المؤسسة: سليماني جلول   الأستاذ: بلبحري كمال   المادة : رياضيات
المستوى و الشعبة : الثالثة علوم تجريبية
المحتوى المعرفي : النهايات
الكفاءات المستهدفة: - حساب نهاية منتهية أو غير منتهية لدالة .

- سير الحصة

المراحل	السير (الأنشطة المرافقة لكل مرحلة)	المدة	ملاحظات
الإنطلاق:	⋆ التهيئة النفسية: التذكير بمفهوم النهاية . نهاية منتهية أو غير منتهية لدالة عند $+\infty$ أو $-\infty$: ❶ نهاية منتهية عند $+\infty$ أو $-\infty$: **تعريف:** f دالة معرفة على مجال من الشكل $]x_0;+\infty[$ و l عدد حقيقي. القول أن نهاية f عند $+\infty$ هي l يعني أن كل مجال مفتوح شامل للعدد l يشمل كل القيم $f(x)$ من أجل x كبير بالقدر الكافي. نكتب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l$ و نقرأ $f(x)$ يؤول إلى l لما x يؤول إلى $+\infty$.	15 د	
بناء المفاهيم:	**ملاحظة:** نحصل على تعريف و نتيجة مماثلتين عند $-\infty$. **أمثلة:** $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}=0$ $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x}=0$ المستقيم المقارب الأفقي : **نتيجة:** نقول أن المستقيم ذا المعادلة $y=l$ مستقيم مقارب أفقي للمنحنى (C_f) الممثل للدالة f عند $+\infty$ أو عند $-\infty$ تمرين تطبيقي : لتكن f الدالة المعرفة على المجال $]2;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{5}{x-2}$. أثبت بإستعمال التعريف أن: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$. الحل : ليكن $I=]a;b[$ حيث $a<0<b$ ، I (مجال مفتوح يشمل 0) . من أجل x من المجال $]2;+\infty[$ ، يكون لدينا $x-2>0$ $f(x)\in I$ يعني أن $a<\frac{5}{x-2}$ و $\frac{5}{x-2}<b$ أي أن : $5>ax-2a$ و $5<bx-2b$ و منه : $ax<5+2a$ و $bx>5+2b$ و منه : $x>\frac{5+2a}{a}$ و $x>\frac{5+2b}{b}$ إذن $x>2+\frac{5}{a}$ و $x>2+\frac{5}{b}$ و بالتالي : $x>2+\frac{5}{b}$ نستنتج أنه من أجل كل x كبير بالقدر الكافي $(x>2+\frac{5}{b})$ ، المجال I يشمل كل قيم $f(x)$ إذن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.	15 د	مناقشة التمرين من طرف التلاميذ

المراحل	السير (الأنشطة المرافقة لكل مرحلة)	المدة	ملاحظات

❷ نهاية غير منتهية عند $+\infty$ أو $-\infty$:-

تعريف«①»: f دالة معرفة على مجال من الشكل $[x_0;+\infty[$.
القول إن نهاية f عند $+\infty$ هي $+\infty$ يعني أن كل مجال من الشكل $]A;+\infty[$ ، $(A \in \mathbb{R})$ يشمل كل قيم $f(x)$ من أجل x كبير بالقدر الكافي .
نكتب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ و نقرأ $f(x)$ يؤول إلى $+\infty$ لما x يؤول إلى $+\infty$

15 د

تعريف«②»: f دالة معرفة على مجال من الشكل $[x_0;+\infty[$.
القول إن نهاية f عند $+\infty$ هي $-\infty$ يعني أن كل مجال من الشكل $]-\infty;B[$ ، $(B \in \mathbb{R})$ يشمل كل قيم $f(x)$ من أجل x كبير بالقدر الكافي .
نكتب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ و نقرأ $f(x)$ يؤول إلى $-\infty$ لما x يؤول إلى $+\infty$.

بناء المفاهيم:

ملاحظة: نحصل على تعريفين مماثلتين عند $-\infty$.

أمثلة:

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$

تمرين تطبيقي : f دالة معرفة على $]3;+\infty[$ بـ: $f(x) = \sqrt{2x-6}$
⋆ أثبت بإستعمال التعريف أن: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

الحل : ليكن a عددا حقيقيا موجبا.

15 د

من أجل x من المجال $]3;+\infty[$ ، يكون لدينا: $2x-6 \geq 0$.
$f(x) \in [A;+\infty[$ يعني : $\sqrt{2x-6} \geq A$ أي : $2x-6 \geq A^2$.
و منه : $2x \geq 6 + A^2$ إذن : $x \geq 3 + \frac{A^2}{2}$.
نستنتج أنه من أجل كل x كبير بالقدر الكافي $(x \geq 3 + \frac{A^2}{2})$ ، المجال $[A;+\infty[$ يشمل كل قيم $f(x)$ إذن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

المراحل	السير (الأنشطة المرافقة لكل مرحلة)	المدة	ملاحظات

بناء المفاهيم:

③ المستقيم المقارب المائل:

تعريف:
ليكن (C_f) التمثيل البياني لدالة f في معلم و ليكن (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = ax + b$.
القول إن المستقيم (Δ) مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) عند $+\infty$ ، (على الترتيب عند $-\infty$) يعني أن: $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$
(على الترتيب $\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$) .

15 د

ملاحظة: إذا كانت الدالة f معرفة كما يلي: $f(x) = ax + b + \varphi(x)$
مع : $\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=0$ أو $\lim_{x\to-\infty}\varphi(x)=0$ ، فمن الواضح أن المستقيم ذا المعادلة $y = ax + b$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى المثل للدالة f عند $+\infty$ أو $-\infty$.

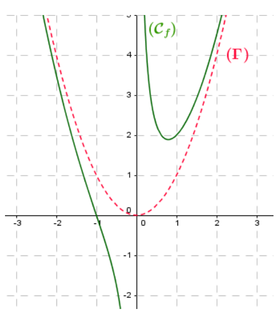
مثال: لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $f(x) = 3x - 4 + \frac{1}{x}$ ، و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم .
لدينا $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ و $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$ و منه فالمستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = 3x - 4$ مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) .

المنحنى المقارب :

10 د

$\star$ نقول إن المنحنى $(\mathscr{C}_g)$ المثل للدالة g مقارب لـ $(\mathscr{C}_f)$ منحنى الدالة f عند $\pm\infty$ ، يعني أن: $\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-g(x)]=0$

مثال:



f دالة معرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ : $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x}$
لدينا : $\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-x^2]=0$
و منه : المنحنى المثل للدالة مربع مقارب لمنحنى الدالة f عند $\pm\infty$

تقويم

حل التمرين 06و 07 صفحة 26

35 د

ملاحظات عامة حول الحصة: ....

المؤسسة:سليماني جلول　　الأستاذ:بلبحري كمال　　المادة : رياضيات

المستوى والشعبة : الثالثة علوم تجريبية

المحتوى المعرفي : النهايات

الكفاءات المستهدفة: – حساب نهاية منتهية أو غير منتهية لدالة .

– سير الحصة

<table>
<tr><th>المراحل</th><th>التسيير (الأنشطة المرافقة لكل مرحلة)</th><th>المدة</th><th>ملاحظات</th></tr>
<tr><td>الإنطلاق:

بناء المفاهيم:</td><td>⋆ التهيئة النفسية:
نشاط:
لتكن f الدالة المعرفة على المجال $]2;+\infty[$ بـ: $f(x)=(x-2)^2+3$.
نريد دراسة سلوك $f(x)$ عندما x يؤول إلى 3 .
① ضع تخمينا.
② في أي مجال يجب إختيار x بحيث ينتمي $f(x)$ إلى المجال $[3.99;4.01]$ ؟.
③ r عدد حقيقي بحيث $0<r<1$.
✦ في أي مجال يجب إختيار x بحيث $f(x)\in[4-r;4+r]$.
✦ ماذا نستنتج علما أنه يمكن إختيار r صغيرا بالقدر الذي نريد؟.
مناقشة النشاط:
① يبدو أنه كلما إقترب x من 3 ، إقترب $f(x)$ من $(3-2)^2+3$ أي من 4
② $f(x)\in[3.99;4.01]$ يعني $3.99\leq f(x)\leq 4.01$
أي : $3.99\leq(x-2)^2+3\leq 4.01$ و منه : $0.99\leq(x-2)^2\leq 1.01$
و منه : $0.99\leq x-2\leq 1.004$ و بالتالي : $2.99\leq x\leq 3.004$ إذن : $x\in[2.99;3.004]$
✦ $f(x)\in[4-r;4+r]$ يعني أن $4-r\leq f(x)\leq 4+r$.
أي $4-r\leq(x-2)^2+3\leq 4+r$ و منه : $1-r\leq(x-2)^2\leq 1+r$
و منه $\sqrt{1-r}\leq x-2\leq\sqrt{1+r}$ و بالتالي : $\sqrt{1-r}+2\leq x\leq\sqrt{1+r}+2$
إذن : $x\in[\sqrt{1-r}+2;\sqrt{1+r}+2]$
✦ عندما نختار r صغيرا بالقدر الذي نريد، يكون x قريبا من 3 بالقدر الكافي
و بالتالي يكون $f(x)$ قريبا من 4 بالقدر الذي نريد و بالتالي أثبتنا أن : $\lim_{x\to 3}f(x)=4$
نهاية منتهيةأو غير منتهية لدالة عند عدد حقيقي :
❶ نهاية منتهية عند عدد حقيقي :
تعريف:
f دالة معرفة على مجموعة من الشكل $]a;x_0[\cup]x_0;b[$ و l عدد حقيقي.
القول أن نهاية f عند x_0 هي l يعني أن كل مجال مفتوح شامل للعدد l يشمل كل القيم $f(x)$ من أجل x قريب بالقدر الكافي من x_0 . نكتب $\lim_{x\to x_0}f(x)=l$ و نقرأ $f(x)$ يؤول إلى l لما x يؤول إلى x_0 .
تطبيق (ت 12ص 26):</td><td>15 د

15 د</td><td>مناقشة النشاط من طرف التلاميذ</td></tr>
</table>

المراحل	التسيير (الأنشطة المرافقة لكل مرحلة)	المدة	ملاحظات
	❷ نهاية غير منتهية عند عدد حقيقي : **تعريف «①»:** f دالة معرفة على مجموعة من الشكل $]a;x_0[\cup]x_0;b[$. القول أن نهاية f عند x_0 هي $+\infty$ يعني أن كل مجال من الشكل $]A;+\infty[$ $(A\in\mathbb{R})$ يشمل كل القيم $f(x)$ من أجل x قريب بالقدر الكافي من x_0 . نكتب $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ و نقرأ $f(x)$ يؤول إلى $+\infty$ لما x يؤول إلى x_0 . **مثال:** لتكن f الدالة المعرفة على $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\frac{1}{x^2}$. عندما يقترب x من 0 بالقدر الكافي، تأخذ $f(x)$ قيما كبيرة بالقدر الذي نريد، عندئذ يكون لدينا: $$\lim_{x\to 0} f(x)=+\infty$$ المستقيم المقارب العمودي : **نتيجة:** ليكن (C_f) التمثيل البياني لدالة f في معلم و ليكن (Δ) المستقيم الذي معادلته $x=a$. القول إن المستقيم (Δ) مستقيم مقارب عمودي للمنحني (C_f) يعني أن نهاية الدالة f عند a (من اليسار أو من اليمين) هي $+\infty$ أو $-\infty$.	15 د	
	تمرين تطبيقي : أثبت باستعمال التعريف أن : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2+1}{x^2}=+\infty$ **الحل :** لدينا : $\frac{x^2+1}{x^2}\geq A$ ومنه: $x^2+1\geq Ax^2$ ومنه: $x^2(A-1)\leq 1$ إذن : $x^2\leq\frac{1}{A-1}$ و بالتالي : $-\frac{1}{\sqrt{A-1}}\leq x\leq\frac{1}{\sqrt{A-1}}$ يمكن أخذ A كبيرا بالقدر الذي نريد يمكننا جعل $f(x)$ كبيرا بالقدر الذي نريد بشرط أخذ x قريبا من 0 بالقدر الكافي و هذا يثبت أن : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2+1}{x^2}=+\infty$	15 د	
تقويم	حل التمرين 13 و 14 و 16 صفحة 27		

ملاحظات عامة حول الحصة: ....

المؤسسة: سليماني جلول   الأستاذ: بلبحري كمال   المادة : رياضيات
المستوى و الشعبة : الثالثة علوم تجريبية
المحتوى المعرفي : النهايات
الكفاءات المستهدفة: - حساب نهاية منتهية أو غير منتهية لدالة .

- سير الحصة

المراحل	التسير (الأنشطة المرافقة لكل مرحلة)	المدة	ملاحظات
الإنطلاق:	⋆ التهيئة النفسية: تذكير على النهايات : ❶ بعض نهايات الدوال المرجعية : $\lim_{x\to+\infty} x=+\infty$ $\quad \lim_{x\to-\infty} x=-\infty$ $\quad \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}=+\infty.$ $\lim_{x\to+\infty} x^2=+\infty$ $\quad \lim_{x\to-\infty} x^2=+\infty$ $\quad \lim_{x\to+\infty} x^3=+\infty$ $\lim_{x\to-\infty} x^3=-\infty$ $\quad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}=0$ $\quad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x}=0$ $\lim_{\substack{x\to 0\\>}} \frac{1}{x}=+\infty$ $\quad \lim_{\substack{x\to 0\\<}} \frac{1}{x}=-\infty$	10 د	التذكير بنهايات الدوال المرجعية
بناء المفاهيم:	❷ العمليات على النهايات : f و g دالتان a يمثل عدد حقيقي أو $+\infty$ أو $-\infty$ ، نقبل دون برهان المبرهنات التالية. • **نهاية مجموع دالتين** • **نهاية جداء دالتين** • **نهاية حاصل قسمة دالتين** أنقل الجداول الثلاث من الكتاب المدرسي صفحة 12 أمثلة: ① $\lim_{x\to\frac{1}{3}} \frac{x-2}{3x-1}=?$ ② $\lim_{x\to 0} \frac{x^2-3}{\sqrt{x}}=?$ ملاحظة: تسمى الحالات التي لا تسمح فيها النظريات السابقة من إستنتاج النهاية بحالات عدم التعيين. **حالات عدم التعيين** : حالات عدم التعيين هي : $+\infty-\infty$ $\quad \frac{\infty}{\infty}$ $\quad 0\times\infty$ $\quad \frac{0}{0}$ ❸ نهاية دالة كثير حدود أو دالة ناطقة عند $+\infty$ أو $-\infty$: **قواعد إجرائية :** ✍ النهاية عند $+\infty$ و عند $-\infty$ لدالة كثير حدود هي نهاية حدها الأعلى درجة عند $+\infty$ $(-\infty)$. ✍ النهاية عند $+\infty$ و عند $-\infty$ لدالة ناطقة هي نهاية حاصل قسمة الحدين الأعلى درجة عند $+\infty$ $(-\infty)$. أمثلة: ① $\lim_{x\to-\infty} -2x^2+4x-5=\lim_{x\to-\infty} -2x^2=-\infty$	15 د	
تقويم	② $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3-x+2}{3-x}=\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{-x}=\lim_{x\to-\infty} -x^2=-\infty$ حل التمرين 19 و 20 و 22 صفحة 27	35 د	

ملاحظات عامة حول الحصة: ....

المؤسسة: سليماني جلول — الأستاذ: بلبحري كمال — المادة : رياضيات

المستوى و الشعبة : الثالثة علوم تجريبية

المحتوى المعرفي : النهايات

الكفاءات المستهدفة: – حساب النهايات باستعمال المبرهنات المتعلقة بتركيب دالتين و المقارنة .

– سير الحصة

المراحل	التسيير (الأنشطة المرافقة لكل مرحلة)	المدة	ملاحظات
الإنطلاق:	⋆ التهيئة النفسية: التذكير بمفهوم مركب دالتين .		
بناء المفاهيم:	**نهاية دالة مركبة - النهايات بالمقارنة :** ❶ نهاية دالة مركبة : **مبرهنة:** c و b, a تمثل أعداد حقيقية أو $+\infty$ أو $-\infty$. v, u و f دوال حيث $f = vou$ إذا كانت $\lim\limits_{x\to a} u(x) = b$ و إذا كانت $\lim\limits_{x\to b} v(x) = c$ فإن : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = c$ **مثال:** لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $f(x) = 3\left(1 - \frac{4}{x}\right)^2 + 2$ نريد حساب نهاية الدالة f عند $-\infty$ و $+\infty$ الدالة f هي مركب الدالتين u و v بهذا الترتيب أي $f = vou$ حيث: $u(x) = 1 - \frac{4}{x}$ و $v(x) = 3x^2 + 2$. ✦ بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = 1$ و $\lim\limits_{x\to 1} v(x) = 5$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 5$. ✦ بما أن $\lim\limits_{x\to-\infty} u(x) = 1$ و $\lim\limits_{x\to 1} v(x) = 5$ فإن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 5$. ❷ النهايات بالمقارنة : **مبرهنة «①»:** g, f و h دوال و l عدد حقيقي. إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = l$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = l$ و إذا كان من أجل x كبير بالقدر الكافي $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ فإن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$ **مثال:** لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ نعلم أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $-1 \leq \sin x \leq 1$ و منه فإن من أجل كل x من $]0; +\infty[$ لدينا : $-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$ و بما أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(-\frac{1}{x}\right) = 0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0$ فإن : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ **مبرهنة «②»:** g, f دالتان و l عدد حقيقي. إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ و إذا كان من أجل x كبير بالقدر الكافي $f(x) \geq g(x)$ فإن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ **مبرهنة «③»:** g, f دالتان و l عدد حقيقي. إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ و إذا كان من أجل x كبير بالقدر الكافي $f(x) \leq g(x)$ فإن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ **ملاحظة:** تمدد هذه المبرهنات إلى حالتي النهاية عند $-\infty$ و عند عدد حقيقي .	15 د 15 د	

المراحل	التسيير (الأنشطة المرافقة لكل مرحلة)	المدة	ملاحظات

مثال :

لنعين النهاية عند $+\infty$ للدالة f المعرفة بـ : $f(x) = x^2 + 2cosx$

لدينا : $x^2 - 2 \leq f(x)$ و بما أن: $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-2) = +\infty$ فإن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

تمرين تطبيقي «①» :

لتكن f الدالة المعرفة على $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ بـ: $f(x) = \dfrac{1-2\sin x}{x^2}$.

① بين أنه من أجل كل x من $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$:

$$-\frac{1}{x^2} \leq f(x) \leq \frac{1}{x^2}$$

② إستنتج نهاية f عند $-\infty$ و عند $+\infty$

الحل :

① من أجل كل x من $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$: $-1 \leq \sin x \leq 1$.

و منه : $-2 \leq -2\sin x \leq 2$ و منه : $-1 \leq 1-2\sin x \leq 3$

إذن :

15 د

$$-\frac{1}{x^2} \leq \frac{1-2\sin x}{x^2} \leq \frac{3}{x^2}$$

و بالتالي :

$$-\frac{1}{x^2} \leq f(x) \leq \frac{3}{x^2}$$

مناقشة التمرين من طرف التلاميذ

② من أجل كل x من $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ لدينا: $-\frac{1}{x^2} \leq f(x) \leq \frac{3}{x^2}$

- بما أن : $\lim\limits_{x\to-\infty}(-\frac{1}{x^2}) = 0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}(-\frac{1}{x^2}) = 0$ فإن : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$
- بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}(-\frac{1}{x^2}) = 0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(-\frac{1}{x^2}) = 0$ فإن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

تمرين تطبيقي «②» :

لتكن f الدالة المعرفة من أجل كل عدد حقيقي x حيث $x > 3$ بـ: $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x+3}}$.

① بين أنه من أجل كل $x > 3$ فإن:

$$\frac{1}{\sqrt{x+3}} > \frac{1}{\sqrt{2x}}.$$

② إستنتج نهاية f عند $+\infty$

15 د

الحل :

① لدينا : $x > 3$ و منه : $x + x > x + 3$ أي : $2x > x + 3$ و بالتالي : $\sqrt{2x} > \sqrt{x+3}$

إذن :

$$\frac{1}{\sqrt{x+3}} > \frac{1}{\sqrt{2x}}$$

② من أجل $x > 3$ لدينا : $\frac{1}{\sqrt{x+3}} > \frac{1}{\sqrt{2x}}$ و منه : $\frac{2x}{\sqrt{x+3}} > \frac{2x}{\sqrt{2x}}$

إذن : $f(x) > \sqrt{2x}$

و بما أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{2x} = +\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

تقويم

حل التمرين 36 و 37 صفحة 28

حل التمرين 38 و 41 صفحة 29

ملاحظات عامة حول الحصة: ....