</th></tr>
<tr>
<td>نشاط: حل التطبيق2 السابق.</td>
<td>
I/ تمهيد:<br>
II/ العرض: المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس<br>
نتائج:<br>
1) من دراسة الدالة $\ln$ نستنتج انه من أجل كل عددين حقيقيين $a$، $b$ موجبين تماما يكون:<br>
$\boxed{\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b}$، $\boxed{\ln a > \ln b \Leftrightarrow a > b}$، $\boxed{\ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b}$،<br>
$\boxed{\ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1}$، $\boxed{\ln x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1}$. (الرمز $\Leftrightarrow$ غير معروف لدى التلاميذ)<br>
2) التمثيلان البيانيان للدالتين اللوغاريتمية والأسية متناظران بالنسبة لـ $(L): y = x$ .<br>
3) التزايد المقارن: الدوال $x \mapsto \ln x$ ، $x \mapsto e^x$، $x \mapsto x^n$ حيث $n$ عدد طبيعي غير منعدم، تؤول كلّها نحو $+\infty$ عندما $x \to +\infty$ ، لكن سلوكها مختلف ومن ثمّ نستنتج التزايد المقارن لها: في اللانهاية، تتفوق الدالة الأسية على الدالة " قوة " والدالة " قوة " على الدالة اللوغاريتم.<br>

<br>
III/ تطبيق:<br>
ت1) $n \in N^*$ أحسب:<br>
$\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n}}$ (لاحظ أن $\frac{\ln x}{x^n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{\ln x^n}{x^n}$)،<br>
$\boxed{\lim\limits_{\substack{> \\ x \to 0}} x^n . \ln x}$، $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n}}$ (لاحظ أن $\frac{e^x}{x^n} = \frac{1}{n^n}\left(\frac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}}\right)^n$)، $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} x^n . e^x}$ (لاحظ أن<br>
$x^n . e^x = n^n \left(\frac{x}{n} . e^{\frac{x}{n}}\right)^n$).<br>
ت2) من رقم إلى رقم ص
</td>
<td>
نجعل التلميذ يلاحظ، انطلاقا من التمثيلات البيانية للدوال $x \mapsto \ln x$ ؛ $x \mapsto e^x$ ؛ $x \mapsto x^n$ حيث $n$ عدد طبيعي غير منعدم، أن هذه الدوال تؤول كلّها نحو $+\infty$ عندما $x \to +\infty$ ، لكن سلوكها مختلف ومن ثم استنتاج التزايد المقارن لها: في اللانهاية، تتفوق الدالة الأسية على الدالة " قوة " والدالة " قوة " على الدالة اللوغاريتم.<br>
في هذا المجال يمكن استعمال الحاسبة البيانية أو المجدول لتجسيد هذه السلوكات.<br>
تعديل2009/2008:<br>
يحذف تعيين مجموعة تعريف دالة.
</td>
</tr>
</table>

| | |
|---|---|
| **المؤسســـــة:** | **المستـــوى:** 3 رياضي، 3ت رياضي، 3ع تج |
| **السنة الدراسية:** 2015 / 2016. | **ميدان التعلم:** تحليل |
| **التاريــــــخ:** ........................................................... | **الوحدة:** الدوال الأسية |
| **توقيت الحصـة:**. | **موضوع الحصة:** دالة الجذر النوني. |

**المكتسبات القبلية:**

**الكفاءات القاعدية:** دراسة دالة الجذر النوني.

**مؤشرات الكفـاءة:** دراسة وتمثيل دالة الجذر النوني.

| *الأنشطة المقترحة وطبيعتها* | *الإنجاز (سير الحصة)* | توجيهات ـ تعاليق ـ أمثلة لأنشطة |
|---|---|---|
| **نشاط:** إذا ك | **I/ تمهيد:** **II/ العرض:** **دالة الجذر النوني:** | تعديل2009/2008: يحذف تعيين مجموعة تعريف دالة. |
| | **تعريف:** $f$ دالة | |
| | **III/ تطبيق:** $\lambda$ عدد تطبيق آخر: من رقم إلى رقم ص. | |

الرقم:15/ 25

| | |
|---|---|
| **المؤسســـة:** | **المستـــوى:** 3 رياضي، 3ت رياضي، 3ع تج |
| **السنة الدراسية:**2015 / 2016. | **ميدان التعلم:** تحليل |
| **التاريــــخ:** ................................................ ........... | **الوحدة:** الدالة الأسية |
| **توقيت الحصـة:**. | **موضوع الحصة:** معادلات ومتراجحات |

**المكتسبات القبلية:** الدوال اللوغاريتمية والدوال الأسية.

**الكفاءات القاعدية:** حل مشكلات بتوظيف اللوغاريتم والدوال الأسية ودوال القوى.

**مؤشرات الكفـاءة:**

| الأنشطة المقترحة وطبيعتها | الإنجاز (سير الحصة) | توجيهات ـ تعاليق ـ أمثلة لأنشطة |
|---|---|---|
| **نشاط:** كل الحصة أنشطة<br>ت2) أحسب النهايات التالية: $\lim_{x\to+\infty}\ln\frac{x}{x^2+1}$، $\lim_{x\to 0^{>}}\frac{1}{\ln x}$، $\lim_{x\to 0^{>}}(x-\frac{\ln x}{x})$، $\lim_{x\to+\infty}(x^2-\ln x)$، $\lim_{x\to 0^{>}}\frac{e^x}{\ln x}$، $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{\ln x}$، $\lim_{x\to 1^{>}}\ln(\ln x)$، $\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}$، $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^4}$، $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$. | **I/ تمهيد:**<br>**II/ العرض:** حل معادلات ومتراجحات<br>**III/ تطبيق:**<br>ت1) عين مجموعة التعريف و مجموعة قابلية الاشتقاق للدالة $f$ و احسب دالتها المشتقة في كل حالة مما يلي: $f(x)=\ln(x^2-4)$، $f(x)=\frac{1}{2}x^2+x-\ln x$، $f(x)=\frac{1}{x\ln x}$، $f(x)=x\ln\|x\|$، $f(x)=\ln\frac{x-1}{x-2}$، $f(x)=x\ln(-x)$، $f(x)=\frac{1}{2}(\ln x)^2$، $f(x)=\ln(e^{2x}-5e^x+6)$.<br>ت3) حل في $R$ المعادلات والمتراجحات التالية: $\ln x^2=4$؛ $e^{2x}-1=0$؛ $\ln x-\ln(x-2)=1$؛ $2e^{2x}-3e^x+1=0$؛ $\ln(x-1)+\ln(x+2)=\ln(x^2-3x+2)$؛ $2(\ln x)^2+5\ln x-3=0$؛ $\ln(e^{2x}-e^x+1)-\ln(e^x-1)=\ln(e^x+1)$؛ $\ln\|x\|\le 2$؛ $\ln x<2$؛ $\ln x+\ln(x-1)>\ln 6$؛ $(x^2-4x)\ln x\ge 0$. | - توظف خواص الدوال اللوغاريتمية والأسية لحل معادلات ومتراجحات.<br>تعديل2008/2009:<br>يحذف تعيين مجموعة تعريف دالة. |

**الرقم:** 16/ 25

| | |
|---|---|
| **المؤسســـــة:** | **المستـــوى:** 3 رياضي، 3ت رياضي، 3ع تج |
| **السنة الدراسية:** 2015 / 2016. | **ميدان التعلم:** تحليل |
| **التاريـــــخ:** ........................................ | **الوحدة:** الدالة الأسية |
| **توقيت الحصـة:**. | **موضوع الحصة:** دوال أسية $x \mapsto e^{kx}$ دوال القوى والجذور النونية |

**المكتسبات القبلية:**

**الكفاءات القاعدية:** حل مشكلات بتوظيف اللوغاريتم والدوال الأسية ودوال القوى.

**مؤشرات الكفـاءة:**

| الأنشطة المقترحة وطبيعتها | ***الإنجاز (سير الحصة)*** | توجيهات ـ تعاليق ـ أمثلة لأنشطة |
|---|---|---|

**نشاط:**

نعتبر الدالة $f: x \mapsto \frac{\ln x}{\ln 10}$

- أحسب $f(1)$ ، $f(0)$

- $a$ ، $b$ ، $n$ أعداد حقيقية موجبة تماما، بين أن:

$f(a \times b) = f(a) + f(b)$

$f\left(\frac{1}{a}\right) = -f(a)$

$f\left(\frac{a}{b}\right) = f(a) - f(b)$

$f(a^n) = nf(a)$

- أدرس تغيرات $f$ .

- أدرس الفروع اللانهائية لـ $(C_f)$ وأنشئه.

**تكملة التطبيق:** حلا وحيدا محصورا بين 2 و $\frac{5}{2}$.

4) أنشئ المماسات السابقة $(C)$ و 5.

نعتبر الدالة $g$ حيث $g(x) = -x^2 + |x| + 2\ln(|x|+1)$

أ- أثبت أن $g$ زوجية، واكتب $g(x)$ بدون رمز القيمة المطلقة.

ب - أنشئ $(C_g)$ اعتمادا على $(C)$.

يعطى: $\boxed{\ln 49 \approx 3.9}$ $\boxed{\ln 4 \approx 1.4}$ $\boxed{\ln 3 \approx 1.1}$

**I/ تمهيد:**

**II/ العرض:** المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس في كامل الحصة

**دالة اللوغاريتم العشري:**

**تعريف:**

نسمي الدالة اللوغاريتمية العشرية الدالة التي نرمز إليها بالرمز log والمعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بـ $\log(x) = \frac{\ln x}{\ln 10}$. (يعطى $\ln 10 \approx 2.302585092994$)

**ملاحظة:** للدالة log أهمية كبرى في بعض التخصصات والمواد الدراسية كالمحاليل في الكيمياء مثلا.

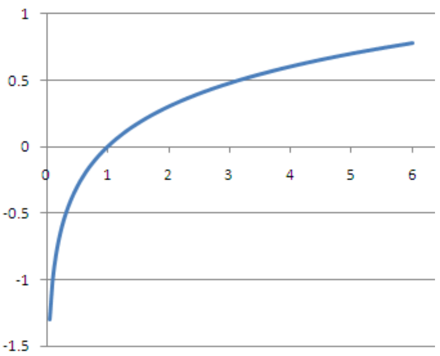
**نتائج:** من خلال تعريف الدالة log واعتمادا على خواص الدالة ln نتحصل على الخواص التالية:

أ/ $\boxed{\log(1) = 0}$ ، $\boxed{\log(10) = 1}$. ب/ الدالة log معرفة ومتزايدة تماما على $]0,+\infty[$ ، ومشتقتها هي: $\boxed{x \mapsto \frac{1}{\ln 10}.\frac{1}{x}}$. جـ/ من أجل كل أعداد حقيقية $a$ ، $b$ ، $n$ من $]0,+\infty[$ نجد:

$\boxed{\log(a \times b) = \log a + \log b}$ ، $\boxed{\log \frac{1}{a} = -\log a}$ ، $\boxed{\log \frac{a}{b} = \log a - \log b}$

$\boxed{\log a^n = n \log a}$.

د/ التمثيل البياني للدالة $x \mapsto \log x$ :




**III/ تطبيق:**

ت1) ونعتبر الدالة $f: x \mapsto \frac{1}{2^x}$ معرفة على $R$.

- أحسب وبسط $f(0)$ ، $\frac{\ln f(x)}{\ln \frac{1}{2}}$.

- بين أنه من أجل كل عددين حقيقيين $a$ ، $b$ حيث $a > 0$ يكون $a^b = e^{b \ln a}$ ، واستنتج أن $f(x) = e^{x \ln \frac{1}{2}}$ . - أدرس تغيرات $f$ .

- أدرس الفروع اللانهائية لـ $(C_f)$. - حل في $R$ المعادلة $f(x) = e$ .- أنشئ $(C_f)$.

ت2) احسب المجموع $s = \log \frac{1}{2} + \log \frac{2}{3} + ... + \log \frac{99}{100}$ .

ت3) حل في $R$ : $\log x + \log(x-1) = \log 6....(1)$ ، $\log(x-6) > 2\log x....(2)$ .

ت4) ادرس تغيرات الدالة $f$ حيث $f(x) = \frac{1}{\log x}$ ثم أنشئ تمثيلها البياني.

ت5) ادرس تغيرات الدالة $f$ حيث $f(x) = e^{-2x^2}$ ثم أنشئ تمثيلها البياني.

ت6) $f$ دالة عددية لمتغير حقيقي $x$ معرفة كما يلي: $f(x) = -x^2 + x + 2\ln(x+1)$ .

$(C)$ تمثيلها البياني. 1) أدرس تغيرات $f$ ، والفروع اللانهائية لـ $(C)$. 2) هل توجد مماسات لـ $(C)$ معامل توجيهها 3؟ في حالة نعم أكتب لها معادلات. 3) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل

- يعطي تعريف دالة اللوغاريتم العشري (التي نرمز إليها بالرمز $log$) ويشار إلى أهمية تطبيقاتها في المواد الأخرى.

- تدرج دراسة بعض الأمثلة لدوال من الشكل:

$x \mapsto e^{-\lambda x^2}$ (حيث $\lambda > 0$)

$x \mapsto a^x$ (حيث $a > 0$) أو

$x \mapsto x^a$ (حيث: $x > 0$ و $a \in \mathbb{R}$) بالنسبة لأي شعبة؟

نقبل العلاقة: $a^b = e^{b \ln a}$ من أجل كل عددين حقيقيين $a$ و $b$ حيث $a > 0$ و $b$ كيفي

تعديل 2008/2009: يحذف تعيين مجموعة تعريف دالة.

الرقم:17/ 25

| | |
|---|---|
| **المؤسســـــة:** | **المستـــوى:** 3 رياضي، 3ت رياضي، 3ع تج |
| **السنة الدراسية:** 2015 / 2016. | **ميدان التعلم:** تحليل |
| **التاريـــــخ:** ............................................................ | **الوحدة:** الدوال الأصلية |
| **توقيت الحصـة:** | **موضوع الحصة:** **الدوال الأصلية**(تعريف، خواص، أمثلة لدوال أصلية) |

**المكتسبات القبلية:**

**الكفاءات القاعدية:** تعيين دالة أصلية لدالة مستمرة على مجال.

**مؤشرات الكفـاءة:**

| الأنشطة المقترحة وطبيعتها | الإنجاز (سير الحصة) | توجيهات ـ تعاليق ـ أمثلة لأنشطة |
|---|---|---|
| **نشاط1:** إذا كانت $f$ مشتقة $g$ نسمي $g$ دالة أصلية لـ $f$. أوجد دالة أصلية لكل دالة مما يلي: $f: x \mapsto 2$، $g: x \mapsto 0$، $h: x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$. **نشاط2:** $f$ دالة قابلة للاشتقاق ولا تنعدم على $R$. و $n$ عدد طبيعي أكبر من 1. اشتق الدالة: $x \mapsto \frac{1}{[f(x)]^4}$ واستنتج دالة أصلية للدالة: $x \mapsto \frac{f'(x)}{[f(x)]^5}$. | **I/ تمهيد:** **الدوال الأصلية** **II/ العرض:** **الدالة الأصلية لدالة على مجال:** **تعريف:** $f$ دالة معرفة على مجال $I$. إذا كانت $f$ هي مشتقة الدالة $g$ على $I$، نسمي $g$ دالة أصلية لـ $f$. **مثال1:** بين أن كلا من $f$ ، $g$ هي دالة أصلية لـ $h$، حيث: $f(x)=\frac{1}{2}x^2$ ، $g(x)=\frac{1}{2}x^2-2$ ، $h(x)=x$. **مثال2:** أوجد ثلاث دوال أصلية للدالة: $x \mapsto 1$، وثلاث لـ: $x \mapsto 0$. **وجود الدوال الأصلية:** **مبرهنة:** نقبل أن كل دالة مستمرة على مجال تقبل عليه دالة أصلية على الأقل. **مجموعة الدوال الأصلية لدالة:** إذا كانت $f$ ، $g$ دالتين أصليتين لـ $h$، فإن $f(x)=g(x)+k$ حيث $k$ مستقل عن $x$. **نتيجة:** إذا كانت $g$ دالة أصلية لـ $h$، فإن دوالها الأصلية هي $f$ حيث $\boxed{f(x)=g(x)+k}$ و $k$ مستقل عن $x$. **خواص:** $g_1$ ، $g_2$ دالتان أصليتان للدالتين $f_1$ ، $f_2$ على مجال $I$، على التوالي، $\lambda$ عدد حقيقي ثابت، و $n$ عدد طبيعي أكبر من 1. و $f$ دالة قابلة للاشتقاق. **1-** $g_1+g_2$ دالة أصلية للدالة $f_1+f_2$. **2-** $\lambda.g_1$ دالة أصلية للدالة $\lambda.f_1$. **3-** $\frac{1}{n+1}f^{n+1}$ دالة أصلية للدالة $f'.f^n$. **4-** $\frac{-1}{(n-1)f^{n-1}}$ دالة أصلية للدالة $\frac{f'}{f^n}$. **5-** $\sqrt{f}$ دالة أصلية للدالة $\frac{f'}{2\sqrt{f}}$. **6-** $x \mapsto f[f_1(x)]$ دالة أصلية للدالة $x \mapsto f_1'(x)f'[f_1(x)]$. **7-** $x \mapsto \frac{1}{a}\sin(ax+b)+\lambda$ دالة أصلية للدالة $x \mapsto \cos s(ax+b)$. **III/ تطبيق:** $\lambda$ عدد حقيقي ثابت، ابحث في كل مرة مما يأتي عن دالة أصلية $g$ للدالة $f$، وحدد مجالا مناسبا لذلك: **(1** $f(x)=0$ **(2** $f(x)=x^n$ مع $n\in N$ **(3** $f(x)=\frac{1}{x^n}$ مع $n\in N$ و $n\geq 2$. **(4** $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ **(5** $f(x)=\sin x$ **(6** $f(x)=\cos x$ **(7** $f(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$. **(8** $f(x)=1+\tan^2 x$. **تطبيق آخر:** من رقم إلى رقم ص. | - ندرج الخواص المعروفة للدوال الأصلية وحسابها المستخلصة انطلاقا من خواص المشتقات. تعديل2008/2009: يحذف تعيين مجموعة تعريف دالة. |

| | |
|---|---|
| **المؤسســـــة:** | **المستـــوى:** 3 رياضي، 3ت رياضي، 3ع تج |
| **السنة الدراسية:** 2015 / 2016. | **ميدان التعلم:** تحليل |
| **التاريـــــــخ:** ........................................... ........... | **الوحدة:** الدوال الأصلية |
| **توقيت الحصـة:.** | **موضوع الحصة:** الدوال الأصلية لدوال مألوفة |

**المكتسبات القبلية:**

**الكفاءات القاعدية:** تعيين الدوال الأصلية لدوال مألوفة.

**مؤشرات الكفـاءة:**

| الأنشطة المقترحة وطبيعتها | الإنجاز (سير الحصة) | توجيهات ـ تعاليق ـ أمثلة لأنشطة |
|---|---|---|
| **نشاط:**<br>حل تطبيق المذكرة السابقة. | **I/ تمهيد:**<br>**II/ العرض:**<br>**الدوال الأصلية للدوال المألوفة:**<br>$g$ دالة أصلية للدالة $f$ على المجال $I$، و $\lambda$ عدد حقيقي ثابت.<br>الجدول التالي يلخص لنا الدوال الأصلية للدوال المألوفة: | نثبت وحدانية الدالة الأصلية لدالة معرفة على مجال تأخذ قيمة معينة من أجل قيمة معلومة من هذا المجال عندما<br>نتعرف على إحدى دوالها الأصلية.<br>تعديل2008/2009:<br>يحذف تعيين مجموعة تعريف دالة. |

| عبارة الدالة $f$ | عبارة الدالة $g$ | المجال $I$ |
|---|---|---|
| $f(x)=0$ | $g(x)=\lambda$ | $R$ |
| $f(x)=x^n$ ، $n\in N$ | $g(x)=\frac{x^{n+1}}{n+1}+\lambda$ | $R$ |
| $f(x)=\frac{1}{x^n}$ ، $n\in N$ و $n\geq 2$. | $g(x)=\frac{-1}{(n-1)x^{n-1}}+\lambda$ | $R_+^*$ أو $R_-^*$ |
| $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ | $g(x)=2\sqrt{x}+\lambda$ | $R_+^*$ |
| $f(x)=\sin x$ | $g(x)=-\cos x+\lambda$ | $R$ |
| $f(x)=\cos x$ | $g(x)=\sin x+\lambda$ | $R$ |
| $f(x)=1+\tan^2 x$ ، (أي $f(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$) | $g(x)=\tan x+\lambda$ | $I$ لا يشمل $\frac{\pi}{2}+k\pi$ ، حيث $k\in Z$ |

**III/ تطبيق:** من رقم     إلى رقم     ص.

**الرقم:** 19/ 25

<table>
<tr><td>

**المؤسســـــة:**

**السنة الدراسية:** 2015 / 2016.

**التاريـــــخ:** ............................................... ...........

**توقيت الحصـة:**.

</td><td>

**المستـــوى:** 3 رياضي، 3ت رياضي، 3ع تج

**ميدان التعلم:** تحليل

**الوحدة:** الدوال الأصلية

**موضوع الحصة:** الدالة الأصلية

</td></tr>
</table>

**المكتسبات القبلية:**

**الكفاءات القاعدية:** تعيين الدالة الأصلية التي تأخذ قيمة $y_0$ من أجل القيمة $x_0$ للمتغير.

**مؤشرات الكفـاءة:**

<table>
<tr><th>الأنشطة المقترحة وطبيعتها</th><th>الإنجاز (سير الحصة)</th><th>توجيهات ـ تعاليق ـ أمثلة لأنشطة</th></tr>
<tr><td>

**نشاط:**

$f$ دالة مستمرة على مجال $I$ يشمل $x_0$ ، و $g$ دالة أصلية لها على هذا المجال حيث $g(x_0)=y_0$ .
نفرض أن $h$ أيضا دالة أصلية لها تحقق $h(x_0)=y_0$ .

- ما العلاقة بين $g$ و $h$ ؟
- قدر الفرق $h(x)-g(x)$ من أجل $x$ كيفي من $I$ .

</td><td>

## I/ تمهيد:

## II/ العرض:

**الدالة الأصلية التي تأخذ القيمة $y_0$ من أجل القيمة $x_0$ للمتغير:**

**مبرهنة:** من أجل أي دالة مستمرة على مجال، توجد دالة أصلية وحيدة لها عليه تأخذ قيمة معينة $y_0$ من أجل قيمة معلومة $x_0$ للمتغير.

**البرهان:** (أنظر النشاط)

## III/ تطبيق:

**ت1:** أ/ جد الدوال الأصلية للدالة $f: x\mapsto 3x^2-2x$ ، على $R$ .

ب/ نفرض أن $g$ إحدى هذه الدوال، وأن تمثيلها البياني يشمل النقطة $A(0,1)$ . فسر ذلك حسابيا.

جـ/ استنتج عبارة $g$ .

**ت2:** 1) أحسب مشتقات الدوال $g: x\mapsto e^{x^2+1}$ ، $h: x\mapsto e^{-x+2}$ ، $t: x\mapsto e^{s(x)}$ ( $s$ تقبل الاشتقاق).

2) استنتج دوالا أصلية للدوال $w: x\mapsto q'(x)e^{q(x)}$ ( $q'$ مشتقة $q$)، $m: x\mapsto xe^{x^2+1}$ ، $n: x\mapsto \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ .

من رقم    إلى رقم    ص.

</td><td>

نثبت وحدانية الدالة الأصلية لدالة معرفة على مجال تأخذ قيمة معينة من أجل قيمة معلومة من هذا المجال عندما نتعرف على إحدى دوالها الأصلية.

تعديل 2008/2009: يحذف تعيين مجموعة تعريف دالة.

</td></tr>
</table>

**الرقم:** 20/ 25

| | |
|---|---|
| **المؤسســـة:** | **المستـــوى:** 3 رياضي، 3ت رياضي، 3ع تج |
| **السنة الدراسية:** 2015 / 2016. | **ميدان التعلم:** تحليل |
| **التاريـــــخ:** ...................................... | **الوحدة:** الحساب التكاملي |
| **توقيت الحصـة:**. | **موضوع الحصة:** الحساب التكاملي(تعريف، خواص) |

**المكتسبات القبلية:**

**الكفاءات القاعدية:** توظيف الحساب التكاملي لحساب دوال أصلية.

**مؤشرات الكفـاءة:**

| الأنشطة المقترحة وطبيعتها | *الإنجاز (سير الحصة)* | توجيهات و تعاليق و أنشطة |
|---|---|---|

## الأنشطة المقترحة وطبيعتها

**نشاط:**
$f$ الدالة المعرفة على $R$ بـ $f(x)=x+1$، و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم م م. و $g$ إحدى دوالها الأصلية على $R$.
- أنشئ (C)، والمستقيمين $(\Delta): x=1$، $(L): x=\frac{7}{2}$.
أحسب هندسيا مساحة شبه المنحرف الناتج(متوسط القاعدتين في الارتفاع).
قارن النتيجة السابقة بالعدد $g(\frac{7}{2})-g(1)$؟

**تابع للتطبيق:**
$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{(1+\sin x)^2}dx$، $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}3\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}dx$

## الإنجاز (سير الحصة)

**I/ تمهيد:**

**II/ العرض:** التكامل

**تكامل دالة من $a$ إلى $b$:**

**تعريف:** $f$ دالة مستمرة على مجال $I$ يشمل $a$، $b$. و $g$ دالة أصلية لها عليه.

العدد $g(b)-g(a)$ يسمى "التكامل من $a$ إلى $b$ لـ $f(x)$ تفاضل $x$" ونرمز له بـ $\int_a^b f(x)dx$.

**ملاحظتان: 1-** في الكتابة $\int_a^b f(x)dx$ يمكن استبدال $x$ بأي حرف آخر.

**2-** يمكن أن نكتب $\int_a^b f(x)dx=g(b)-g(a)=\left[g(x)\right]_a^b$.

أمثلة: أحسب: $\int_0^1(x+1)dx$، $\int_0^{\ln 2}e^x dx$، $\int_1^{e^3}\frac{1}{x}dx$، $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx$، $\int_a^b m dx$ ($m$، $a$، $b$ ثوابت).

**مبرهنة:** $f$ دالة مستمرة على مجال $I$ يشمل $a$. الدالة $g$ المعرفة كما يلي $g(x)=\int_a^x f(t)dt$، هي دالتها الأصلية التي تنعدم عند $a$.

**برهان:** لتكن $h$ دالة أصلية لـ $f$ على $I$.
أولا: نجد حسب ما سبق $g(x)=h(x)-h(a)$ و $h$ تقبل الاشتقاق على $I$ لأنها دالة أصلية، فيكون $g'(x)=h'(x)$ أي $g'(x)=f(x)$. ثانيا: $g(a)=h(a)-h(a)=0$. انتهى.

**خواص:** $f$ دالة مستمرة على مجال $I$ يشمل $a$، $b$، $c$. و $g$ دالة أصلية لها عليه.

**1-** $\boxed{\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx}$ (تسمى علاقة شال، للإثبات استخدم التعريف أعلاه)

**2-** $\boxed{\int_a^a f(x)dx=0}$، $\boxed{\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx}$، $\boxed{\int_a^b c.f(x)dx=c.\int_a^b f(x)dx}$.

**3-** $\boxed{\int_a^b\left[f_1(x)+f_2(x)\right]dx=\int_a^b f_1(x)dx+\int_a^b f_2(x)dx}$.

**III/ تطبيق:** أحسب: $\int_{-1}^{1}x^2dx$، $\int_1^9\frac{1}{\sqrt{s}}ds$، $\int_1^2\frac{1}{t^2}dt$، $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx$، $\int_{-2}^{2}2dx$، $\int_0^{\frac{\pi}{2}}tnx dx$،
$\int_{-4}^{3}\frac{|x+2|}{x^2+4x+10}dx$، $\int_{-4}^{-2}\frac{|x+2|}{x^2+4x+10}dx$، $\int_{-4}^{-2}\frac{x+2}{(x^2+4x+10)^2}dx$، (البقية أنظر جزء الأنشطة)

## توجيهات و تعاليق و أنشطة

- يتم مقاربة مفهوم التكامل بحساب مساحات لأشكال هندسية معروفة (مستطيل، مثلث في وضعيات مختلفة، شبه منحرف)
مثلا: حساب مساحة الحيز المستوي تحت المنحني الممثل لدالة $f$ مستمرة وموجبة على مجال $[a;b]$ أي مجموعة النقط $M(x;y)$ حيث $a\le x\le b$ و $0\le y\le f(x)$. ثم نقارن النتيجة بالعدد $G(b)-G(a)$ حيث $G$ هي دالة أصلية للدالة $f$
نأخذ $f$ دالة مستمرة وموجبة في وضعيات أولية:
ثابتة (مساحة مستطيل)
تآلفية (مثلث أو شبه منحرف)
نعرف العدد $\int_a^b f(x)\,dx$ بالفرق $G(b)-G(a)$ ونقرأ **"التكامل من $a$ إلى $b$ لـ $f(x)$ تفاضل** $x$" وهو يمثل مساحة الحيز المستوي المحدد بمنحني الدالة $f$ والمستقيمات التي معادلاتها $x=a$، $x=b$، $y=0$ في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد.
- تعريف الدالة الأصلة للدالة $f$ على $[a;b]$ والتي تنعدم من أجل $a$ على أنها الدالة التي ترفق كل $x$ من $[a;b]$ بالعدد $\int_a^x f(t)\,dt$
ندرج خواص التكامل في حالة $f$ موجبة والمتعلقة :
- بعلاقة شال
$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$
ونتائجها.
- بالخطية:
تعديل2009/2008: يحذف تعيين مجموعة تعريف دالة.

الرقم:21/ 25

| | |
|---|---|
| **المؤسســـــة:** | **المستـــوى:** 3 رياضي، 3ت رياضي، 3ع تج |
| **السنة الدراسية:** 2015 / 2016. | **ميدان التعلم:** تحليل |
| **التاريـــــخ:** .......................................... .......... | **الوحدة:** الحساب التكاملي |
| **توقيت الحصـة:**. | **موضوع الحصة:** خواص التكامل، وحساب المساحات. |

**المكتسبات القبلية:**

**الكفاءات القاعدية:** توظيف خواص التكامل لحساب مساحة سطح معطى. توظيف القيمة المتوسطة لدالة في الاحتمالات والإحصاء.

**مؤشرات الكفـاءة:**

| الأنشطة المقترحة | الإنجاز (سير الحصة) | توجيهات و تعاليق وأنشطة |
|---|---|---|

## الإنجاز (سير الحصة)

**I/ تمهيد:**

**II/ العرض:** المستوي في كامل الحصة منسوب إلى المعلم متعامد $(O,\vec{i},\vec{j})$.

**تابع للخواص:**

**4-** إذا كان $a \le b$ ، و $f$ موجبة على $[a,b]$ يكون $\boxed{\int_a^b f(x)dx \ge 0}$. (تبرهن في التطبيقات)

**5-** إذا كان $a \le b$ ، و $f$ سالبة على $[a,b]$ يكون $\boxed{\int_a^b f(x)dx \le 0}$.

**6-** إذا كان $a \le b$ ، و $f_1 \le f_2$ على $[a,b]$ يكون $\boxed{\int_a^b f_1(x)dx \le \int_a^b f_2(x)dx}$.

**7-** إذا كان $a \le b$ ، و $m \le f(x) \le M$ على $[a,b]$ فإن $\boxed{m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)}$.

**8-** إذا كان $a \le b$ ، و $0 \le |f(x)| \le M$ على $[a,b]$ فإن $\boxed{0 \le \left|\int_a^b f(x)dx\right| \le M(b-a)}$.

**ملاحظة:** يمكن صياغة نتيجة الخاصية 7- كما يلي: $\boxed{m \le \frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)dx \le M}$ **$(a \ne b)$**. هذا العدد المحصور يسمى القيمة المتوسطة للدالة $f$ بين $a$ و $b$ أو على المجال $[a;b]$.

**نتيجة:** وفق شروط الخاصية 4- فإن العدد $\int_a^b f(x)dx$ يمثل مساحة الحيز المستوي المحدد بمنحنى الدالة $f$ والمستقيمات التي معادلاتها $x=a$ ، $x=b$ ، $y=0$ في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد[أي مجموعة النقط $M(x,y)$ حيث $a \le x \le b$ و $0 \le y \le f(x)$].

**حساب مساحات أسطح:**

**نتيجة1:** إذا كان $a \le b$ ، و $f$ سالبة على $[a,b]$ فإن مساحة الحيز المذكور سابقا هي
$-\int_a^b f(x)dx$. (أي $\int_b^a f(x)dx$ ، وهي $\int_a^b [-f(x)]dx$ ، وهي أيضا $\int_a^b |f(x)|dx$)

**نتيجة2:** إذا كان $a \le b$ ، و $f$ تغير إشارتها على $[a,b]$ فإن مساحة الحيز المذكور سابقا هي
$\int_a^c f(x)dx - \int_c^b f(x)dx$. (أنظر الأشكال المرفقة)

**III/ تطبيق: ت1)** نعتبر $\|\vec{i}\| = 2cm$ ، $\|\vec{j}\| = 3cm$ . وليكن $(C)$ التمثيل البياني للدالة sin . أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بـ $(C)$ ، والمستقيمات التي معادلاتها $x = -\frac{\pi}{2}$ ، $x = \frac{\pi}{2}$ ، $y = 0$ . **ت2)** في المستوي السابق أنشئ التمثيلين البيانيين للدالتين $f : x \mapsto x^2$ ، $g : x \mapsto x-1$ . بين أن مساحة الحيز المستوي المحدد بمنحنيي ...

(البقية أنظر جزء الأنشطة)

## الأنشطة المقترحة

**نشاط:** $f$ دالة مستمرة على مجال $I$ يشمل $a$، $b$. و $g$ دالة أصلية لها عليه. و $a \le b$.
علما أن $f$ موجبة على $[a,b]$ بين أن $g$ متزايدة على $[a,b]$ واستنتج أن $\int_a^b f(x)dx \ge 0$

تابع للتطبيق2: الدالتين $f$ ، $g$ والمستقيمين $(\Delta): x=1$ ، $(L): x=2$ هي $\int_1^2 |f(x)-g(x)|dx$ ثم أحسبها.

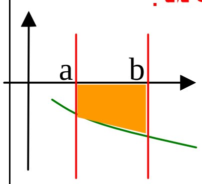
**ت3)** أحسب القيمة المتوسطة للدالة $f$ بين $a$، $b$ فيما يلي:
1) $f(x) = x^2$ ، $a=0$ ، $b=2$
2) $f(x) = \frac{1}{x}$ ، $a=1$ ، $b=3$ واستنتج حصرا لـ $\ln 3$.

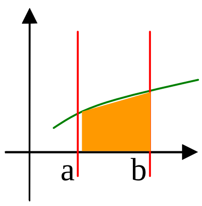
## توجيهات و تعاليق وأنشطة

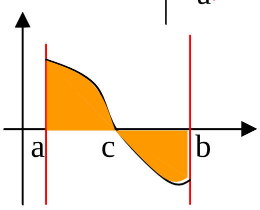
ندرج خواص التكامل في حالة $f$ موجبة والمتعلقة :

- بالمقارنة: إذا كانت $f \le g$ فإن $\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$
- بالقيمة المتوسطة لدالة: $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$
- حصر القيمة المتوسطة: إذا كانت $m \le f(x) \le M$ على مجال $[a;b]$ فإن $m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \le M$
- بعد التعرف على الخواص السابقة يتم التعميم شيئا فشيئا من أجل:
- $f$ سالبة حيث: $\int_a^b f(x)dx = -\int_a^b |f(x)|\,dx$
- $f$ تغير إشارتها.
- إشارة العدد $\int_a^b f(x)\,dx$ بدلالة إشارة $f$ على المجال $[a;b]$

تعديل 2009/2008: يحذف تعيين مجموعة تعريف دالة.



الرقم:22/ 25

| | |
|---|---|
| **المؤسســـــة:** | **المستـــوى:** 3 رياضي، 3ت رياضي، 3ع تج |
| **السنة الدراسية:** 2015 / 2016. | **ميدان التعلم:** تحليل |
| **التاريـــــخ:** .............................................. ........... | **الوحدة:** الحساب التكاملي |
| **توقيت الحصـة:**. | **موضوع الحصة:** حل مشكلات بسيطة باستخدام التكامل |

**المكتسبات القبلية:**

**الكفاءات القاعدية:** توظيف الحساب التكاملي لحل مشكلات بسيطة.

**مؤشرات الكفـاءة:**

| الأنشطة المقترحة وطبيعتها | الإنجاز (سير الحصة) | توجيهات و تعاليق و أنشطة |
|---|---|---|
| **نشاط:** كل الحصة عبارة عن أنشطة | **I/ تمهيد:**<br>**II/ العرض:**<br>**III/ تطبيق:**<br>ت1) متحرك على مسار مستقيم، تعطى سرعته $v$ بدلالة الزمن $t$ بالعبارة $v(t)=2t-1\ m/s$، علما أنه مرّ بالمبدأ في اللحظة $2s$ ، جد عبارة الفاصلة بدلالة الزمن.<br>(جواب أحسب $\int_2^t (2n-1)dn$).<br>ت2)<br>ت3) من رقم إلى رقم ص | يتعلق الأمر بمعالجة مشكلات من الواقع أو مرتبطة به مثل العبارة التكاملية للمسافة المقطوعة على مستقيم بمعرفة السرعة اللحظية، أو حساب احتمال حادثة معبر عنها بمتغير عشوائي مستمر.<br>تعديل2009/2008:<br>يحذف تعيين مجموعة تعريف دالة. |

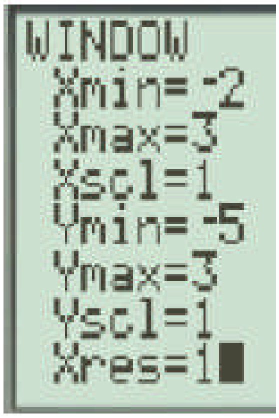
الرقم:23/ 25

| | |
|---|---|
| **المؤسســــة:** | **المستـــوى:** 3 رياضي، 3ت رياضي، 3ع تج |
| **السنة الدراسية:** 2015 / 2016. | **ميدان التعلم:** تحليل |
| **التاريــــــخ:** ............................................... ........... | **الوحدة:** الحساب التكاملي |
| **توقيت الحصـة:.** | **موضوع الحصة:** التكامل بالتجزئة |

**المكتسبات القبلية:**

**الكفاءات القاعدية:** استعمال التكامل بالتجزئة.

**مؤشرات الكفـاءة:**

| الأنشطة المقترحة وطبيعتها | الإنجاز (سير الحصة) | توجيهات و تعاليق و أنشطة |
|---|---|---|
| **نشاط:**<br>$f$ ، $g$ دالتان تقبلان الاشتقاق على $R$.<br>ـ أكتب عبارة مشتقة الدالة $f.g$ ، واستنتج أن:<br>$\int_a^x f'(t)g(t)dt=[f(t)g(t)]_a^x - \int_a^x f(t)g(t)dt$.<br><br> | **I/ تمهيد:**<br>**II/ العرض:** التكامل بالتجزئة<br>**قاعدة التكامل بالتجزئة:** من أجل الدالتين $f$ ، $g$ القابلتين للاشتقاق على مجال $I$، نجد $f(x)g'(x)=[f(x)g(x)]'-f'(x)g(x)$ ومنه:<br>$\boxed{\int_a^x f(t)g'(t)dt=\left[f(t)g(t)\right]_a^x-\int_a^x f'(t)g(t)dt}$<br>**ملاحظة:** تستعمل هذه القاعدة عندما يكون حساب التكامل الأيمن أسهل من الأيسر.<br>مثال1: عين الدالة الأصلية التي تنعدم عند $\frac{\pi}{2}$ للدالة $x \mapsto x\sin x$.<br>مثال2: جد دالة أصلية للدالة $\ln$.<br>**ملاحظة حول الرمز $dx$ :** نعتبر: $\frac{df(x)}{dx}=f'(x)$ أي $\frac{df(x)}{f'(x)}=dx$ أو $\frac{dy}{y'}=dx$ ،<br>ونكتب أيضا: $\frac{d^2f}{dx^2}=f''$ ، أي $\frac{d^2f(x)}{dx^2}=f''(x)$ أي $\frac{d^2y}{dx^2}=y''$.<br>مثال: لحساب $\int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{x}+x}dx$ ضع $\sqrt{x}=y$ ولاحظ خلال العمل أن $\frac{1}{y(y+1)}=\frac{1}{y}-\frac{1}{y+1}$.<br>**III/ تطبيق:** ت1) باستخدام حاسبة بيانية أحسب $\int_1^2 \frac{e^x-1}{e^x+1}dx$. (حل مختصر: Y= واكتب عبارة الدالة، WINDOW وأدخل الأرقام كما في الشكل عمود الأنشطة، GRAPH ، 2nd ، TRACE واختر سطر7، ENTER نضغط1، ENTER نضغط2، ENTER)<br>ت2) 1/ جد دالة أصلية للدالة $x \mapsto \sqrt{x+1}$. (حل: ضع $x+1=y$)<br>2/ باستخدام التكامل بالتجزئة أحسب التكاملات التالية: $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$ ، $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(2x-3)\cos x dx$ ، $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos x dx$.<br>ت3) من رقم إلى رقم ص | نشرح الكتابات $\frac{df}{dx}$ ، $\frac{d^2f}{dx^2}$ (المستعملة في الفيزياء) والكتابة $dy=f'(x).dx$<br>تعديل2009/2008: يحذف تعيين مجموعة تعريف دالة. |

الرقم:24/ 25

| | |
|---|---|
| **المؤسســـــة:** | **المستـــوى:** 3 رياضي، 3ت رياضي، 3ع تج |
| **السنة الدراسية:**2015 / 2016. | **ميدان التعلم:** تحليل |
| **التاريـــــخ:** ........................................................ | **الوحدة:** الحساب التكاملي |
| **توقيت الحصـة:**. | **موضوع الحصة:** حساب حجوم مجسمات |

**المكتسبات القبلية:**

**الكفاءات القاعدية:** حساب حجوم لمجسمات بسيطة

**مؤشرات الكفـاءة:**

| الأنشطة المقترحة وطبيعتها | الإنجاز (سير الحصة) | توجيهات و تعاليق و أنشطة |
|---|---|---|
| **نشاط:** | **I/ تمهيد:**<br>**II/ العرض:**<br>**مبرهنة:** (نقبلها)<br>$f$ دالة مستمرة على مجال $I$ يشمل $a$، $b$ حيث $a<b$. و $(C)$ تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس. و $(D)$ الحيز المستوي المحدد بـ$(C)$ والمستقيمات المعرفة بالمعادلات $x=a$، $x=b$، $y=0$.<br>عند دوران $(D)$ حول محور الفواصل يتولد مجسم حجمه يعطى بالعبارة<br>$v=\int_a^b \pi\left[f(x)\right]^2 dx$ نكتب أيضا: $v=\pi\int_a^b f^2(x)dx$<br>مثال1: من أجل $f(x)=1$ على المجال $[1,3]$. ما هو المجسم الناتج وفق مقدمة المبرهنة السابقة؟ وما حجمه؟ (في هذا المثال الأمر سهل بحيث يمكن حساب الحجم بغير التكامل! تأكد!!)<br>مثال2: نفس المطلوب السابق من أجل $f(x)=x-1$ ونفس المجال. (كذلك الأمر هنا)<br>مثال3: نفس المطلوب السابق من أجل $f(x)=x^2$ والمجال $[0,1]$.<br>**III/ تطبيق: ت3** من رقم إلى رقم ص | حساب الحجوم :<br>$\int_a^b \pi f(x)^2 dx$<br>نقتصر على بعض الأمثلة البسيطة سهلة الحساب.<br>تعديل2009/2008:<br>يحذف تعيين مجموعة تعريف دالة. |

**الرقم:** 25 والأخيرة

| | |
|---|---|
| **المؤسســــة:** | **المستـــوى:** 3 رياضي، 3ت رياضي، 3ع تج |
| **السنة الدراسية:** 2015 / 2016. | **ميدان التعلم:** تحليل |
| **التاريـــــخ:** ........................................... .......... | **الوحدة:** الاشتقاقية |
| **توقيت الحصـة:**. | **موضوع الحصة:** المعادلات التفاضلية |

**المكتسبات القبلية:**

**الكفاءات القاعدية:** حل معادلة تفاضلية من الشكل $y' = f(x)$ ، $y'' = f(x)$ حيث $f$ دالة مألوفة.

**مؤشرات الكفـاءة:**

| الأنشطة المقترحة وطبيعتها | الإنجاز (سير الحصة) | توجيهات ـ تعاليق ـ أمثلة لأنشطة |
|---|---|---|

### الأنشطة المقترحة وطبيعتها

**نشاط:**

نضع $y = f(x)$ ، حيث $f$ دالة تقبل الاشتقاق على $R$ على الأقل مرتين.

- جد عبارة $f$ حتى يتحقق $y' = 2x$ . هل توجد عبارة أخرى؟
- نفس السؤال مع $y'' = 6x$ .
- نفرض الآن أن:

$$f(x) = a\cos(wx + \theta) + b\sin(wx + \alpha)$$

عبر عن $y''$ بدلالة $y$ .

### الإنجاز (سير الحصة)

## I/ تمهيد:

## II/ العرض: المعادلات التفاضلية

**المعادلة التفاضلية من الشكل $y' = f(x)$ :**

**تسمية:** $f$ دالة معلومة على مجال $I$ ، نسمي المعادلة $Y' = f(x)$ معادلة تفاضلية، حيث $Y$ هو المجهول.

* حل هذه المعادلة على $I$ ، هو إيجاد الدوال $g$ التي تقبل الاشتقاق على $I$ ، وتحقق $g'(x) = f(x)$ من أجل كل $x$ من $I$ ، (أي $g(x) = \int_a^x f(t)dt$).

**مثال:** حل المعادلة التفاضلية: $Y' = x - 2$ .

**ملاحظة:** توجد معادلات تفاضلية بأشكال أخرى كثيرة.

**المعادلة التفاضلية من الشكل $Y'' = f(x)$ :**

* حل هذه المعادلة على $I$ ، هو إيجاد الدوال $g$ التي تقبل الاشتقاق مرتين على $I$ ، وتحقق $g''(x) = f(x)$ من أجل كل $x$ من $I$ ، (أي $g(x) = \int_b^x \left( \int_a^t f(s)ds \right) dt$).

**مثال:** حل المعادلة التفاضلية: $Y'' = x$ .

**المعادلة التفاضلية من الشكل $Y'' = -\omega^2 Y$ :**

* حل هذه المعادلة يعطى بالشكل $y = a\cos(\omega x + \theta) + b\sin(\omega x + \alpha)$. حيث a ، b ، $\theta$ ، $\alpha$ أعداد حقيقية ثابتة.

**مثال:** حل المعادلة التفاضلية: $Y'' + 3Y = 0$ .

## III/ تطبيق:

**ت1:** (المعادلة التفاضلية من الشكل $Y' = Y$)

حل هذه المعادلة على $I$ ، هو إيجاد الدوال $f$ التي تقبل الاشتقاق على $I$ ، وتحقق $f'(x) = f(x)$ من أجل كل $x$ من $I$ .

**(حل: أولا: إذا كانت $f$ معدومة فالأمر واضح. ثانيا: وإلا فنجد $\frac{f'(x)}{f(x)} = 1$ ... أكمل)**

**ت2:** حل المعادلة التفاضلية من الشكل $y' = ay + b$ حيث $a \neq 0$، يعطى بالشكل: $x \mapsto \alpha e^{ax} - \frac{b}{a}$، **أمثلة:** 1/ 2/ ....

**ت3:** من رقم إلى رقم ص.

### توجيهات ـ تعاليق ـ أمثلة لأنشطة

تعديل2008/2009: يحذف تعيين مجموعة تعريف دالة.