طرق إزالة حالات عدم التعيين

الهدف : حساب $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ (a يمثل عدد أو $\pm\infty$)

حالة عدم التعيين $\frac{\infty}{\infty}$

$f(x)$ تتضمن جذرا $\sqrt{\ }$

نستعمل طريقة التحليل :

وضع الحد الأكبر درجة كعامل مشترك

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=|x|\sqrt{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}} \quad , \quad \sqrt{\alpha x+\beta}=|x|\sqrt{\frac{\alpha}{x}+\frac{\beta}{x^2}}$$

$f(x)$ تتضمن كثيرات حدود فقط

نطبق القاعدة التالية :

عند اللانهاية ، الكثير الحدود له نفس نهاية حده الأكبر درجة .

$$\lim_{x\to\infty} a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_kx^k=\lim_{x\to\infty} a_kx^k$$

حالة عدم التعيين $+\infty-\infty$

$f(x)$ تتضمن جذرا $\sqrt{\ }$

- $f(x)=\sqrt{ax^2+bx+c}+\alpha x+\beta$
  - $\sqrt{a}\neq|\alpha|$: نضع x كعامل مشترك
  - $\sqrt{a}=|\alpha|$: نستعمل طريقة المرافق
- $f(x)=\sqrt{ax^2+bx+c}-\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\delta}$
  - $a=\alpha$: نستعمل طريقة المرافق
  - $a\neq\alpha$: نضع x كعامل مشترك
- $f(x)=\sqrt{ax+b}+\alpha x+\beta$: نضع x كعامل مشترك

حالة عدم التعيين $\frac{0}{0}$

$f(x)$ تتضمن كثيرات حدود

نستعمل طريقة الإختزال :

1 – نحلل البسط و المقام

2 - ثم نختزل على $(x-a)$

$$f(x)=\frac{\cancel{(x-a)}(\dots\dots)}{\cancel{(x-a)}(\dots\dots)}$$

$f(x)$ تتضمن جذرا $\sqrt{\ }$

نستعمل طريقة المرافق :

1 - نضرب $f(x)$ × $\frac{\text{المرافق}}{\text{المرافق}}$

2 - ثم نختزل على $(x-a)$

المقام من الشكل $(\alpha x+\beta)$

نستعمل طريقة العدد المشتق :

1 – اظهار العبارة $\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$

$$\frac{\dots\dots}{\alpha x+\beta}=\frac{1}{\alpha}\times\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$$

2 - $\lim\limits_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}=g'(a)$

$f(x)$ تتضمن $\sin$ أو $\cos$

نظهر أحد النهايات الشهيرة التالية :

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x}=0$$

مثال 1 : $\lim\limits_{x\to2}\frac{-3x^2+4x+4}{x^2-5x+6}$

$\lim\limits_{x\to2}\frac{-3x^2+4x+4 \longrightarrow 0}{x^2-5x+6 \longrightarrow 0}$ ح ع ت $\frac{0}{0}$

نزيلها بطريقة الإختزال على $(x-a)$

تذكير

إذا كان $P(\alpha)=0$ فإن $P(x)$ تقبل القسمة على $(x-\alpha)$

لدينا $x\to2$ اذن نختزل على $(x-2)$ البسط و المقام

$$\lim_{x\to2}\frac{-3x^2+4x+4}{x^2-5x+6}=\lim_{x\to2}\frac{\cancel{(x-2)}(-3x-2)}{\cancel{(x-2)}(x-3)}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{(-3x-2)}{(x-3)}$$
$$=8$$

مثال 2 : $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^3+x^2-8x-12}{x^3+8}$

نقوم بالتعويض : لما $x\to-2$: $\left\{\begin{array}{l}\text{البسط} \leftarrow 0\\ \text{المقام} \leftarrow 0\end{array}\right.$ ← ح ع ت $\frac{0}{0}$

نزيلها بطريقة الإختزال على $(x-a)$

لدينا -2 جذرا لكل من البسط و المقام إذن يقبلان القسمة على $(x+2)$ باستعمال القسمة الإقليدية نجد :

$$x^3+x^2-8x-12=(x+2)(x^2-x-6)$$
$$x^3+8=(x+2)(x^2-2x+4)$$

$$\lim_{x\to-2}\frac{x^3+x^2-8x-12}{x^3+8}=\lim_{x\to-2}\frac{\cancel{(x+2)}(x^2-x-6)}{\cancel{(x+2)}(x^2-2x+4)}$$
$$=\frac{(-2)^2-(-2)-6}{(-2)^2-2(-2)+4}$$
$$=\frac{0}{12}$$
$$=0$$

مثال 3 : $\lim\limits_{x\to5}\frac{\sqrt{2x-1}-3}{x-5}$

نقوم بالتعويض : لما $x\to5$: $\left\{\begin{array}{l}\text{البسط} \leftarrow 0\\ \text{المقام} \leftarrow 0\end{array}\right.$ ← ح ع ت $\frac{0}{0}$

نلاحظ وجود جذرا $\sqrt{\ }$

الطريقة : نضرب البسط و المقام بالمرافق

$$\frac{\sqrt{2x-1}-3}{x-5}=\frac{\sqrt{2x-1}-3}{x-5}\times\frac{\sqrt{2x-1}+3}{\sqrt{2x-1}+3}$$

Astuce

$(\sqrt{A}-B)(\sqrt{A}+B)=A-B^2$

$$\frac{\sqrt{2x-1}-3}{x-5}=\frac{(2x-1)-3^2}{(x-5)(\sqrt{2x-1}+3)}=\frac{2\cancel{(x-5)}}{\cancel{(x-5)}(\sqrt{2x-1}+3)}$$

$$\lim_{x\to5}\frac{\sqrt{2x-1}-3}{x-5}=\lim_{x\to5}\frac{2}{\sqrt{2x-1}+3}=\frac{1}{3}$$

طريقة أخرى :

لاحظ : المقام من الشكل $(x-a)$

يمكن استعمال العدد المشتق

نضع $g(x)=\sqrt{2x-1}$ منه $g(5)=3$

يصبح : $\lim\limits_{x\to5}\frac{\sqrt{2x-1}-3}{x-5}=\lim\limits_{x\to5}\frac{g(x)-g(5)}{x-5}=g'(5)$

لدينا : $g'(x)=\frac{2}{2\sqrt{2x-1}}$ و منه $g'(5)=\frac{2}{2\sqrt{2\times5-1}}=\frac{1}{3}$

و بالتالي : $\lim\limits_{x\to5}\frac{\sqrt{2x-1}-3}{x-5}=\frac{1}{3}$

مثال 4 : $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\sin x-1}{6x-\pi}$

نقوم بالتعويض : لما $x\to\frac{\pi}{6}$: $\left\{\begin{array}{l}\text{البسط} \leftarrow 0\\ \text{المقام} \leftarrow 0\end{array}\right.$ ← ح ع ت $\frac{0}{0}$

نلاحظ البسط ليس كثيرحدود و لا تحتوي الدالة على جذر

الطريقة : استعمال العدد المشتق

نظهر في المقام $(x-a)$ أي $x-\frac{\pi}{6}$

$$\frac{2\sin x-1}{6x-\pi}=\frac{2\sin x-1}{6(x-\frac{\pi}{6})}=\frac{1}{6}\times\frac{2\sin x-1}{x-\frac{\pi}{6}}$$

نضع $g(x)=2\sin x$ منه $g(\frac{\pi}{6})=1$

يصبح : $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\sin x-1}{6x-\pi}=\frac{1}{6}\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{g(x)-g(\frac{\pi}{6})}{x-\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{6}g'(\frac{\pi}{6})$

لدينا : $g'(x)=2\cos x$ و منه $g'(\frac{\pi}{6})=2\cos\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}$

و بالتالي : $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\sin x-1}{6x-\pi}=\frac{\sqrt{3}}{6}$

مثال 5 : $\lim\limits_{x\to2}\frac{\sqrt{x-2}}{x^2-2x}$

$\lim\limits_{x\to2}\frac{\sqrt{x-2} \longrightarrow 0}{x^2-2x \longrightarrow 0}$ ح ع ت $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x-2}}{x^2-2x}=\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x-2}}{x(x-2)}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{\cancel{\sqrt{x-2}}}{x\cancel{\sqrt{x-2}}\sqrt{x-2}}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{1}{x\sqrt{x-2}}=+\infty$$

(لأن $\lim\limits_{x\to2}x\sqrt{x-2}=0^+$)

مثال 1 : $\lim\limits_{x\to 2}\frac{-3x^2+4x+4}{x^2-5x+6}$

$\lim\limits_{x\to 2}\frac{-3x^2+4x+4 \longrightarrow 0}{x^2-5x+6 \longrightarrow 0}$ ح ع ت $\frac{0}{0}$

نزيلها بطريقة الإختزال على $(x-a)$

تذكير

إذا كان $P(\alpha)=0$ فإن $P(x)$ تقبل القسمة على $(x-\alpha)$

لدينا $x\to 2$ اذن نختزل على $(x-2)$ البسط و المقام

$$\lim\limits_{x\to 2}\frac{-3x^2+4x+4}{x^2-5x+6}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(-3x-2)}{\cancel{(x-2)}(x-3)}$$
$$=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(-3x-2)}{(x-3)}$$
$$=8$$

مثال 2 : $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^3+x^2-8x-12}{x^3+8}$

نقوم بالتعويض : لما $x\to -2$: $\begin{cases} \text{البسط} \leftarrow 0 \\ \text{المقام} \leftarrow 0 \end{cases}$ ← ح ع ت $\frac{0}{0}$

نزيلها بطريقة الإختزال على $(x-a)$

لدينا -2 جذرا لكل من البسط و المقام إذن يقبلان القسمة على $(x+2)$ باستعمال القسمة الإقليدية نجد :

$$x^3+x^2-8x-12=(x+2)(x^2-x-6)$$
$$x^3+8=(x+2)(x^2-2x+4)$$

$$\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^3+x^2-8x-12}{x^3+8}=\lim\limits_{x\to -2}\frac{\cancel{(x+2)}(x^2-x-6)}{\cancel{(x+2)}(x^2-2x+4)}$$
$$=\frac{(-2)^2-(-2)-6}{(-2)^2-2(-2)+4}$$
$$=\frac{0}{12}$$
$$=0$$

مثال 3 : $\lim\limits_{x\to 5}\frac{\sqrt{2x-1}-3}{x-5}$

نقوم بالتعويض : لما $x\to 5$: $\begin{cases} \text{البسط} \leftarrow 0 \\ \text{المقام} \leftarrow 0 \end{cases}$ ← ح ع ت $\frac{0}{0}$

نلاحظ وجود جذرا $\sqrt{\ }$

الطريقة : نضرب البسط و المقام بالمرافق

$$\frac{\sqrt{2x-1}-3}{x-5}=\frac{\sqrt{2x-1}-3}{x-5}\times\frac{\sqrt{2x-1}+3}{\sqrt{2x-1}+3}$$

Astuce

$(\sqrt{A}-B)(\sqrt{A}+B)=A-B^2$

$$\frac{\sqrt{2x-1}-3}{x-5}=\frac{(2x-1)-3^2}{(x-5)(\sqrt{2x-1}+3)}=\frac{2\cancel{(x-5)}}{\cancel{(x-5)}(\sqrt{2x-1}+3)}$$

$$\lim\limits_{x\to 5}\frac{\sqrt{2x-1}-3}{x-5}=\lim\limits_{x\to 5}\frac{2}{\sqrt{2x-1}+3}=\frac{1}{3}$$

طريقة أخرى :

لاحظ : المقام من الشكل $(x-a)$

يمكن استعمال العدد المشتق

نضع $g(x)=\sqrt{2x-1}$ منه $g(5)=3$

يصبح : $\lim\limits_{x\to 5}\frac{\sqrt{2x-1}-3}{x-5}=\lim\limits_{x\to 5}\frac{g(x)-g(5)}{x-5}=g'(5)$

لدينا : $g'(x)=\frac{2}{2\sqrt{2x-1}}$ و منه $g'(5)=\frac{2}{2\sqrt{2\times 5-1}}=\frac{1}{3}$

و بالتالي : $\lim\limits_{x\to 5}\frac{\sqrt{2x-1}-3}{x-5}=\frac{1}{3}$

مثال 4 : $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\sin x-1}{6x-\pi}$

نقوم بالتعويض : لما $x\to\frac{\pi}{6}$: $\begin{cases} \text{البسط} \leftarrow 0 \\ \text{المقام} \leftarrow 0 \end{cases}$ ← ح ع ت $\frac{0}{0}$

نلاحظ البسط ليس كثيرحدود و لا تحتوي الدالة على جذر

الطريقة : استعمال العدد المشتق

نظهر في المقام $(x-a)$ أي $x-\frac{\pi}{6}$

$$\frac{2\sin x-1}{6x-\pi}=\frac{2\sin x-1}{6(x-\frac{\pi}{6})}=\frac{1}{6}\times\frac{2\sin x-1}{x-\frac{\pi}{6}}$$

نضع $g(x)=2\sin x$ منه $g(\frac{\pi}{6})=1$

يصبح : $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\sin x-1}{6x-\pi}=\frac{1}{6}\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{g(x)-g(\frac{\pi}{6})}{x-\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{6}g'(\frac{\pi}{6})$

لدينا : $g'(x)=2\cos x$ و منه $g'(\frac{\pi}{6})=2\cos\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}$

و بالتالي : $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\sin x-1}{6x-\pi}=\frac{\sqrt{3}}{6}$

مثال 5 : $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x-2}}{x^2-2x}$

$\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x-2}\longrightarrow 0}{x^2-2x\longrightarrow 0}$ ح ع ت $\frac{0}{0}$

$$\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x-2}}{x^2-2x}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x-2}}{x(x-2)}$$
$$=\lim\limits_{x\to 2}\frac{\cancel{\sqrt{x-2}}}{x\cancel{\sqrt{x-2}}\sqrt{x-2}}$$
$$=\lim\limits_{x\to 2}\frac{1}{x\sqrt{x-2}}=+\infty$$

(لأن $\lim\limits_{x\to 2}x\sqrt{x-2}=0^+$)

أمثلة حول كيفية إزالة ح ع ت $+\infty-\infty$ و $\frac{\infty}{\infty}$

مثال 1 : $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{2x^2+x-3}}{1-x}$

$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{2x^2+x-3}\xrightarrow{}+\infty}{1-x\xrightarrow{}+\infty}$ ح ع ت $\frac{+\infty}{+\infty}$

نستعمل طريقة التحليل :

وضع الحد الأعلى درجة كعامل مشترك ثم التبسيط

$$\sqrt{2x^2+x-3}=\sqrt{x^2(2+\frac{x}{x^2}-\frac{3}{x^2})}=\sqrt{x^2}\sqrt{2+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}}$$

$$\sqrt{2x^2+x-3}=|x|\sqrt{2+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}}$$

لا تنسى: $\sqrt{x^2}=|x|$

تقنية : $\sqrt{ax^2+bx+c}=|x|\sqrt{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}$

لدينا :

$$\frac{\sqrt{2x^2+x-3}}{1-x}=\frac{|x|\sqrt{2+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}}}{x(\frac{1}{x}-1)}=\frac{-\cancel{x}\sqrt{2+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}}}{\cancel{x}(\frac{1}{x}-1)}$$

تذكير

$\begin{cases}|x|=-x\ ,x\to-\infty\\ |x|=x\ \ ,x\to+\infty\end{cases}$

إذن : $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{2x^2+x-3}}{1-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{2+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}}}{\frac{1}{x}-1}=\frac{-\sqrt{2}}{-1}=\sqrt{2}$

(لأن : $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{x^2}=0$)

مثال 2 : $\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-1-\sqrt{-3x+2}}{x-2}$

لاحظ : لما $x\to-\infty$: $\begin{cases}\text{البسط}\leftarrow-\infty\\ \text{المقام}\leftarrow-\infty\end{cases}\leftarrow\frac{-\infty}{-\infty}$ ح ع ت

نستعمل طريقة التحليل : وضع x كعامل مشترك ثم الإختزال .

تقنية : $\sqrt{ax+b}=|x|\sqrt{\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}}\quad(x\neq0)$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-1-\sqrt{-3x+2}}{x-2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-1-|x|\sqrt{\frac{-3}{x}+\frac{2}{x^2}}}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-1+x\sqrt{\frac{-3}{x}+\frac{2}{x^2}}}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x}\left(2-\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{-3}{x}+\frac{2}{x^2}}\right)\to2}{\cancel{x}(1-\frac{2}{x})\longrightarrow1}$$

$=2$

مثال 3: $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{4x^2+x}-x+1$

لما $x\to+\infty$: $\begin{cases}\sqrt{4x^2+x}\to+\infty\\ -x+1\to-\infty\end{cases}\leftarrow+\infty-\infty$ (ح ع ت)

Astuce

لإزالة ح ع ت للنهاية $\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt{ax^2+bx+c}+\alpha x+\beta$ فإننا نميز حالتين:

1 - $\sqrt{a}\neq|\alpha|$ في هذه الحالة نضع x كعامل مشترك .

2 - $\sqrt{a}=|\alpha|$ في هذه الحالة نستعمل المرافق .

لاحظ المعاملين للحدين الأعلى درجة $\sqrt{4x^2+x}-1x+1$

لدينا $\sqrt{4}\neq|-1|$ إذن في هذه الحالة نضع x كعامل مشترك

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{4x^2+x}-x+1=\lim_{x\to+\infty}|x|\sqrt{4+\frac{1}{x}}-x+1$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x\sqrt{4+\frac{1}{x}}-x+1$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x\underbrace{\left(\sqrt{4+\frac{1}{x}}-1+\frac{1}{x}\right)}_{\downarrow\ 1}$$

$=+\infty$

(لأن : $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$)

مثال 4 : $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{4x^2+x+3}+2x$

لما $x\to-\infty$: $\begin{cases}\sqrt{4x^2+x+3}\to+\infty\\ 2x\to-\infty\end{cases}\leftarrow+\infty-\infty$ (ح ع ت)

لاحظ المعاملين للحدين الأعلى درجة $\sqrt{4x^2+x+3}+2x$

لدينا $\sqrt{4}=|2|$ إذن في هذه الحالة نستعمل المرافق

$$\sqrt{4x^2+x+3}+2x=\frac{(\sqrt{4x^2+x+3}+2x)(\sqrt{4x^2+x+3}-2x)}{\sqrt{4x^2+x+3}-2x}$$

$$=\frac{(4x^2+x+3)-(2x)^2}{\sqrt{4x^2+x+3}-2x}$$

$$=\frac{x+3}{|x|\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}-2x}$$

بما أن $x\to-\infty$ فإن $|x|=-x$

$$=\frac{\cancel{x}(1+\frac{3}{x})}{\cancel{x}\left(-\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}-2\right)}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{4x^2+x+3}+2x=\lim_{x\to-\infty}\frac{1+\frac{3}{x}}{-\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}-2}$$

$=-\frac{1}{4}$

(لأن : $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3}{x^2}=0$)