مذكرة رقم:1

أستعد للباكالوريا

السنة الدراسية	Yousfi Math	إعداد الأستاذ
2015/2016	Yousfisifou804@yahoo.fr	يوسفي عبد الرحمن

المحور الأول: الدوال العددية

المستوى: الثالثة رياضيات الثالثة علوم و تقني رياضي

الموضوع

1: النهايات 2: الاستمرارية 3: الأستقاقية 4: الدوال الأسية

5: الدوال اللغارتمية 6: المعادلات التفاضلية 7: دوال القوى والجذر

الكفاءة المستهدفة

- حساب النهايات
- دراسة السلوك التقاربي لدالة
- استعمال مبرهنة القيم المتوسطة
- استعمال المشتق لدراسة خواص دالة
- توظيف خواص الدالة الأسية النيبيرية.
- حل مشكلات بتوظيف اللوغاريتم والدوال الأسية ودوال القوى.
- دراسة السلوك التقاربي لدالة

المكتسبات القبلية

- حساب النهايات عند اطراف مجموعة التعريف لدوال مألوفة
- الدوال العددية ، المشتقات.

مخطط الدرس	التوقيت	مخطط الدرس	التوقيت
1.النهايات :أنشطة و تعار يف		4.الدوال الآسية:أنشطة وتعاريف .	
العمليات على النهايات		خواص الدالة الآسية	
النهايات و علاقة الترتيب*السلوك التقاربي لدالة.		دراسة الدالة الآسية	
2.الاستمرارية: أنشطة و تعار يف		5.المعادلة التفاضلية : $y'=ay+b$	
مبرهنة ق المتوسطة وتطبيقاتها.		الدالة اللوغارتمية النيبيرية:أنشطة و تعار يف .	
3.الاشتقاقية: أنشطة ، تعاريف وخواص .		خواص الدالة اللوغارتمية النيبيرية	
عمليات على المشتقات.		دراسة الدالة اللوغارتمية النيبيرية، دالة $\log$	
توظيف المشتقات في دراسة الدوال العددية.		6.دوال القوى و الجذر النوني: أنشطة و تعاريف	

وثائق التحضير	الوسائل البيداغوجية	نقد ذاتي
• دليل الأستاذ • الكتاب المدرسي • المنهاج • الهباج في الرياضيات • الجديد في الرياضيات	• السبورة • جهاز داتاشو	

نهائي رياضيات وعلوم

2016 النهايات

الكفاءة المستهدفة

- ♥ حساب نهاية منتهية أو غير منتهية لدالة عند الحدود(المنتهية أو غير المنتهية) لمجالات مجموعة التعريف.
- ♥ حساب نهاية باستعمال المبرهنات المتعلقة بالعمليات على النهايات أو المقارنة وتركيب دالتين.
- ♥ دراسة السلوك التقاربي لدالة
- ♥ استعمال مبرهنة القيم المتوسطة لإثبات وجود حلول للمعادلة $f(x)=k$، k عدد حقيقي معطى.

المكتسبات القبلية

- ♥ حساب النهايات عند اطراف مجموعة التعريف لدوال مالوفة
- ♥ استعمال مبرهنة القيم المتوسطة
- ♥ استعمال المشتقات لحل المشكلات

ســـــــــــير الدرس	التوقيت
نشاط 1: النهاية عند مالانهاية 2:النهاية عند عدد حقيقي 3: عمليات على النهايات 4: نهاية دالة مركب 5: النهاية بالمفارنة 6:تطبيقات	 1:ســـــا 1:ســـــا 1:ســـــا 1:ســـــا 1:ســـــا 2:ســـــا

وثائق التحضير	الوسائل البيداغوجية	نقد ذاتي
• دليل الأستاذ • الكتاب المدرسي • المنهاج • الهباج في الرياضيات • الجديد في الرياضيات	• السبورة • جهاز داتاشو	

المؤسسـة:	المستـــوى: الثالثة علوم
السنة الدراسية:	ميـدان التعلم: تحليل
التاريـخ:	الوحدة التعلمية: النهايات
توقيت الحصة :	موضوع الحصة : حساب نهاية دالة

المكتسبات القبلية حساب نهاية دالة على مجال تعريفها

- حساب نهاية منتهية أو غير منتهية لدالة عند الحدود (المنتهية أو غير المنتهية) لمجالات مجموعة التعريف.

الأنشطة المقترحة وطبيعتها

نشاط:

لتكن الدالة $f : x \longmapsto \dfrac{2x^2+3}{x^2}$

1) حدد مجموعة تعريف f.

2) بين أنه من أجل كل $x \in D_f$ يكون: $f(x)=2+\dfrac{3}{x^2}$

3) هل توجد قيم لـ x يكون من أجلها $f(x)>10^{10}$ ؟ ما هو تعليقك؟(يمكن ملاحظة أن $10^8<\dfrac{10^{10}-2}{3}$).

4) أكمل الجدول التالي، ثم استنتج $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

x	10^{-5}	10^{-3}	0.1
$f(x)$			

0.25	0.5	1	2	3

10	10^{3}	$10^{[illegible]}$	10^{10}

5) اعتمادا على ما سبق، وعلى شفعية f أنشئ في المستوي المزود بمعلم م م (C_f).

6) هل (C_f) يعطي تفسيرا بيانيا للنهايتين السابقتين؟

الإنجاز (سـير الحصة)

نـشـاط

أحسب النهايات : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x-3}+2\right)$,, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{x-3}\right)$ و $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{(x-3)^2}\right)$

أحسب النهايات : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x-1}\right)$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2+1\right)$ و $\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2+1\right)$

الحل:

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x-3}+2\right)=2$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{x-3}\right)=0$ تسمى نهاية منتهية عند مالانهاية

$\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{(x-3)^2}\right)=+\infty$ تسمى نهاية غير منتهية عند عدد

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\sqrt{x-1}\right)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2+1\right)=+\infty$ نهاية غير منتهية عند مالانهاية

$\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2+1\right)=5$ تسمى نهاية منتهية عند عدد

1/تعاريف النهاية عند لانهاية

1.1 نهاية منتهية عند مالانهاية

تعريف 01 f دالة معرفة على مجال من الشكل $]x_0,+\infty[$ و l عدد حقيقي .

القول أن نهاية f عند $+\infty$ هي l يعني أن كل مجال مفتوح يشمل l يشمل كل قيم $f(x)$ من أجل x كبير بالقدر الكافي . نكتب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l$.

نتيجة:نقول أن المستقيم ذا المعادلة $y=l$ مستقيم مقارب للمنحني (C_f) الممثل للدالة f عند $+\infty$

ملاحظة: نحصل على تعريف و نتيجة مماثلتين عند $-\infty$.

أمثلة: * $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$ * $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=0$ * $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$ * $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$ * $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=0$

1.1.1 التفسير البياني (مستقيم مقارب موازي لمحور الفواصل)

المستقيم المقارب الموازي لمحور الفواصل

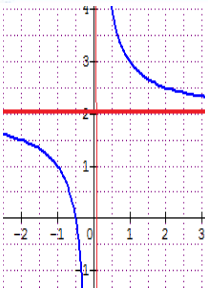
تعريف

ليكن (c_f) التمثيل البياني لدالة f في معلم وليكن b عدد حقيقي

القول أن المستقيم الموازي لمحور الفواصل ذو المعادلة y=b مستقيم مقارب للمنحني (c_f) عند $+\infty$ يعني أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$

مثال ليكن $h(x)=2+\dfrac{1}{x}$ وليكن تمثيلها البياني (c_k) في (الشكل3)

نلاحظ كلما أخذ $|x|$ قيم كبيرة كلما إقترب منحنى الدالة h من المستقيم ذو المعادلة y=2 وعليه يسمى هذا المستقيم مستقيم مقارب لـ (c_k) عند $+\infty$ عند $-\infty$



التعليمات والتوجيهات

- ننطلق من وضعيات ذات دلالة تتعلق بالدوال المدروسة في السنة الثانية ثانوي، و نهتم فقط بدوال تكون مجموعة تعريفها معطاة أو سهلة التعيين.
- تدعيم مكتسبات التلاميذ حول مفهوم النهاية في وضعيات بسيطة (مثلا النهاية المنتهية عند عدد حقيقي x_0) وتوظيف ذلك في أمثلة بسيطة ثم توسع إلى وضعيات أخرى. ولتوضيح ذلك. نعتمد على تمثيلات بيانية باستعمال برمجيات مناسبة كالمجدولات .
- كما يمكن توظيف الحاسبة البيانية:
- بإزاحة النافذة نحو اليسار عندما يؤول x إلى $-\infty$.
- بإزاحة النافذة نحو اليمين عندما يؤول x إلى $+\infty$.
- بإنجاز تكبير للنافذة بجوار x_0 عندما يؤول x إلى x_0 .

- وذلك لتخمين نهاية أو المصادقة عليها.
- تستغل هذه المناسبة للتذكير بالمستقيم المقارب الموازي لحامل محور الفواصل

2.1 نهاية غير منتهية عند مالانهاية

تعريف 01 f دالة معرفة على مجال من الشكل $[x_0;+\infty[$.

القول أن نهاية f عند $+\infty$ هي $+\infty$ يعني أن كل مجال من الشكل $]A;+\infty[$ $(A\in\mathbb{R})$ يشمل كل القيم $f(x)$ من أجل x كبير بالقدر الكافي. نكتب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و نقرأ $f(x)$ يؤول إلى $+\infty$ لما يؤول x إلى $+\infty$.

تعريف 02: من اجل كل عدد حقيقي $A\in\mathbb{R}$ حيث $A\succ 0$ يكون لدينا $f(x)\succ A$ حيث x كبير بالقدر الكافي

مثال:

باستعمال التعريف بين ان $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{2x-6}=+\infty$

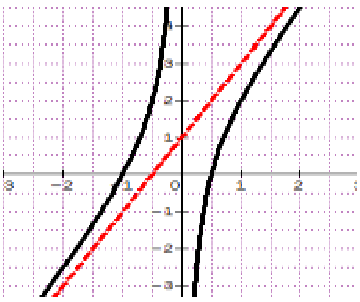
$A\in\mathbb{R}$ ومنه $f(x)\succ A$ يكافئ $\sqrt{2x-6}\succ A$ نجد $x\succ\dfrac{A^2}{2}+3$

1.2.1. التفسير البياني

المستقيم المقارب المائل

تعريف : ليكن (C_f) التمثيل البياني لدالة f في معلم و ليكن (Δ) المستقيم ذو المعادلة: $y=ax+b$ القول أن المستقيم (Δ) مستقيم مقارب للمنحني (C_f) عند $+\infty$ (على الترتيب عند $-\infty$) يعني أن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$ (على الترتيب $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$)

مثال: لتكن f الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=2x+1-\dfrac{1}{x}$



(C_f) التمثيل البياني للدالة f كما قمنا بتمثيل المستقيم $(\Delta):y=2x+1$

من خلال المنحنى نلاحظ أن $(\Delta):y=2x+1$ مستقيم مقارب ل (C_f) أي ان $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$

ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[2x+1-\dfrac{1}{x}-(2x+1)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{+\infty}=0$

وكذلك $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$ ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[2x+1-\dfrac{1}{x}-(2x+1)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{-\infty}=0$

ملاحظة: إذا كانت f دالة بحيث: $f(x)=ax+b+g(x)$ مع $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$

فإنه من الواضح أن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$ لأن $f(x)-(ax+b)=g(x)$

و بالتالي فالمستقيم (Δ) ذو المعادلة: $y=ax+b$ مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) لما يؤول x إلى $+\infty$ (نفس الملاحظة لما يؤول x إلى $-\infty$)

2/ تعاريف النهاية عند عدد

2. 1. نهاية منتهية لدالة عند عدد حقيقي

تعريف 03: f دالة معرفة على مجموعة من الشكل $]a;x_0[\cup]x_0;b[$ و l عدد حقيقي.

القول أن نهاية f عند x_0 هي l يعني أن كل مجال مفتوح شامل للعدد l يشمل كل القيم $f(x)$ من أجل x قريب بالقدر الكافي من x_0. نكتب $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$ و نقرأ $f(x)$ يؤول إلى l لما يؤول x إلى x_0.

2.2 نهاية غير منتهية عند عدد

تعريف 04: f دالة معرفة على مجموعة من الشكل $]a;x_0[\cup]x_0;b[$.

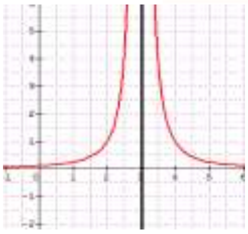
القول أن نهاية f عند x_0 هي $+\infty$ يعني أن كل مجال من الشكل $]A;+\infty[$ $(A\in\mathbb{R})$ يشمل كل القيم $f(x)$ من أجل x قريب بالقدر الكافي من x_0. نكتب $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ ونقرأ $f(x)$ يؤول إلى $+\infty$ لما يؤول x إلى x_0.

1.2/2 التفسير البياني

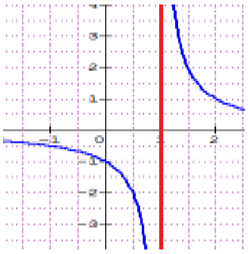
المستقيم المقارب الموازي لمحور التراتيب

التفسير البياني لنهاية غير منتهية عند عدد:

ليكن التمثيل البياني للدالة $f(x)=\dfrac{1}{(x-3)^2}$ (الشكل1)



و ليكن التمثيل البياني للدالة $g(x)=\dfrac{1}{x-1}$ (الشكل2)



نلاحظ أن (c_f) يقترب قدر مانريد من المستقيم ذو المعادلة x=3 كلما إقترب x أكثر من 3 وأن (c_g) يقترب قدر مانريد من المستقيم ذو المعادلة x=1 كلما إقترب x أكثر من 1

نقول في هذه الحالة أن المستقيم ذو المعادلة x=3 مستقيم مقارب للمنحنى (c_f) والمستقيم ذو المعادلة x=1 مستقيم مقارب للمنحنى (c_g) موازي لمحور التراتيب .

تعريف: ليكن (c_f) التمثيل البياني لدالة f في معلم وليكن a عدد حقيقي

إذا كانت النهاية (أو النهاية من اليمين أو من اليسار)

للدالة f عند a هي $+\infty$ أو $-\infty$ نقول أن المستقيم الموازي لمحور التراتيب ذو المعادلة x=a

مستقيم مقارب للمنحنى (c_f) موازي لمحور التراتيب

تطبيق: أحسب $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}$. أعط تفسير بياني لهذه النهاية

الحل: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}=+\infty$ (حسب المبرهنة 1) ونستنتج أن منحنى الدالة $\dfrac{1}{x^2}$ يقبل محور الفواصل مستقيم مقارب له

- ننطلق من وضعيات ذات دلالة تتعلق بالدوال المدروسة في السنة الثانية ثانوي، و نهتم فقط بدوال تكون مجموعة تعريفها معطاة أو سهلة التعيين.
- تدعيم مكتسبات التلاميذ حول مفهوم النهاية في وضعيات بسيطة (مثلا النهاية المنتهية عند عدد حقيقي x_0) وتوظيف ذلك في أمثلة بسيطة ثم توسع إلى وضعيات أخرى. ولتوضيح ذلك، نعتمد على تمثيلات بيانية باستعمال برمجيات مناسبة كالمجدولات .
- كما يمكن توظيف الحاسبة البيانية:
- بإزاحة النافذة نحو اليسار عندما يؤول x إلى $-\infty$.
- بإزاحة النافذة نحو اليمين عندما يؤول x إلى $+\infty$.
- بإنجاز تكبير للنافذة بجوار x_0 عندما يؤول x إلى x_0.
- وذلك لتخمين نهاية أو المصادقة عليها.
- تستغل هذه المناسبة للتذكير بالمستقيم المقارب الموازي لحامل محور الفواصل

المؤسســــــــة:	المستـــــــــوى: الثالثة علوم
السنة الدراسية:	ميـــدان التعلم: تحليل
التاريـــــــخ:	الوحدة التعلمية: النهايات
توقيت الحـصة :	موضوع الحصة : حساب نهاية دالة

المكتسبات القبلية توظيف دساتير التحويل المتعلقة بجيب التمام و بالجيب في حل مسائل مثلثية.

الأنشطة المقترحة	الإنجاز (ســير الحصة)	التعليمات والتوجيهات

2/2 :عمليات على النهايات

تمرين 01: أحسب النهايات :

$$\lim_{x \to +\infty} x ,\ \lim_{x \to -\infty} x ,\ \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x}$$

$$\lim_{x \to +\infty} x^2,\ \lim_{x \to -\infty} x^2,\ \lim_{x \to +\infty} x^3,\ \lim_{x \to -\infty} x^3$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x},\ \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x},\ \lim_{x \xrightarrow{<} 0} \frac{1}{x},\ \lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{1}{x}$$

أحسب النهايات: $\lim_{x \to +\infty}\left(\frac{2x^2+1}{3x-1}\right),\ \lim_{x \to -\infty}\left(x^2+3x+4\right),\ \lim_{x \to +\infty}\left(\sqrt{x}-1\right)$

الحل:

$$\lim_{x \to +\infty}\left(\frac{x^2\left(2+\frac{1}{x^2}\right)}{x\left(3-\frac{1}{x}\right)}\right)=+\infty,\ \lim_{x \to -\infty} x^2\left(1+\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}\right)=\lim_{x \to +\infty} x\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)=+\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} x=+\infty,\ \lim_{x \to -\infty} x=-\infty,\ \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x}=+\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} x^2=+\infty,\ \lim_{x \to -\infty} x^2=+\infty,\ \lim_{x \to +\infty} x^3=+\infty,\ \lim_{x \to -\infty} x^3=-\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x}=0,\ \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x}=0,\ \lim_{x \xrightarrow{<} 0} \frac{1}{x}=-\infty,\ \lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{1}{x}=+\infty$$

تعاريف: f , g دالتان. a يمثل عدد حقيقي او $-\infty,+\infty$ نقبل بدون برهان :

تعريف 01:

$\lim_{x\to a} f(x)$	$l\in\mathbb{R}$	$l\in\mathbb{R}$	$l\in\mathbb{R}$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x\to a} g(x)$	$l'\in\mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x\to a}\left(f(x)+g(x)\right)$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت	$-\infty$

مثال 01: $\lim_{x \to +\infty}\left(x^2+2x\right)=+\infty,\ \lim_{x \to +\infty}\left(\frac{2}{x^2}-1\right)=-1,\ \lim_{x \to +\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-2x\right)=-\infty$

تعريف 02:

$\lim_{x\to a} f(x)$	$l\in\mathbb{R}$	$l>0$	$l>0$	$l<0$	$l<0$
$\lim_{x\to a} g(x)$	$l'\in\mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x\to a}\left(f(x)\times g(x)\right)$	$l\times l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0	0
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت	ح ع ت

مثال 02: $\lim_{x \to +\infty}\left(X^2-1\right)\left(x+4\right)=\lim_{x \to +\infty}\left(X^3\right)\left(1+\frac{4}{x}\right)=,\ \lim_{x \to +\infty}\left(\sqrt{X}\right)\left(\sqrt{x^2-4}\right)=+\infty$

التعليمات والتوجيهات:

- نـنطلق من وضعيات ذات دلالة تتعلق بالدوال المدروسة في السنة الثانية ثانوي، و نهتم فقط بدوال تكون مجموعة تعريفها معطاة أو سهلة التعيين.
- تدعيم مكتسبات التلاميذ حول مفهوم النهاية في وضعيات بسيطة (مثلا النهاية المنتهية عند عدد حقيقي (x_0 وتوظيف ذلك في أمثلة بسيطة ثم توسع إلى وضعيات أخرى. ولتوضيح ذلك، نعتمد على تمثيلات بيانية باستعمال برمجيات مناسبة كالمجدولات .
- كما يمكن توظيف الحاسبة البيانية:
- بإزاحة النافذة نحو اليسار عندما يؤول x إلى $-\infty$.
- بإزاحة النافذة نحو اليمين عندما يؤول x إلى $+\infty$.
- بإنجاز تكبير للنافذة بجوار x_0 عندما يؤول x إلى x_0 .
- وذلك لتخمين نهاية أو المصادقة عليها. تستغل هذه المناسبة للتذكير بالمستقيم المقارب الموازي لحامل محور الفواصل تعطى المبرهنات الشهيرة

المتعلقة بمجموع و جداء وحاصل قسمة نهايتين دون برهان.(يمكن أن يقدم برهانا عن حالة بسيطة).

تعريف 03:

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$l\in\mathbb{R}$	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$l'\in\mathbb{R}^*$	$+\infty$	$-\infty$	$l'>0$	$l'<0$	$l'>0$	$l'<0$	
$\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)$	$\dfrac{l}{l'}$	0	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	
				0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
				0	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
				ح ع ت	ح ع ت	ح ع ت	ح ع ت	ح ع ت

مثال03: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{\sqrt{X}}{x}\right)=0,\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{X^3+1}{x^2}\right)=+\infty,\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{-X^2+5}{x+2}\right)=-\infty$

قاعدة 01: النهاية عند $+\infty$ او عند $-\infty$ لدالة كثير حدود هي نهاية حدها الأعلى درجة عند $+\infty$ اوعند $-\infty$.

مثال 04:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(7x^3-2x^2+3\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(7x^3\right)=+\infty,$$
$$\lim_{x\to+\infty}\left(3x+1-2x^2\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(-2x^2\right)=-\infty$$

تعريف 05:

** النهاية عند $+\infty$ او عند $-\infty$ لدالة ناطقة هي نهاية حاصل قسمة الحدين الأعلى درجة عند $+\infty$ او عند $-\infty$

مثال 05:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x}{\left(X^2-1\right)^2}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{x^4}=0,\ \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x+1}{3-x}\right)$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{-x}=-1,\ \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2}{x+1}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}=0$$

4/نهاية بعض الدوال المالوفة

الدالة كثير حدود

مبرهنة: نهاية دالة كثير حدود عند $+\infty$ أو $-\infty$. هي نهاية الحد الأعلى درجة

الدالة الناطقة

مبرهنة: نهاية دالة ناطقة عند $+\infty$ أو $-\infty$. هي نهاية حاصل قسمة الحد الأعلى درجة في البسط على الحد الاعلى درجة في المقام

نهاية دالة كثير حدود عند $+\infty$ أو $-\infty$. هي نهاية الحد الأعلى درجة

الدالة الجذر التربيعي

مبرهنة: f دالة موجبة و l عدد حقيقيموجب

اذاكان $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ فان $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{f(x)}=+\infty$

اذاكان $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$ فان $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{f(x)}=\sqrt{l}$

2/2 :ازالة حالة عدم التعيين

1. بأستعمال الأختزال

تمرين نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{-2;1\}$ بِ $f(x)=\dfrac{x^3+2x^2+x+2}{x^2+x-2}$

1). أحسب $\lim\limits_{x\to-2}(x^3+2x^2+x+2)$ و $\lim\limits_{x\to-2}(x^2+x-2)$. هل يمكن استنتاج نهاية الدالة f عند -2 ؟

2). قم بتحليل كل من x^3+2x^2+x+2 و x^2+x-2 .

3). بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{-2;1\}$ ، $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x-1}$.

4). استنتج نهاية الدالة f عند -2.

تطبيق: أدرس النهاية عند 1 للدالة g المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بِ $g(x)=\dfrac{x^3-1}{x^2-2x+1}$.

الحل

1.] $\lim\limits_{x\to-2}(x^3+2x^2+x+2)=0$ و $\lim\limits_{x\to-2}(x^2+x-2)=0$ لايمكن استنتاج النهاية لوجود حالة عدم التعيين من الشكل $0/0$

2.] لدينا $x^3+2x^2+x+2=(x+2)(x^2+1)$ و $x^2+x-2=(x-1)(x+2)$

3.] ومنه يصبح $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x-1}$ اي ان $\lim\limits_{x\to-2}f(x)=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2+1}{x-1}=-\dfrac{5}{3}$

4.] نقول اننا ازلنا حالة عدم التعيين باستعمال الاختزال

2. باستعمال التحليل

تمرين نعتبر الدالة f المعرفة على $[1;+\infty[$ بِ $f(x)=2x+1-\sqrt{x^2+x-2}$

1.] هل يمكن تعيين نهاية الدالة f عند $+\infty$ مباشرة ؟ لماذا ؟

2.] بين أنه من أجل كل x من $]1;+\infty[$ ، $f(x)=x\left(2+\dfrac{1}{x}-\sqrt{1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}}\right)$.

3.] استنتج نهاية الدالة f عند $+\infty$.

تطبيق: أدرس النهاية عند $+\infty$ للدالة g المعرفة على $[0;+\infty[$ بِ $g(x)=x+2-\sqrt{x}$.

الحل : $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}2x+1-\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x^2+x-2}=+\infty-\infty$ حالة عدم التعيين

نستخرج العامل المشترك نجد $f(x)=x\left(2+\dfrac{1}{x}-\sqrt{1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}}\right)$

ومنه

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}x\left(2+\frac{1}{x}-\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}\right)$$

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}x\times\lim_{x\to\infty}2+\frac{1}{x}-\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}=+\infty\times2=+\infty$$

ازلنا هنا حالة عدم التعيين باستعمال التحليل

3. باستعمال المرافق

نعتبر الدالة f المعرفة على $[2;+\infty[$ بِ $f(x)=\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-2x}$

1.] تحقق أن لدينا حالة عدم التعيين لما يؤول x إلى $+\infty$.

2.] بين أنه من أجل كل x من $[2;+\infty[$.

$$f(x)=\left[2+(1/x)\right]/\left[\sqrt{1+(1/x)}+\sqrt{1-(2/x)}\right]$$

3.] استنتج نهاية الدالة f عند $+\infty$.

تطبيق: أدرس النهاية عند $-\infty$ للدالة g المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ $g(x)=x+2+\sqrt{x^2+x}$.

الحل:

1.] $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}-\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-2x}=+\infty-\infty$ حالة عدم التعيين

2.] نضرب ونقسم على نفس العدد $\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-2x}$ نجد

$f(x)=(1+2x)/\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-2x}\right)$ نستخرج x من البسط والمقام نجد

$f(x)=x\left(1/x+2\right)/\left(\sqrt{x^2\left(1+1/x^2\right)}+\sqrt{x^2\left(1-2/x\right)}\right)$ ومنه بالاختزال نجد

$$f(x)=\left[2+(1/x)\right]/\left[\sqrt{1+(1/x)}+\sqrt{1-(2/x)}\right]$$

3.] $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[2+(1/x)\right]/\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{1+(1/x)}+\sqrt{1-(2/x)}\right]=2$

ازلنا حالة عدم التعيين باستعمال الضرب في المرافق

4. باستعمال العدد المشتق

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ $f(x)=\dfrac{\cos x-1}{x}$

1). هل يمكن تعيين نهاية الدالة f عند 0 مباشرة ؟ لماذا ؟

2). باستعمال تعريف العدد المشتق عند 0 للدالة $x\mapsto\cos x$ عين نهاية الدالة f عند 0.

تطبيق: أدرس النهاية عند 0 للدالة g المعرفة على $[-1;0[\cup]0;+\infty[$ بـ $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}$

الحل:

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\dfrac{\lim_{x\to+\infty}(\cos x-1)}{\lim_{x\to+\infty} x}=?$ لا ن $\lim_{x\to+\infty}(\cos x-1)$ غير معروفة

العدد المشتق يعني ان $\lim_{x\to x_0} f(x)=h'(x_0)=\dfrac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0}$

يمكن اعتبار الكتابة $\dfrac{\cos x-1}{x}$ من الشكل $\dfrac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0}$ وذلك بوضع فقط $h(x)=\cos x$ و

$x_0=0$ ومنه $h(0)=\cos 0=1$ اذن يكفي ان نقوم بوضع $h'(x)=(\cos x)'=-\sin x$

ومنه $h'(0)=-\sin 0=0$

وبالتالي $\lim_{x\to0} f(x)=\lim_{x\to0}\dfrac{\cos x-1}{x}=0$

هنا تخلصنا من حالة عدم التعيين باستعمال العدد المشتق

المؤسسة:		المستوى:	الثالثة علوم
السنة الدراسية:		ميدان التعلم:	تحليل
التاريخ:		الوحدة التعلمية:	النهايات
توقيت الحصة :		موضوع الحصة :	حساب نهاية دالة باستعمال المبرهنات

المكتسبات القبلية حساب نهاية باستعمال المبرهنات المتعلقة بالعمليات على النهايات أو المقارنة وتركيب دالتين.

الأنشطة المقترحة وطبيعتها	الإنجاز (سير الحصة)	التعليمات والتوجيهات

نشاط

تمرين 01: لتكن f الدالة المعرفة على : $\left]-\infty,-2\right[\cup\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$ ب: $f(x)=\sqrt{\frac{2x-1}{x+2}}$

أدرس نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة التعريف.

الحل: ** بما أن $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{2x-1}{x+2}\right)=2$ و $\lim\limits_{x\to2}\sqrt{x}=\sqrt{2}$ فإن $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\sqrt{2}$ نجد كذلك

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\sqrt{2}$

** بما أن $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}-2}\left(\frac{2x-1}{x+2}\right)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$ فإن $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}-2}f(x)=+\infty$

** بما أن $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}\frac{1}{2}}\left(\frac{2x-1}{x+2}\right)=0$ و $\lim\limits_{x\to0}\sqrt{x}=0$ فإن $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}\frac{1}{2}}f(x)=0$

تمرين 02: لتكن f الدالة المعرفة على: R^* ب: $f(x)=1+\frac{\cos x}{x^2}$

أثبت أن من أجل كل x من R^* : $1-\frac{1}{x^2}\leq f(x)\leq1+\frac{1}{x^2}$

استنتج نهايتي الدالة f عند $+\infty,-\infty$

الحل: نعلم أنه من أجل كل x من R^* : $-1\leq\cos x\leq1$ ومنه من أجل كل x من R^* :

$-\frac{1}{x^2}\leq\frac{\cos x}{x^2}\leq\frac{1}{x^2}$ وبالتالي من أجل كل x من R^* : $1-\frac{1}{x^2}\leq\frac{\cos x}{x^2}+1\leq1+\frac{1}{x^2}$ أي

من أجل كل x من R^* : $1-\frac{1}{x^2}\leq f(x)\leq1+\frac{1}{x^2}$

-1 بما أن $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)=\lim\limits_{|x|\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=1$ فإن :

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=1,\ \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$

تمرين 03: لتكن f الدالة المعرفة على : R ب: $f(x)=\frac{x}{2+\sin x}$

1-أثبت أن من أجل كل x من R : $\frac{1}{3}\leq\frac{f(x)}{x}\leq1$

2- استنتج نهايتي الدالة f عند $+\infty,-\infty$

الحل: 1-نعلم أنه من أجل كل x من R : $-1\leq\sin x\leq1$ ومنه من أجل كل x من R :

$1\leq1+\sin x\leq3$ أي من أجل كل x من R : $\frac{1}{3}\leq\frac{f(x)}{x}\leq1$

2- لدينا : $\frac{1}{3}\leq\frac{f(x)}{x}$ ومنه من أجل كل x من $[0,+\infty[$ $\frac{x}{3}\leq f(x)$ وبما أن

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{3}=+\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

لدينا : $\frac{1}{3}\leq\frac{f(x)}{x}$ ومنه من أجل كل x من $]-\infty,0]$ $f(x)\leq\frac{x}{3}$ وبما أن $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{3}=-\infty$

فإن $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$

التعليمات والتوجيهات:

- تعطى المبرهنات الشهيرة المتعلقة بمجموع و جداء وحاصل قسمة نهايتين دون برهان.(يمكن أن يقدم برهانا عن حالة بسيطة).
- تعطى مبرهنات الحصر (نهاية منتهية، غير منتهية. وكذا المبرهنة التي تربط الترتيب بين دالتين والترتيب بين نهايتين).

حساب نهاية دالة مركبة $g\,o\,f$ يطبق في الحالة التي تكون فيها g دالة مألوفة.

3/نهاية دالة مركب-النهاية بالمقارنة

1.3 نهاية دالة مركب

مبرهنة: a، b و c تمثل أعدادا حقيقية أو $+\infty$ أو $-\infty$. u ، v و f دوال حيث $f=v\circ u$.

إذا كانت $\lim\limits_{x\to a} u(x)=b$ و إذا كانت $\lim\limits_{x\to b} v(x)=c$ فإن $\lim\limits_{x\to a} f(x)=c$

مثال: نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $\mathbb{R}^*$ بِ $f(x)=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{1}{x}\right)$ و نريد حساب

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ نلاحظ أن f هي مركب الدالتين u و v بهذا الترتيب حيث $u(x)=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{1}{x}$ و

$v(x)=\sin x$ (بما أن $f=v\circ u$) $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)=\dfrac{\pi}{2}$ و $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} v(x)=1$ فإن

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$

مثال 01: أحسب النهاية: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ حيث $f(x)=\left(\sqrt{\dfrac{1}{x^2+2x}}\right)$

نلاحظ أن f مركب دالتين : $u(x)=\dfrac{1}{x^2+2x}$ و $v(x)=\sqrt{x}$

وبما أن $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)=0$ و $\lim\limits_{x\to 0} v(x)=0$ فإن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

2.3 النهاية بالمقارنة

مبرهنة 02:

f, g, h دوال و l عدد حقيقي إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=l$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=l$ ومن اجل x كبير بالقدر الكافي $g(x)\le f(x)\le h(x)$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l$

ملاحظة يمكن تمديد المبرهنة الى حالة $-\infty$ و عند عدد حقيقي .

مثال: تمرين تطبيقي:

لتكن f الدالة المعرفة على $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ بِ : $f(x)=\dfrac{1-2\sin x}{x^2}$

1) بين أنه من أجل كل x من $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$: $-\dfrac{1}{x^2}\le f(x)\le\dfrac{3}{x^2}$

2) استنتج نهاية الدالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

الحل:

1) من أجل كل x من $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$: $-1\le\sin x\le 1$

ومنه $-2\le -2\sin x\le 2$

ومنه $-1\le 1-2\sin x\le 3$

إذن $-\dfrac{1}{x^2}\le\dfrac{1-2\sin x}{x^2}\le\dfrac{3}{x^2}$

وبالتالي $-\dfrac{1}{x^2}\le f(x)\le\dfrac{3}{x^2}$

2) من أجل كل x من $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ ، لدينا: $-\dfrac{1}{x^2}\le f(x)\le\dfrac{3}{x^2}$

بماأن $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)=0$

و $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3}{x^2}\right)=0$ فإن $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$

بماأن $\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=0$ و $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{x^2}\right)=0$ فإن $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$

مثال 02:من اجل كل x من R لدينا : $-\frac{1}{x}\le\frac{\sin x}{x}\le+\frac{1}{x}$ ومنه $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x}=0$

مبرهنة 03:

$f\,,g$ دوال و l عدد حقيقي إذا كانت $\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ ومن اجل x كبير بالقدر الكافي

$g(x)\le f(x)$ فإن $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

ملاحظة يمكن تمديد المبرهنة الى حالة $-\infty$ و عند عدد حقيقي .

تمرين تطبيقي:

لتكن f الدالة المعرفة من أجل كل عدد حقيقي x حيث $x>3$ بـ : $f(x)=\frac{2x}{\sqrt{x+3}}$

1) بين أنه إذا كان $x>3$ فإن $\frac{1}{\sqrt{2x}}>\frac{1}{\sqrt{x+3}}$:

2) استنتج نهاية الدالة f عند $+\infty$.

الحل:

1) لدينا $x>3$ ومنه $x+x>x+3$ أي $2x>x+3$.

وبالتالي $\sqrt{2x}>\sqrt{x+3}$

إذن: $\frac{1}{\sqrt{2x}}>\frac{1}{\sqrt{x+3}}$

2) من أجل $x>3$ لدينا $\frac{1}{\sqrt{2x}}>\frac{1}{\sqrt{x+3}}$.

ومنه: $\frac{2x}{\sqrt{2x}}>\frac{2x}{\sqrt{x+3}}$

إذن: $f(x)>\sqrt{2x}$

وبماأن : $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{2x}=+\infty$ إذن $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

مبرهنة 04:

$f\,,g$ دوال و l عدد حقيقي إذا كانت $\lim_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$ ومن اجل x كبير بالقدر الكافي

$f(x)\le g(x)$ فإن $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

ملاحظة يمكن تمديد المبرهنة الى حالة $-\infty$ و عند عدد حقيقي

تمرين تطبيقي:

1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x يكون: $3\cos x-2x\le 3-2x$

2) أحسب $\lim_{x\to+\infty}(3\cos x-2x)$.

الحل:

1) لدينا من أجل كل عدد حقيقي x ، $\cos x\le 1$

ومنه من أجل كل x من R، $3\cos x\le 3$

وبالتالي من أجل كل عدد حقيقي x ، $3\cos x-2x\le 3-2x$

2) لدينا من أجل كل x من R، $3\cos x-2x\le 3-2x$

	ومنه من أجل كل x كبير بالقدر الكافي : $3\cos x-2x\leq 3-2x$ وبماأن $\lim\limits_{x\to+\infty}(3-2x)=-\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}(3\cos x-2x)=-\infty$ **<u>مثال03:</u>** من اجل كل x من R لدينا : $x-1\leq\sin x+x$ ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin x+x)=+\infty$ من اجل كل x من R لدينا : $\sin x+x\leq x+1$ ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sin x+x)=-\infty$ **<u>تمرين رقم 30 الصفحة 28</u>** **<u>تمرين رقم : 33 صفحة : 28</u>** **<u>تمرين رقم : 38 صفحة : 29</u>**	