الميدان: تحليل

الأستاذ: عبد الله علي

ثـانوية : محمد بونعامة (تيسمسيلت)

الوحدة التعليمية: الاشتقاقية

المستــــوى: 3ر,3ت ر ,3 ع ت .

موضوع الحصة: حساب مشتقات الدوال

تاريــــخ:

الوسائل المستخدمة: كتاب المغني, الكتاب المدرسي, السبورة

المــــــدة:

المكتسبات القبلية:

الكفاءات القاعدية: توظيف المشتقات لحل مشكلات.

مذكرة رقم 01

مراحل الدرس	الانشطة المرافقة لكل مرحلة	الزمن	توجيهات -تعاليق

الانطلاق

نشاط رقم 01 الصـــفحة 40

العدد المشتق -الدالة المشتقة

تعريف: f دالة معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$. a و $a+h$ عددان حقيقيان من I مع $h \neq 0$.

نقول أن f تقبل الاشتقاق عند a إذا قبلت النسبة $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ نهاية محدودة لما يؤول h إلى 0.

تسمى هذه النهاية العدد المشتق للدالة f عند a و نرمز لها بالرمز $f'(a)$.

تمرين تطبيقي:

ادرس قابلية الاشتقاق الدالتين f و g عند العدد 2 مفسرا بيانيا في كل مرة النتيجة المحصل عليها :

1) $f(x) = 3x^2 - 12x$

2) $g(x) = \sqrt{x-2}$

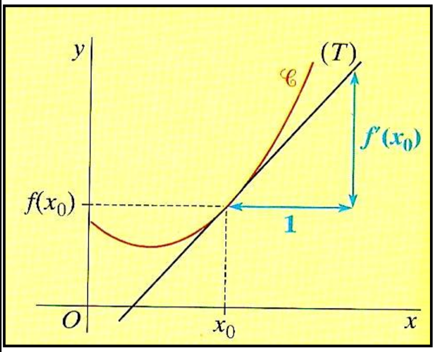
المعارف

مماس منحني دالة

تعريف و خاصية: f دالة معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$ و ليكن (C) تمثيلها البياني في معلم (O,I,J).

إذا قبلت f الاشتقاق عند x_0 فإن (C) يقبل عند النقطة $A(x_0, f(x_0))$ مماسا (T) معامل توجيهه $f'(x_0)$

و معادلته: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$



تمرين تطبيقي:

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x^2 - 3x$

ليكن (C) تمثيلها البياني و (T) مماس للمنحنى (C) عند النقطة A ذات الفاصلة -1

عين معادلة لـ (T)

الإشتقاقية و الإستمرارية

خاصية: إذا كانت دالة f قابلة للاشتقاق على مجال I فإنها مستمرة على هذا المجال.

ملاحظة: عكس هذه الخاصية ليس دائما صحيحا فمثلا الدالة: $x \to |x|$ مستمرة عند 0 و لكن غير قابلة للاشتقاق عن 0. لدينا $\lim_{x\to 0}|x| = 0$ بينما النسبة $\frac{|h|}{h}$ لا تقبل نهاية عند 0 لأن $\lim_{\substack{h \to 0 \\ <}} \frac{|h|}{h} = -1$ و $\lim_{\substack{h \to 0 \\ >}} \frac{|h|}{h} = 1$.

توجيهات -تعاليق:

-التذكير بالنتائج المحصل عليها في السنة الثانية.

ندرس أمثلة حول دوال من مثل :الدوال الناطقة حاصل قسمة كثير حدود من الدرجة2 أو 3 على كثير حدود من الدرجة1 أو2 الدوال الصماء $x \mapsto \sqrt{f(x)}$ حيث f دالة قابلة للاشتقاق الدوال المثلثية:

$x \mapsto \cos(ax+b)$

$x \mapsto \sin(ax+b)$

$x \mapsto \tan(x)$

-فيما يخص الدوال الصماء نتطرق إلى المماس الموازي لحامل محور التراتيب.

يمكن الملاحظة أن كل دالة قابلة للاشتقاق على مجال هي دالة مستمرة على هذا المجال.

تعديل 2008/2009 بحذف تعيين مجموعة تعريف الدالة

المعـــارف

المشتقات والعمليات عليها:

مشتقات دوال مألوفة :

$f(x)$	$f'(x)$	مجالات قابلية الاشتقاق
(حيث k ثابت حقيقي) k	0	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$
$(n \geq 2$ و $n \epsilon N)$ x^n	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$]0;+\infty[$ و $]-\infty;0[$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$

حالات خاصة حول العدد المشتق : ليكن (C_f) منحنى الدالة f و x_0 عددا حقيقيا

النهاية	التفسير الهندسي
$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=l$	الدالة f تقبل الاشتقاق عند x_0. (C_f) يقبل مماس معادلته $y=l(x-x_0)+f(x_0)$
$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ >}}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=l_1$	الدالة f تقبل الاشتقاق على يمين x_0. (C_f) يقبل نصف مماس معادلته $\{y=l_1(x-x_0)+f(x_0) \quad ; x\geq x_0$
$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ <}}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=l_2$	الدالة f تقبل الاشتقاق على يسار x_0. (C_f) يقبل نصف مماس معادلته $\{y=l_2(x-x_0)+f(x_0) \quad ; x\leq x_0$
$\lim_{x\to x_0}\left\lvert\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right\rvert=+\infty$	الدالة f لاتقبل الاشتقاق عند x_0 و (C_f) يقبل مماسا موازيا لمحور التراتيب عند النقطة x_0

ملاحظة: تكون الدالة قابلة للاشتقاق عند النقطة اذا كان العدد المشتق من اليمين مساويا للعدد المشتق من اليسار اي $l_1 = l_2$

إعـــادة استثمـــار

تمرين : نعتبر الدالة المعرفة على$\mathbb{R}$بـ $(C_f): \ f(x) = |x^2-1|$. منحنى الدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$

1) بين ان الدالة f قابلة للاشتقاق على يمين العدد -1

2) بين ان الدالة f قابلة للاشتقاق على يسار العدد -1

3) هل الدالة قابلة للاشتقاق عند العدد -1

-التذكير بالنتائج المحصل عليها في السنة الثانية.
ندرس أمثلة حول دوال من مثل :الدوال الناطقة حاصل قسمة كثير حدود من الدرجة2 أو 3 على كثير حدود من الدرجة1 أو2 الدوال الصماء
$x \mapsto \sqrt{f(x)}$
حيث f دالة قابلة للاشتقاق الدوال المثلثية:
$x \mapsto \cos(ax+b)$
$x \mapsto \sin(ax+b)$
$x \mapsto \tan(x)$
-فيما يخص الدوال الصماء نتطرق إلى المماس الموازي لحامل محور التراتيب.
يمكن الملاحظة أن كل دالة قابلة للاشتقاق على مجال هي دالة مستمرة على هذا المجال.
تعديل 2008/2009
يحذف تعيين مجموعة تعريف الدالة

ملاحظات واقتراحات من اجل تحسين الاداء التربوي...
....

الميدان: تحليل — **الأستاذ: عبد الله علي** — **ثـانوية** : محمد بونعامة (تيسمسيلت)

الوحدة التعليمية:الاشتقاقية — **المستـــوى**: 3ر,3ت ر ,3 ع ت .

موضوع الحصة: دراسة الدوال — **تاريـــخ**:

الوسائل المستخدمة: كتاب المغني, الكتاب المدرسي, السبورة — **المــــدة**:

المكتسبات القبلية:

الكفاءات القاعدية: استعمال المشتقات لدراسة خواص دالة والمنحني الممثل لها (التغيرات، التقريب الخطي، نقطة الانعطاف.....)

مذكرة رقم 02

مراحل الدرس	الانشطة المرافقة لكل مرحلة	الزمن	توجيهات -تعاليق

الانطلاق

نشـــــــاط:

المعارف

المشتقة و إتجاه تغير دالة:

مبرهنة (دون برهان): f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$.

- إذا كان من أجل كل x من I، $f'(x) > 0$ ما عدا ممكن من أجل عدد محدود من القيم التي تنعدم الدالة f من أجلها، فإن الدالة f متزايدة تماما على I.
- إذا كان من أجل كل x من I، $f'(x) < 0$ ما عدا ممكن من أجل عدد محدود من القيم التي تنعدم الدالة f من أجلها، فإن الدالة f متناقصة تماما على I.
- إذا كان من أجل كل x من I، $f'(x) = 0$ فإن الدالة f ثابتة على I.

تعديل 2008/2009 يحذف تعيين مجموعة تعريف الدالة

x		x_0	
$f'(x)$	$+$		$-$
$f(x)$		$f(x_0)$	

$f(x_0)$ تمثل قيمة محلية عظمى معناه: من أجل كل $x \in I$ فإن: $f(x) \leq f(x_0)$

x		x_0	
$f'(x)$	$-$		$+$
$f(x)$		$f(x_0)$	

$f(x_0)$ تمثل قيمة محلية صغرى معناه: من أجل كل $x \in I$ فإن: $f(x) \geq f(x_0)$

القيم الحدية المحلية

تعاريف: f دالة معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$ و x_0 عدد حقيقي من I.

- القول أن $f(x_0)$ قيمة حدية محلية عظمى للدالة f يعني أنه يوجد مجال مفتوح J محتوى في I و يشمل x_0 بحيث من أجل كل x من J، $f(x) \leq f(x_0)$.
- القول أن $f(x_0)$ قيمة حدية محلية صغرى للدالة f يعني أنه يوجد مجال مفتوح J محتوى في I و يشمل x_0 بحيث من أجل كل x من J، $f(x) \geq f(x_0)$.
- القول أن $f(x_0)$ قيمة حدية محلية لـ f يعني أن $f(x_0)$ قيمة حدية محلية عظمى أو صغرى.

تعديل
2008/2009
يحذف تعيين
مجموعة تعريف
الدالة

المعــــارف

مبرهنة (دون برهان): f دالة معرفة و قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح I من $\mathbb{R}$ و x_0 عدد حقيقي من I.

إذا انعدمت الدالة المشتقة f' عند x_0 مغيرة إشارتها فإن $f(x_0)$ قيمة حدية محلية للدالة f .

ملاحظة 1 : المماس عند القيمة الحدية يكون موازي لمحور الفواصل لان $f'(x_0) = 0$

ملاحظة 2 : اذا انعدمت f' ولم تغير اشارتها عند x_0 فان الدالة f تقبل قيمة حدية محلية ونسمي النقطة في التمثيل البياني نقطة انعطاف

نقطة الإنعطاف :

تعريف : هي نقطة يخترق فيها المماس التمثيل البياني

طرق تعيين نقطة إنعطاف :

1) اذا كانت f'' الدالة المشتقة الثانية لـ f انعدمت عند x_0 النقطة وغيرت اشارتها فان النقطة $(x_0; f(x_0))$ هي نقطة انعطاف

2) اذا كانت f' انعدمت عند النقطة x_0 ولم تغير اشارتها فان النقطة $(x_0; f(x_0))$ هي نقطة انعطاف

إعــادة استثمــار

دراسة وضعية منحنى الدالة f بالنسبة للمماس (Δ)

تمرين تطبيقي :

لتكن الدالة f العددية للمتغير الحقيقي x والمعرفة على $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$ كما يلي : $f(x) = \frac{x^3-x^2+1}{x^2-1}$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1) بين انه يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل $f(x) = ax + b + \frac{cx}{x^2-1}$ حيث a، b، c اعداد حقيقية يطلب تعيينها

2) ادرس تغيرات الدالة f وعين بمعادلاتها المستقيمات المقاربة للمنحنى (C_f)

3) بين ان المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $\left[-\frac{4}{5}; -\frac{1}{2}\right]$

4) ارسم بعناية (Δ) و (C_f)

ملاحظات واقتراحات من اجل تحسين الاداء التربوي...
....

الميدان: تحليل	**الإستاذ: عبد الله علي**	**ثـانوية : محمد بونعامة (تيسمسيلت)**
الوحدة التعليمية:الاشتقاقية		**المستـــــوى**: 3ر,3ت ر ,3 ع ت .
موضوع الحصة: مشتق دالة مركبة .المشتقات المتتابعة		**تاريـــخ**:
الوسائل المستخدمة: كتاب المغني, الكتاب المدرسي, السبورة		**المــــــدة**:
المكتسبات القبلية:		
الكفاءات القاعدية: حساب مشتق دالة مركبة .المشتقات المتابعة		

مذكرة رقم 03

مراحل الدرس	الانشطة المرافقة لكل مرحلة	الزمن	توجيهات -تعاليق
الانطلاق			تعديل 2008/2009 يحذف تعيين مجموعة تعريف الدالة

نشــــــــــاط:

مشتق دالة مركبة :

مبرهنة: f، g دالتان تقبلان الاشتقاق عند x_0 و $f(x_0)$ على التوالي فان الدالة (gof) تقبل الاشتقاق حيث : $(g[f(x)])' = f'(x) \times g'[f(x)]$

نتائج:

u و v دالتان قابلتان للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$ و k عدد حقيقي .

الدالة	$u+v$	ku	uv	$\frac{1}{v}$	$\frac{u}{v}$ (الدالة v لاتنعدم على I)
المشتقة	$u'+v'$	ku'	$u'v+v'u$	$-\frac{v'}{v^2}$	$\frac{u'v-v'u}{v^2}$

. المشتقات المتتابعة

المعارف

تعاريف: f دالة معرفة و قابلة للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$.

إذا قبلت الدالة f' هي الأخرى الاشتقاق على I فإن دالتها المشتقة $(f')'$ تسمى المشتقة الثانية للدالة f و نرمز لها بالرمز f'' .إذا قبلت الدالة f'' هي الأخرى الاشتقاق على I فإن دالتها المشتقة $(f'')'$ تسمى المشتقة الثالثة للدالة f و نرمز لها بالرمز f'''. تسمى الدوال f'، f''، f'''،....، $f^{(n)}$.... المشتقات المتتابعة للدالة f

بعض الاسئلة الخاصة

المماس : هناك ست صيغ تقريبا لطرح سؤال المماس ، لكن تبقى معرفة فاصلة نقطة التماس هي مفتاح للاجابة على اي منها كما نرى

	الصيغة(السؤال)	الإجـــــــــابة
1	أكتب معادلة المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة x_0. (الصيغة العادية)	نكتب الدستور : $\boxed{y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)}$ حيث نعوض x_0 بقيمتها المعطــــــــاة.
2	أكتب معادلة المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الترتيب y_0.	نحل المعادلة $\boxed{f(x_0)=y_0}$ ، وعند تعيين x_0 نـــكون قد عدنا إلى الحالة الأولى.
3	بين أنه يوجد مماس – أو أكثر- للمنحنى (C_f) معامل توجيهه يساوي a	نحل المعادلة $\boxed{f'(x_0)=a}$ ، و عند تعيين قيمة(أو قيم) x_0 نكون قد عدنــــا كذلك إلى الحالة الأولى.

تعديل
2008/2009
يحذف تعيين
مجموعة تعريف
الدالة

4	بين أنه يوجد مماس – أو أكثر - للمنحنى (C_f) يوازي المستقيم ذا المعادلة $y = ax+b$.	نحل المعادلة $\boxed{f'(x_0)=a}$ و قد عدنا إلى الحالة الثالثة.
5	بين أنه يوجد مماس – أو أكثر - للمنحنى (C_f) يُعامد المستقيم ذا المعادلة $y = ax+b$.	نحل المعادلة $\boxed{a.f'(x_0)=-1}$ و عند تعيين قيمة(أو قيم) x_0 نكون قد عدنـــا كذلك إلى الحالة الأولى.
6	بين أنه يوجد مماس –أو أكثر - للمنحنى (C_f) يشمل النقطة ذات الإحداثيين $(\alpha;\beta)$.	نحل المعادلة $\boxed{\beta=f'(x_0)(\alpha-x_0)+f(x_0)}$، و عند تعيين قيمة(أو قيم) x_0 نكون قد عدنـــا كذلك إلى الحالة الأولى.

محور التناظر ومركز التناظر :

تطبيق : لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ كما يلي : $f(x)=\frac{2x^2-4x+1}{(x-1)^2}$

1) اثبت ان المستقيم $(\Delta): x=1$ محور تناظر لـ (C_f)

2) لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ كما يلي : $g(x)=x-1+\frac{2}{x-1}$

اثبت ان النقطة $B(1;0)$ مركز تناظر لـ (C_f)

طريقة: α عدد حقيقي و f دالة حيث D_f متناظرة بالنسبة لـ α لاثبات ان المستقيم $x=\alpha$ محور تناظر للمنحنى (C_f) يكفي ان نثبت من اجل كل x من D_f ان $f(2\alpha-x)=f(x)$ او $f(\alpha-x)=f(\alpha+x)$	**طريقة**: α عدد حقيقي و f دالة حيث D_f متناظرة بالنسبة لـ α لاثبات ان المستقيم $\Omega(\alpha;\beta)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f) يكفي ان نثبت من اجل كل x من D_f ان $f(2\alpha-x)+f(x)=2\beta$ او $f(\alpha-x)+f(\alpha+x)=2\beta$

إعـــادة استثمــار

ملاحظات واقتراحات من اجل تحسين الاداء التربوي...
....

الميدان: تحليل

الأستاذ: عبد الله علي

ثـانوية : محمد بونعامة (تيسمسيلت)

الوحدة التعليمية:الاشتقاقية

المستـــوى: 3ر,3ت ر ,3 ع ت .

مذكرة رقم 05

موضوع الحصة: التقريب التآلفي لدالة

تاريــــخ:

الوسائل المستخدمة: كتاب المغني, الكتاب المدرسي, السبورة

المـــــدة:

المكتسبات القبلية:

الكفاءات القاعدية: حساب مشتق دالة مركبة .المشتقات المتتابعة

مراحل الدرس	الانشطة المرافقة لكل مرحلة	الزمن	توجيهات -تعاليق

المعـــارف

نشـــــــاط:

تعريف : نسمي دالة تآلفية $x \mapsto f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ تقريبا تآلفيا للدالة f بجوار x_0 ونقبل انه احسن تقريب تالفي له

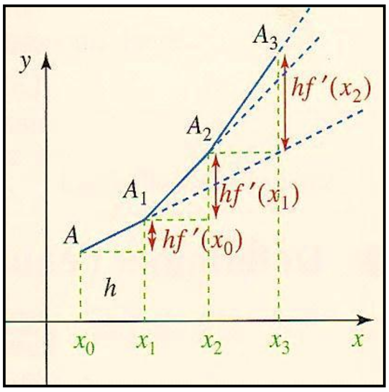
مثال : احسن تقريب تالفي للدالة $x \mapsto \sqrt{x+1}$ بجوار 0 هي الدالة التآلفية $x \mapsto 1+\frac{x}{2}$ ونكتب $\sqrt{x+1} \approx 1+\frac{x}{2}$ بجوار 0

ملاحظة : نضع $h = x - x_0$ احسن تقريب تالفي للدالة يصبح كما يلي :

$$f(x_0+h) \approx f'(x_0)h + f(x_0)$$

تقريب منحنى دالة بطريقة اولر

تسمح طريقة أولر بإنشاء تمثيلات بيانية تقريبية لدالة f بمعرفة f' و $y_0 = f(x_0)$. ترتكز هذه الطريقة على التقريب التآلفي للدالة f بحيث من أجل h قريب من 0



لدينا: $f(x_0+h) \approx f(x_0)+hf'(x_0)$.

انطلاقا من النقطة $A_0(x_0;y_0)$ بحيث $f'(x_0) \neq 0$ ننشئ النقطة $A_1(x_1;y_1)$ ذات الفاصلة $x_1 = x_0 + h$ و التي تنتمي إلى المستقيم الذي معامل توجيهه $f'(x_0)$ والمار من A_0 و بالتالي:

$y_1 \approx f(x_0)+hf'(x_0)$ و بما أن $f(x_0+h) \approx f(x_0)+hf'(x_0)$

من أجل h قريب من 0 فإن النقطة $A_1(x_1;y_1)$ قريبة من (C_f) منحني f.

بنفس الطريقة يمكن إنشاء، انطلاقا من A_1، النقطة $A_2(x_1+h; f(x_1)+hf'(x_1))$.

و هكذا يمكن على التوالي إنشاء النقط $A_n(x_n;y_n)$ حيث $x_n = x_{n-1}+h$

و $y_n = f(x_{n-1})+hf'(x_{n-1})$ مع $n \geq 1$. بربط النقط A_0،A_1،A_2.... نحصل على تمثيل بياني تقريبي لـِ f مرتبط باختيار h الذي يسمى الخطوة. و نحصل على أكثر دقة كلما كان h أقربا إلى 0.

تعديل 2008/2009 يحذف تعيين مجموعة تعريف الدالة

الكتابة التفاضلية: بوضع: $\Delta x = (x+h) - x$ و $\Delta y = f(x+h) - f(x)$ تكتب المساواة

$f(x+h) - f(x) = hf'(x) + h\varepsilon(h)$ كما يلي: $\Delta y = f'(x)\Delta x + \Delta x\varepsilon(\Delta x)$

و منه التقريب $\Delta y \approx f'(x)\Delta x$ عندما يكون Δx قريبا من 0. نصطلح الصياغة التفاضلية التالية: $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ أو $dy = f'(x)dx$.

يستعمل هذا الترميز في العلوم الفيزيائية و بصفة عامة نكتب: $\frac{df}{dx}$ بدلا من f' و $\frac{d^2f}{dx^2}$ بدلا من f'' وهكذا $\frac{d^nf}{dx^n}$ بدلا من $d^{(n)}$.

تمارين من رقم 25 إلى رقم 33 الصـــــفحة 60 و 61

ملاحظات واقتراحات من اجل تحسين الاداء التربوي...

....