مذكرات دروس السنة الثالثة ثانوي

الأستـاذ:

معزوز ميـــلود أستاذ تعليم ثانوي

تم رقن هذا العمل ببرنامج $LaTeX$ **العربي**

المستـــــــوى: 3 علوم تجريبية ميـــــــدان التعَلّم: التقويم التشخيصي
الموضــــــوع: / . الكفاءات المستهدفة: / .
المـدة الزمنية: سا الوسائل التعليميـــة: الكتاب المدرسي - منتديات التعليم.

التمرين الأول:

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{-\frac{1}{2}\}$ بـ :

$$f(x) = \frac{x-3}{2x+1}$$

(C_f) تـمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. عين عددين حقيقيين a وَ b بـحيث من أجل كل x من D_f : $f(x) = a + \frac{b}{2x+1}$.
2. عين نهايات الدالة f عند أطراف مـجموعة التعريف.
3. استنتج أنّ المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين يطلب تعيين معادلتيهما.
4. ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.
5. عين نقاط تقاطع (C_f) مع حاملي مـحوري الإحداثيات.
6. عين نقط المنحنى (C_f) التي يكون عندها المماس مواز للمستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = 5x$.
7. أرسم المستقيمات المقاربة وَ المنحنى (C_f) .

التمرين الثاني:

أذكر صـحة أو خطأ كل من الإقتراحات التالية مع التعليل.

1) لتكن $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية حسابية أساسها r حـيث $(r \neq 0)$.

أ) إذا كان $r > 0$ فإن : U_n متزايدة.

ب) إذا كان $U_0 = 5$ وَ $r = 2$ فإن : $U_n = 2 + 5n$.

ج) $U_4 = U_1 + 4r$.

د) $S = U_0 + U_1 + \ldots + U_n = (n+1)\left(\frac{2U_0 + nr}{2}\right)$.

2) لتكن $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية عددية معرفة بـ :

$$\begin{cases} V_{n+1} = V_n^2 - 2 \\ V_0 = 0 \end{cases} \cdot$$

أ) الدالة المرفقة لـهذه المتتالية هي : $f : x \mapsto x^2 - 2$.

ب) $V_{n+1} - V_n = (V_n - 2)(V_n + 1)$.

التمرين الثالث: من بين الأجوبة؛ المقترحة اختر جوابا واحدا صـحيـحا؛ مع التعليل.

1) في المستوي المنسوب إلى معلم $(O; \vec{i}; \vec{j})$. C, B, A ثلاث نقط حيث : $C\left(\frac{1}{3}; \frac{4}{3}\right), B(-2; 1), A(1; 2)$.

إحداثيتي مركز الثقل المثلث ABC هي :

✓ $\left(\frac{1}{3}; \frac{4}{3}\right)$ ☐ . ✓ $\left(-1; \frac{2}{3}\right)$ ☐ . ✓ $\left(\frac{-2}{3}; \frac{1}{3}\right)$ ☐ .

2) في المستوي المنسوب إلى معلم $(O; \vec{i}; \vec{j})$ ، $A(1; 1)$ نقطة من المستوي ، وَ $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \vec{U}$ شعاع ، فإن مجموعة النقط M التي تحقق $\overrightarrow{AM}.\vec{U} = 0$ هي :

✓ $-2x + y + 1 = 0$ ☐ . ✓ $x - 2y + 1 = 0$ ☐ .

3) في معلم متعامد و متجانس النقطتان B, A احداثياتها على الترتيب $A(2; 1)$ $B(4; -2)$ ، فإن : المعادلة الديكارتية للدائرة (C) ذات القطر $[AB]$ هي :

✓ $x^2 - 6x + y^2 + y + 6 = 0$ ☐ . ✓ $x^2 + y^2 + y + 6 = 0$ ☐ . ✓ $x^2 - 6x + y^2 + 6 = 0$.

4) في معلم متعامد و متجانس، النقط C, B, A احداثياتها على الترتيب $(2; 1), (4; -2), (5; 3)$. فإن قيمة الجداء السلمي $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ هي :

✓ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$ ☐ . ✓ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 2$ ☐ . ✓ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -2$ ☐ .

بِالْتَوْفِيقْ

المستـــــوى: 3 علوم تجريبية
ميـــــدان التعَّلم: النهايات و الإستمرار
الموضـــوع: النهايات و الإستمرار
الكفاءات المستهدفة: حساب نهاية متهية عند الحدود المتهية أو غير متهيةلمجالات مجموعة التعريف .
المدة الزمنية: سا
الوسائل التعليميــة: الكتاب المدرسي - منتديات التعليم.

$I-1$) حساب نهاية متهية لدالة.

أ) حساب نهاية متهية لدالة عند عدد حقيقي:

النشاط الأول ص 6 :

أمثلة: اعتمادا على التمثيلات البيانية يمكن إيجاد مايلي :

1) $\lim\limits_{x\to 2}(2x+3)=7$ 2) $\lim\limits_{x\to 0}(x^2)=0$

3) $\lim\limits_{x\to 1}(x^3)=1$ 4) $\lim\limits_{x\to -1}|x|=1$

5) $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x}=1$

تمرين: f الدّالة المعرفة على المجموعة $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ و (C_f) تمثيلها البياني في معلم (انظر الشكل).

1) ضع تخمينا حول نهاية f عند 0 .

2) أثبت صحة التخمين وذلك بإتباع نفس المنهجية المتبعة في النشاط الأول (ص 6).

ب) حساب نهاية متهية لدّالة عند $+\infty$ أو عند $-\infty$:

نشاط f, g و h دوال عددية معرفة على التوالى على المجموعات $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$, $]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$ و $]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$ كمايلي :

$$f(x)=\frac{1}{x} \quad ، \quad g(x)=\frac{1}{x+1} \quad ، \quad h(x)=\frac{1}{(x-2)^2}$$

حساب نهاية كل من f, g وَ h عند كل من $+\infty, -\infty$ و التفسير الهندسي.

- **حساب نهاية غير المتهية لمجالات مجموعة التعريف :**

$I-2$ حساب نهاية غير متهية لدالة.

أ) حساب نهاية غير متهية لدالة عند عدد حقيقي.

نشاط : نفس معطيات النشاط المقترح في الفقرة $(I-1)$ و المطلوب هو حساب نهاية كل دّالة عند كل حد من مجموعة تعريفها وتفسيرها هندسيا.

ب) حساب نهاية غير متهية لدالة عند $+\infty$ أو $-\infty$

1) $\lim_{x\to-\infty}(x^2)=+\infty$ 2) $\lim_{x\to+\infty}(x^2)=+\infty$

3) $\lim_{x\to+\infty}(x^3)=+\infty$ 4) $\lim_{x\to-\infty}(x^3)=-\infty$

5) $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x})=+\infty$

حساب نهاية بإستعمال المبرهنات المتعلقة بالعمليات على النهايات.

$I-3$) العمليات على النهايات

التقويم :

تمارين : التمرين 18 ، 19 وَ 22 صفحة 27 .

التمرين 23 وَ 24 صفحة 28 .

بِالْتَوْفِيقْ

المستـــــــوى: 3 علوم تجريبية ميـــــــدان التعَّلم: النهايات و الإستمرار
المـوضـــــوع: حساب نهاية بإستعمال
المبرهنات المتعلقة بالمقارنة الكفاءات المستهدفة: حساب نهاية متهية عند الحدود المتهية أو غير متهيةلمجالات مجموعة التعريف .
المـدة الزمنية: سا الوسائل التعليميـــة: الكتاب المدرسي - منتديات التعليم.

حساب نهاية بإستعمال المبرهنات المتعلقة بالمقارنة :

$I-4$) النهايات بالمقارنة :

مبرهنة : (مبرهنة الحد من الأسفل)

g, f دالتان معرفتان على الأقل على مجال I من الشكل : $I=]\alpha;+\infty[$ حيث α عدد حقيقي.

اذا كان من أجل كل x من I : $f(x)\geq g(x)$ وكانت : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ فإن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

مثال: f الدّالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كمايلي : $f(x)=x+\sin x$.
من أجل كل x من $[0;+\infty$ فإن : $\sin x\geq -1$ ومنه : $x+\sin x\geq x-1$ أي : $f(x)\geq x-1$ لكن : $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)=+\infty$ اذنّ : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

مبرهنة : (مبرهنة الحد من الأعلى)

g, f دالتان معرفتان على الأقل على مجال I من الشكل : $I=]\alpha;+\infty[$ حيث α عدد حقيقي.

اذا كان من أجل كل x من I : $f(x)\leq g(x)$ وكانت : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$ فإن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.

مثال: f الدّالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كمايلي : $f(x)=-x+\cos x$.
من أجل كل x من $]0;+\infty[$ فإن : $\cos x\leq 1$ ومنه : $-x+\cos x\leq -x+1$ أي : $f(x)\leq -x+1$

لكن : $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x+1)=-\infty$ اذنّ : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.

مبرهنة : (مبرهنة الحصر)

g, f و h ثلاث دّوال معرفتان على الأقل على مجال I من الشكل : $I=]\alpha;+\infty[$ حيث α عدد حقيقي و l عدد حقيقي.

اذا كان من أجل كل عدد حقيقي x من I : $h(x)\leq f(x)\leq g(x)$ وكانت : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=l$ وَ $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=l$ فإن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l$.

مثال: f الدّالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كمايلي : $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ ·

لدينا : من أجل كل x من $]0;+\infty[$ فإن : $-1\leq \sin x\leq 1$ ومنه : $-\dfrac{1}{x}\leq \dfrac{\sin}{x}\leq \dfrac{1}{x}$ أي : $-\dfrac{1}{x}\leq f(x)\leq \dfrac{1}{x}$ لكن : $\lim\limits_{x\to+\infty}(\dfrac{1}{x})=0$ وَ $\lim\limits_{x\to+\infty}(-\dfrac{1}{x})=0$ اذنّ وَ حسب مبرهة الحصر فإن :

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=0 \cdot$$

ملاحظة : إنّ المبرهنات الثلاث السابقة ولمحصل عليها عند $+\infty$ تبقي صحيحة عند $-\infty$ وعند عدد حقيقي·

مثال: f الدّالة المعرفة على المجال $]-\infty;0[$ كمايلي : $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ ·

لدينا : من أجل كل x من $]-\infty;0[$ فإن : $-1\leq \sin x\leq 1$ ومنه : $-\dfrac{1}{x}\leq \dfrac{\sin}{x}\leq \dfrac{1}{x}$ أي : $-\dfrac{1}{x}\geq f(x)\geq \dfrac{1}{x}$ لكن : $\lim\limits_{x\to-\infty}(\dfrac{1}{x})=0$ وَ $\lim\limits_{x\to-\infty}(-\dfrac{1}{x})=0$ اذنّ وَ حسب مبرهة الحصر فإن :

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=0 \cdot$$

التقويم :

تمارين : التمرين 39 وَ 41 صفحة 29 ·

بِاَلْتَوْفِيقْ

المستـــــوى: 3 علوم تجريبية ميــــــدان التعّلم: النهايات و الإستمرار

الموضــــوع: نهاية دّالةمركبة الكفاءات المستهدفة: حساب نهاية بإستعمال المبرهنة المتعلقة بتركيب دالتين متهيةلمجالات مجموعة التعريف .

المـدة الزمنية: سا الوسائل التعليميـــة: الكتاب المدرسي - منتديات التعليم.

نشاط الثاني (ص 6):

نهاية دالة مركبة :

مبرهنة: b, a وَ c تمثل اعداد حقيقية أو $+\infty$ أو $-\infty$ ؛ V, U وَ f دوال حيث : $f = V0U$

اذا كانت : $\lim_{x\to a} U(x) = b$ و اذا كانت $\lim_{x\to b} V(x) = c$ فإن : $\lim_{x\to a} f(x) = c$.

مثال: 1) f الدّالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = (-2x+5)^2$.

لدينا : $f = VoU$ حيث : $\begin{cases} U(x) = -2x+5 \\ V(x) = x^2 \end{cases}$

لدينا : $\lim_{x\to-\infty} U(x) = +\infty$ وَ $\lim_{x\to+\infty} V(x) = +\infty$ اذن : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

2) f الدّالة المعرفة على $]1; +\infty[$ بـ : $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$.

لدينا : $f = VoU$ حيث : $\begin{cases} U(x) = x-1 \\ V(x) = \dfrac{1}{x} \end{cases}$

لدينا : $\lim_{x\to 1} U(x) = 0$ وَ $\lim_{x\to>0} V(x) = +\infty$ اذن : $\lim_{x\to 1} f(x) = +\infty$.

3) f الدّالة المعرفة على $]2; +\infty[$ بـ : $f(x) = \sqrt{\dfrac{3-6x}{2-x}}$.

لدينا : $f = VoU$ حيث : $\begin{cases} U(x) = \dfrac{3-6x}{2-x} \\ V(x) = \sqrt{x} \end{cases}$

لدينا : $\lim_{x\to+\infty} U(x) = 6$ وَ $\lim_{x\to 6} V(x) = \sqrt{6}$ اذن : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \sqrt{6}$.

بِالتَوفِيق

المستــــــوى: 3 علوم تجريبية
الموضــــوع : السلوك التقاربي
المــدة الزمنية: سا
ميــــــــدان التعلّم : النهايات و الإستمرار
الكفاءات المستهدفة: السلوك التقاربي لدّالة.
الوسائـل التعليميــة: الكتاب المدرسي - منتديات التعليم.

التقويم :

تمارين: التمرين 16 صفحة 27 .

التمرين 7 صفحة 26 .

بِالتَّوْفِيقْ

المستـــــوى: 3 علوم تجريبية
ميـــــدان التعَّلم : النهايات و الإستمرار
الموضـــوع : الإستمرار
الكفاءات المستهدفة: استعمال مبرهنة القيم المتوسطة لإثبات وجود وحلول المعادلة $f(x) = k$ حيث k عدد حقيقي.
المـدة الزمنية: سا
الوسائـل التعليميــة: الكتاب المدرسي - منتديات التعليم.

نشاط الثاني (ص 7):

$I - 4)$ الاستمرارية :

أ) مفهوم الاستمرارية: f دّالة معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$ وَ (C_f) تمثيلها البياني في معلم.

- نقول عن الدّالة f أنها مستمرة على مجال I اذا أمكن رسم تمثيلها البياني (C_f) دون رفع القلم (اليد) وفق خط مستمر.

أمثـــــلة:

1) الدالة " مربع " الدالة " القيمة المطلقة " الدالة " cos " الدالة " sin " مستمرة على $\mathbb{R}$.

2) • الدالة " الـجذر التربيعي " مستمرة على $[0; +\infty[$.
- الدالة " مقلوب " مستمرة على كل من المجالين $]-\infty; 0[,]0; +\infty[$.
- الدّالة f المعرفة في النشاط الثالث (ص 3) غير مستمرة على المجال $[-2; 1[$ لكنها مستمرة على كل من المجالات $[-2; -1[, [-1; 0[$ وَ $[0; 1[$.

ب) تعريف الاستمرارية: f دّالة و a عدد حقيقي غير معزول من مجموعة تعريفها.

تعريف نقول عن الدّالة f أنها مستمرة عند a إذا وفقط إذا كان :

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

أمثـــــلة:

f دالة العرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي :

$$\begin{cases} f(x) = -x + 2, & x \in]-\infty; 1[\\ f(x) = \sqrt{x}, & x \in]1; +\infty[\end{cases}$$

- الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ و العدد 1 غير معزول عن $\mathbb{R}$.
- $\star$ $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} f(x) = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} (-x + 2)$ أي $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} f(x) = 1$.

$\star$ $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} f(x) = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} (\sqrt{x})$ أي : $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} f(x) = 1$.

إذنّ : $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 1$ لكن $f(1) = 1$ إذن : $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$ ومنه f مستمرة عند العدد 1 .

مــــلاحظة: نقول عن دلة f أنها مستمرة على مجال I إذا وفقط إذا كانت f مستمرة على كل قيمة من المجال I .

ج) خـــواص: [تقبل دون برهان]

نقبل بأنّ كل الدّوال المقررة في هذا المستوى و المحصل عليها بالعمليات على الدّوال مألوفة أو بتركيبها مستمرة على كل مجال من مجموعة تعريفها.

✍ الدّوال المرجعية مستمرة على كل من مجموعة تعريفها.

✍ الدّوال كثيرات الحدود ؛ sin وَ cos مستمرة على $\mathbb{R}$.

✍ الدّوال الناطقة (نسبة دالة كثير حدود إلى أخرى) مستمرة على كل من مجموعة تعريفها.

بِالتَّوفِيقْ

المستـــــوى: 3 علوم تـجريبية
الموضـــوع : حلول المعادلة $f(x)=k$
المـدة الزمنية: سا

ميـــــدان التعَّلم : النهايات و الإستمرار
الكفاءات المستهدفة: استعمال مبرهنة القيم المتوسطة لإثبات وجود وحلول المعادلة $f(x)=k$ حيث k عدد حقيقي.
الوسائـل التعليميـــة: الكتاب المدرسي - منتديات التعليم.

النشاط الرابع (ص 7):

$I-5$) مبرهنة القيم المتوسطة :

مبرهنة : [تقبل دون برهان]

f دآلة مستمرة على مجال $[a;b]$.
اذا كان k ثابتا حقيقيا محصورا بين $f(a)$ وَ $f(b)$ فإن المعادلة $f(x)=k$ تقبل ؛ على الأقل ؛ حلا في المجال $[a;b]$ بمعنى : يوجد؛ على الأقل؛ عدد حقيقي من المجال $[a;b]$ يـحقق : $f(x)=k$.

مـــــلاحظات :

1) بيانيا مبرهنة القيم المتوسطة تنص على أنّ المستقيم المعرف بالمعادلة $y=k$ يقطع (C_f) التمثيل البياني للدّالة f في معلم ؛ على الأقل مرة واحدة في نقطة فاصلتها c من المجال $[a;b]$.

2) مبرهنة القيم المتوسطة تؤكد فقط على حل على الأقل للمعادلة $f(x)=k$ في المجال $[a;b]$ أما تعين الحلول أو القيمة المقربة لها فيتم بإستعمال خوارزميات مختلفة.

3) زيادة على شرطي مبرهنة القيم المتوسطة .
اذا كانت الدالة f رتيبة تماما على المجال $[a;b]$ فإن المعادلة $f(x)=k$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[a;b]$.

4) مبرهنة القيم المتوسطة تبقي صحيحة اذا أبدلنا المجال $[a;b]$ بمجال؛ مفتوح أو نصف مفتوح ، محدود أو غير محدود.

مثـــــال: f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $f(x)=x^3-3x+1$ وَ (C_f) تمثيلها البياني في معلم.
⋆ الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$ (دآلة كثير الحدود) اذن : f مستمرة على $[-2;2]$ ... (1) .
ولدينا : $f(-2)=-1$ وَ $f(2)=3$ اذن العدد 2 محصور بين $f(2)$ وَ $f(-2)$ ... (2) .
من (1) وَ (2) وحسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن : المعادلة $f(x)=2$ تقبل؛ على الأقل حلا في المجال $[-2;2]$.

بيانيا: المستقيم المعرف بالمعادلة $y=2$ يقطع المنحنى (C_f) في نقطة واحدة؛ على الأقل فاصلتها من المجال $[-2;2]$.

$\star$ الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$ (دّالة كثير الحدود) اذن : f مستمرة على $]-1;1[$ ... (3) .

ولدينا : $f(-1)=3$ وَ $f(1)=-1$ اذن العدد 0 محصور بين -1 وَ 3 ... (4) .

الدّالة f متناقصة تماما على المجال $]-1;1[$ ... (5) من (3) ، (4) وَ (5) وحسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن : المعادلة $f(x)=0$ تقبل؛ حلا وحيدا في المجال $]-1;1[$.

التقويم :

تمارين : التمرين 50 صفحة 29 .

التمرين 30 صفحة 56 .

بِالْتَوْفِيقْ

المستــــــوى: 3 علوم تجريبية
ميـــــــــدان التعّلم : الاشتقاقية
الموضـــــوع: الإشتقاقية
الكفاءات المستهدفة: توظيف المشتقات لـحل مشكلات
المــدة الزمنية: سا
الوسائـل التعليميــة: الكتاب المدرسي - منتديات التعليم.

النشاط الأول (ص 40):

تذكير:

تمارين: تمرين 1 وَ 2 صفحة 58 .

ملاحظات :

1) كل دالة قابلة للإشتقاق عند قيمة a (أو على مجال I) مستمرة عند القيمة a (أو على مجال I).

2) ليست كل دّالة مستمرة عند قيمة a (أو على مجال I) قابلة للإشتقاق عند القيمة a (أو على مجال I).

مثال : f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = |x|$.

الدّالة f مستمرة عند العدد 0 لكنها غير قابلة للإشتقاق عند العدد 0 .

التقويم:

تمارين: تمرين 4 ، 7 وَ 8 صفحة 58 .

بِالْتَوْفِيقْ

المستـــــوى: 3 علوم تجريبية ميـــــدان التعلّم : الإشتقاقية
المـوضــــوع: التغيرات الكفاءات المستهدفة: إستعمال المشتقات لدراسة خواص دالة و المنحنى المثل لـها (التغيرات، التقريب الخطي، نقطة الإنعطاف ...)
المـدة الزمنية: سا الوسائـل التعليميـــة: الكتاب المدرسي - منتديات التعليم.

نشاط مقترح:

1) g الدّالة المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ كمايلي : $g(x)=2x^3-3x^2-1$.

أ) أدرس تغيرات الدالة g.

ب) بين أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $]1;2[$.

ج) استنتج؛ حسب قيم x؛ إشارة $g(x)$ على المجال $]-1;+\infty[$.

2) f الدّالة المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ كمايلي : $f(x)=\dfrac{1-x}{x^3+1}$.

أ) بين أنه؛ من أجل كل عدد حقيقي x؛ من المجال $]-1;+\infty[$ يكون : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(x^3+1)^2}$.

ب) استنتج اتـجاه تغير الدالة f ثمّ شكل جدول تغيراتها.

ج) هل الدالة f تقبل قيما حدية محلية ؟

3) h الدّالة المعرفة على المجال $]-\infty;1[$ كمايلي : $h(x)=f(-x)$ وَ k الدالة المعرفة علة المجال $]-\infty;1[$ كمايلي : $k(x)=f(2x+1)$.

- دون تعيين الدالتين h وَ k، عين الدالتين المشتقتين : h' وَ k'.

بِالْتَوْفِيقْ

المستـــــوى: 3 علوم تجريبية		ميـــــــدان التعّلم : الإشتقاقية

الموضـــوع: نقطة الإنعطاف		الكفاءات المستهدفة: إستعمال المشتقات لدراسة خواص دّالة و المنحنى المثل لـها (التغيرات، التقريب الخطي، نقطة الإنعطاف ...)

المــدة الزمنية: سا		الوسائـل التعليمــة: الكتاب المدرسي - منتديات التعليم.

$II-1)$ المشتقات المتتابعة :

مـــــثال : f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$f(x)=2x^3-x^2+5x-1 .$$

- الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ بإعتبارها دالة كثير الـحدود و دالتها المشتقة معرفة بـ :

$$f'(x)=6x^2-2x+5 .$$

- الدالة f' قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ بإعتبارها دالة كثير الـحدود و دالتها المشتقة $(f')'$ معرفة بـ :

$$(f')'=12x-2 .$$

⋆ نرمز إلى الدالة $(f')'$ بالرمز f'' تسمى الدالة المشتقة الثانية للدالة f اذن من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإن :

$$f''=12x-2 .$$

- الدّالة f'' قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ لأنها دالة تألفية ودالتها المشتقة $(f'')'$ معرفة بـ :

$$f'''(x)=12 .$$

– تسمى الدّوال : $f', f'', f''', f(4) \dots f^{(n)} \dots$ حيث $(n\in\mathbb{R})$ المشتقات المتتابعة للدالة f .

$II-2)$ نقطة الإنعطاف:

مثـــــال : f الدّالة اعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=x^3$ وَ (C_f) تمثيلها البياني في معلم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

✎ f قابلة للإشتقاق عند العدد 0 لأنها كذلك على $\mathbb{R}$ اذن : (C_f) يقبل في النقطة $O(0;0)$ مماسًا (Δ) معرف بالمعادلة $y=0$.

☜ المماس Δ يقطع (C_f) في النقطة $O(0;0)$ ويكون (C_f) أسفل (Δ) في المجال $]-\infty;0[$ ويكون (C_f) أعلى (Δ) في المجال $]0;\infty[$ ذن النقطة $O(0;0)$ نقطة إنعطاف للمنحنى (C_f) (لأنّ (Δ) يخترق (C_f) في النقطة O) .

☜ من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإنّ : $f'(x) = 3x^2$ اذن : $f''(x) = 6x$.

جدول اشارة f'' على $\mathbb{R}$ هو :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

نلاحظ أنّ : f'' تنعدم عند 0 (فاصلة نقطة الإنعطاف) مغيرة إشارتها.

مبـــــــرهنة :

اد ا كانت f دالة قابلة للإشتقاق مرتين على مجال مفتوح يشمل قيمة x_0 و إذا إنعدمت دالتها المشتقة الثانية f'' عبد x_0 مغيرة إشارتها فإن : النقطة $A(x_0;f(x_0))$ نقطة إنعطاف للمنحـنـي المثل للدالة f في معلم.

مثــــال : f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$ وَ (C_f) تمثيلها البياني في معلم.

من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإن : $f'(x) = 3x^2 + 6x$ ومنه : $f''(x) = 6x + 6$.

جدول إشارة f'' هو :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

نلاحظ أنّ f'' تنعدم عند (-1) مغيرة إشارتها اذن :

النقطة $A(-1;f(-1))$ أي : $A(-1;-2)$ نقطة إنعطاف لـ (C_f) .

مشتقة الدالة المركبة

مبرهنة (تقبل بدون برهان)

اذا كانت U دالة قابلة للإشتقاق على مجال I وَ كانت V دالة قابلة للإشتقاق على مجال $U(I)$ فإن الدالة VoU قابلة للإشتقاق على مجال I حيث :

من أجل كل x من I فإن : $(VoU)'(x) = V'[U(x)] \times U'(x)$.

التقويم :

تمرين :

- عين شتقة الدالة f في كل حالة من الحالات التالية :

1) الدالة f معرفة على المجموعة $\mathbb{R}$ كمايلي : $f(x) = (-2x^2 - 3x + 1)^4$.

3) الدالة f معرفة على المجال $]-\frac{1}{2}; +\infty[$ كمايلي : $f(x) = \frac{1}{(2x+1)^3}$.

4) الدالة f معرفة على المجال $]-1; 1[$ كمايلي : $f(x) = \sqrt{1-x^2}$.

بِالتَوْفِيق

المستـــــوى: 3 علوم تجريبية ميــــــدان التعَّلم : الإشتقاقية

المـوضـــوع: التقريب الـخطي الكفاءات المستهدفة: إستعمال المشتقات لدراسة خواص دّالة و المنحنى المثل لـها (التغيرات، التقريب الخطي، نقطة الإنعطاف ...)

المـدة الزمنية: سا الوسائـل التعليميــة: الكتاب المدرسي - منتديات التعليم.

تذكير :

⋆ اذا كان x عددا حقيقيا قريبًا من العدد a فإن : $f(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$.

⋆ نضع $h = x - a$ عندها يكون $xa + h$ حيث h عدد حقيقي و بالتالي :

اذا كان h عددا حقيقيًا قريبًا من الصفر فإن : $f(a + h) = f(a) + hf'(a)$.

التقويم :

تمارين: تمرين 41 صفحة 61 .

بِالْتَوْفِيقْ

المستـــــوى: 3 علوم تجريبية | ميـــــدان التعلّم: الدوال الأسية واللوغاريتمية
الموضـــوع: الدوال الأسية | الكفاءات المستهدفة: توظيف خواص الدالة الأسية.
المـدة الزمنية: سا | الوسائـل التعليميـة: الكتاب المدرسي - منتديات التعليم.

نشاط 1 صفحة 76

الدالة الأسية exp

$II-1$) تعريف:

توجد دالة وحيدة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ بحيث: $f'=f$ وَ $f(0)=1$ ، نسمي هذه الدالة بالدالة الأسية (النيبيرية) وَنرمز إليها بالرمز exp

$II-2$) خواص جبرية: من أجل كل عددين حقيقيين x وَ y وَمن أجل عدد n عدد صحيح نسبي لدينا:

$$\exp(0)=1 \quad (1) \qquad \exp(x)\times\exp(-x)=1 \quad (2) \qquad \exp(x)\neq 0 \quad (3)$$

$$\exp(-x)=\frac{1}{\exp(x)} \quad (4) \qquad \exp(x-y)=\frac{\exp(x)}{\exp(y)} \quad (5)$$

$$\exp(x+y)=\exp(x)\times\exp(y) \quad (6) \qquad \exp(nx)=[\exp(x)]^n \quad (7)$$

العدد e وَالترميز e^x : العدد e هو صورة العدد 1 بالدالة الأسية أي: $e=\exp(1)$.

إصطلاحا نرمز لِـ $\exp(x)$ بِـ e^x من أجل كل عدد حقيقي x ، وَنكتب: $\exp(x)=e^x$ من أجل كل عدد حقيقي x ، وَنقرؤها بأسية x .

ملاحظة: الترميز السابق متلائم مع خواص القوى في الحالة التي يكون فيها الأس عددا صحيحا.

قواعد الحساب: من أجل كل x ، y عددين حقيقيين لدينا:

$$e^0=1 \quad (1) \qquad (\exp)'(x)=e^x \quad (2) \qquad e^x\neq 0 \quad (3)$$

$$e^{-x}=\frac{1}{e^x} \quad (4) \qquad e^{x-y}=\frac{e^x}{e^y} \quad (5)$$

$$e^{x+y}=e^xe^y \quad (6) \qquad e^{nx}=[e^x]^n \quad (7)$$

ملاحظة : من أجل كل عدد حقتقي x فإن :

$e^x = (e^{\frac{x}{2}})^2$ اذن من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإن : $e^x > 0$.

التقويم :

تمارين: التمرين 2 وَ 3 صفحة 102 .

بِالْتَوْفِيقْ

المستــــــوى: 3 علوم تجريبية ميـــــــدان التعَلم : الدوال الأسية واللوغاريتمية
الموضـــــوع: خواص الدالة الأسية الكفاءات المستهدفة: حل مشكلات بتوظيف خواص الدوال الأسية.
المــدة الزمنية: سا الوسائـل التعليميـــة: الكتاب المدرسي - منتديات التعليم.

الدوال الأسية $x \mapsto e^{kx}$

حلول المعادلة $f' = kf$:

مبرهنة: ليكن k عدد حقيقي، توجد دالة وحيدة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ بحيث: $f' = kf$ وَ $f(0) = 1$. f هي الدالة $x \mapsto e^{kx}$.

دوال تحول المجموع إلى جداء:

مبرهنة: الدوال غير المعدومة f وَ القابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ بحيث من أجل كل عددين حقيقيين x وَ y $f(x+y) = f(x)f(y)$ هي الدوال $x \mapsto e^{kx}$ حيث k عدد حقيقي.

التقويم:

تمارين: التمرين 15 وَ 16 صفحة 103 .

بِالْتَوْفِيقْ

المستـــــوى: 3 علوم تجريبية ميـــــــدان التعلّم: الدوال الأسية واللوغاريتمية
الموضـــــوع: دراسة الدالة الأسية الكفاءات المستهدفة: حل مشكلات بتوظيف خواص الدوال الأسية.
المــدة الزمنية: سا الوسائـل التعليميــة: الكتاب المدرسي - منتديات التعليم.

$III-3)$ دراسة الدالة الأسية:

إتجاه تغير الدالة الأسية:

- **مجموعة التعريف** : مجموعة تعريف الدالة $''\exp''$ هي : $\mathbb{R}$.
- **المشتقة ودراسة إشارتها**

من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإن : $e^x > 0$ أي الدالة الأسية متزايدة تماماً على $\mathbb{R}$.

نتائج :

اذا كان b, a عددين حقيقيين فإن :

$\star$ $e^a = e^b$ معناه $a = b$.

$\star$ $e^a < e^b$ معناه $a < b$.

اذا كان x عددًا حقيقيًا فإن :

$\star$ $x < 0$ فإنّ : $0 < e^x < 1$.

$\star$ $x > 0$ فإنّ: $e^x > 1$

ملاحظة: تبقى النتيجة الأولى صحيحة في حالة a وَ b دوال.

- **النهايات**

نشاط مقترح: f الدالة المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ كمايلي : $f(x) = e^x - x$.

1) بين أنّ الدّالة f متزايدة على المجال $[0; +\infty[$.

2) احسب $f(0)$. استنتج إشارة الدّالة f على المجال $[0; +\infty[$.

3) بين أنه؛ من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0; +\infty[$ ؛ يكون : $e^x > x$. استنتج $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x$.

4) نعلم أنّ من أجل كل عدد حقيقي x : $e^x = \dfrac{1}{e^{-x}}$. احسب $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x$. فسر النتيجة هندسيا.

- **التمثيل البياني**

نسمي (γ) التمثيل البياني للدّالة الاسية في معلم.

$\circ$ (γ) يقبل في النقتة $A(0;1)$ مماسا (Δ) معرفا بالمعادلة $y = x + 1$.

∘ (γ) يقبل في النقتة $B(1;e)$ مماسا (Δ') معرفا بالمعادلة $y = e.x$ ·
من تعريف العدد المشتق للدالة exp لدينا: $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \exp'(0) = 1$

التقويم:

تمارين: التمرين 5 صفحة 102 ·

التمرين 10 صفحة 103 ·

التمرين المقترح حلّ المعادلة و المتراجحة $e^{2x} + 2e^x - 3 = 0; > 0$ ·

بِالْتَوْفِيقْ

$III-4)$ دراسة الدالة $\exp \circ U$

النهايات: لدراسة نهاية الدالة $\exp \circ U$ نستعمل المبرهنة الخاصة بنهاية دالة مركبة.

مثال: أحسب نهايتَيْ الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ في الحالتين: $f(x)=e^{2x-1}$ ، $f(x)=e^{2x}-e^{x}$.

الدالة المشتقة: إذا كانت U دالة قابلة للإشتقاق على مجال I فإن الدالة $\exp \circ U$ قابلة للإشتقاق على المجال I ، ولدينا من أجل كل x من I : $(\exp \circ U)'(x)=U'(x)e^{U(x)}$.

امثال: أحسب مشتق الدالتين المعرفتين في المثال السابق.

بِالْتَوْفِيقْ

المستـــــوى: 3 علوم تجريبية ميـــــدان التعلّم: المعادلات التفاضلية

الموضـــوع: المعادلة التفاضلية $y' = ay + b$ الكفاءات المستهدفة: توظيف خواص الدوال الأسية.

المـدة الزمنية: سا الوسائـل التعليميـــة: الكتاب المدرسي - منتديات التعلم.

$III-5$) المعادلات التفاضلية من الشكل $y' = ay + b$

تمهيد: حل المعادلة التفاضلية $y' = ay + b$ هو إيجاد كل الدوال f القابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ والتي تحقق من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = af(x) + b$ حيث a وَ b عددان حقيقيان مع $a \neq 0$.

ملاحظة: العديد من المسائل في العلوم التجريبية، الإقتصاد، الكهرباء والميكانيك تؤدى إلى دراسة هذا النوع من المعادلات التفاضلية والتي غالبا ما نكتبها $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = ay + b$.

وبصفت عامة نكتب : $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ بدلا من f'.

الأعمال الموجهة ص 97 الجزء الأول للكتاب المدرسي:

أ) المعادلة التفاضلية $y' = ay$ مع $a \neq 0$:

مبرهنة: a عدد حقيقي غير معدوم، الحلول على $\mathbb{R}$ للمعادلة التفاضلية $y' = ay$ هي الدوال $f(x) = Ce^{ax}$ حيث C عدد حقيقي ثابت كيفي.

تطبيق: حل في $\mathbb{R}$ المعادلة التفاضلية: $3y' - 2y = 0$.

ب) المعادلة التفاضلية $y' = ay + b$ مع $a \neq 0$:

مبرهنة: a وَ b عددان حقيقيان مع $a \neq 0$، الحلول على $\mathbb{R}$ للمعادلة التفاضلية $y' = ay + b$ هي الدوال $f(x) = Ce^{ax} - \frac{b}{a}$ حيث C عدد حقيقي ثابت كيفي.

تطبيق: حل في $\mathbb{R}$ المعادلة التفاضلية: $y' - 2y = 3$.

خاصية:

من أجل كل ثنائية أعداد حقيقية (x_0, y_0)، المعادلة التفاضلية $y' = ay + b$ تقبل حلا وحيدا f معرفة على $\mathbb{R}$ وَ تحقق الشرط $f(x_0) = y_0$.

تطبيق: حل في $\mathbb{R}$ المعادلة التفاضلية: $2y' + y = 1$، ثمّ عين الحل الوحيد f للمعادلة الذي يحقق $f(-1) = 2$.

التقويم:

تمارين: تطبيق صفحة 97 بِٱلتَّوْفِيقْ.

المستـــــوى: 3 علوم تجريبية — ميــــــدان التعلّم: الدوال الأسية واللوغاريتمية

الموضــــوع: الدالة اللوغاريتمية — الكفاءات المستهدفة: حل مشكلات بتوظيف خواص الدالة لوغاريتم.

المــدة الزمنية: سا — الوسائـل التعليميـــة: الكتاب المدرسي - منتديات التعليم.

نشاط 2 صفحة 77

$III-6$) الدالة اللوغاريتمية النيبيرية

تعريف الدالة ln : نسمي **الدالة اللوغاريتمية النيبيرية** الدالة التي نرمز إليها بالرمز ln والتي ترفق بكل عدد حقيقي x من المجال $]0,+\infty[$ العدد الحقيقي $\ln x$.

نتائج:

من أجل كل x من $]0,+\infty[$ ومن أجل كل y من $\mathbb{R}$: $e^y=x$ تكافىء $y=\ln x$.

من أجل كل x من $]0,+\infty[$: $e^{\ln x}=x$ ؛ من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $\ln(e^x)=x$.

بما أن $e^0=1$ فإن $\ln 1=0$ وبما أن $e^1=e$ فإن $\ln e=1$.

ملاحظة وَخاصية: نعبر عن النتيجة الأولى بالقول أن الدالة اللوغاريتمية النيبيرية ln هي الدالة **العكسية** للدالة الأسية exp.

$III-7$) الخواص الجبرية

نشاط مقترح

b,a عددان حقيقيان موجبان تماما.

1) نضع $\alpha=\ln(ab)$ وَ $\beta=\ln(a)+\ln(b)$. – احسب كلا من e^{α} ، e^{β} ثم قارن بين α وَ β.

2) أ) بملاحظة أن : $a\times\frac{1}{a}=1$ وباستعمال الخاصية الأساسية للدالة "ln" ، اكتب $\ln(\frac{1}{a})$ بدلالة $\ln(a)$.

ب) بملاحظة أن : $\frac{1}{b}\times a=\frac{a}{b}$ وباستعمال الخاصية الأساسية للدالة "ln" ، قارن بين $\ln(\frac{a}{b})$ وَ $\ln(a)-\ln(b)$.

الخاصية الأساسية: من أجل كل عددين حقيقيين a ، b من المجال $]0,+\infty[$ لدينا: $\ln(ab)=\ln a+\ln b$

مثال: $\ln(2x)=\ln 2+\ln x$

نتائج:

1) من أجل كل عددين حقيقيين a ، b من المجال $]0,+\infty[$ لدينا: $\ln\left(\frac{1}{a}\right)=-\ln a$ ، $\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln a-\ln b$.

2) من أجل كل عدد حقيقي a من المجال $]0,+\infty[$ ، ومن أجل كل عدد صحيح نسبي n لدينا: $\ln(a^n) = n\ln a$.

3) من أجل كل عدد حقيقي a من المجال $]0,+\infty[$ لدينا: $\ln\sqrt{a} = \frac{1}{2}\ln a$.

أمثلة: $\ln\left(\frac{1}{5}\right) = -\ln 5$ ، $\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{7}\right) = \ln\sqrt{2} - \ln 7$ ، $\ln\left(e^2\right) = 2\ln\left(e\right)$ ، $\ln\sqrt{3} = \frac{1}{2}\ln 3$.

التقويم:

تمارين: تمرين 59 ، 61 صفحة 106 .

الخاصية الأساسية: من أجل كل عددين حقيقيين a ، b من المجال $]0,+\infty[$ لدينا: $\ln(ab) = \ln a + \ln b$

طريقة: الكتابة $\ln a + \ln b$ تفرض أن يكن $a > 0$ وَ $b > 0$ ، أمّا الكتابة $\ln(ab)$ تفرض أن يكون الجداء ab موجب تماماً.

تطبيق: حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $\ln(x+1)(x-2) = \ln 3$ ، $\ln(x+1) + \ln(x-2) = \ln 3$.

نتيجة 2 : من أجل كل عدد حقيقي a من المجال $]0,+\infty[$ ، ومن أجل كل عدد صحيح نسبي n لدينا: $\ln(a^n) = n\ln a$.

نتيجة 3 : من أجل كل عدد حقيقي a من المجال $]0,+\infty[$ لدينا: $\ln\sqrt{a} = \frac{1}{2}\ln a$.

التقويم:

تمارين: تمرين 62 صفحة 106 .

بِٱلتَّوْفِيقْ

المستـــــوى: 3 علوم تجريبية	ميـــــــدان التعّلم: الدوال الأسية واللوغاريتمية
الموضـــــوع: دراسة الدالة ln ، log	الكفاءات المستهدفة: حل مشكلات بتوظيف خواص الدالة لوغاريتم.
المـدة الزمنية: سا	الوسائـل التعليميـــة: الكتاب المدرسي - منتديات التعليم.

دراسة الدالة ln و تمثيلها البياني:

نشاط الثاني (ص 77) :

2- التمثيل البياني :

- النقطتان $M(x;y)$ وَ $M'(y;x)$ متناظرتان بالنسبة للمنصف الأول.
- $a\in\mathbb{R}$ وَ ب $\mathbb{R}_+^\star$ لدينا : $M(a;b)$ معناه $e^a=b$ أي : $M'(b;a)$ تنتمي إلى المنحنى (C') .
- نستنتج أنّ المنحنيين (C) وَ (C') متناظران بالنسبة إلى المنصف الأول $(y=x)$.
- رسم (C) ثم (C') في نفس المعلم.

3- وضع تـخمينات :

- الدّالة ln متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$.
- (من البيان) $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}(\ln x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x)=+\infty$.

الإستمرارية والإشتقاقية: الدالة $x\mapsto \ln x$ مستمرة وقابلة للإشتقاق على $]0,+\infty[$ ولدينا من أجل كل x من $]0,+\infty[$: $\ln'(x)=\dfrac{1}{x}$.

جدول التغيرات - التمثيل البياني:

ومنه نستنتج الـخواص التحليلية الأتية للدالة "ln" :

- a وَ b عددان حقيقيان موجبان تماما :

1) $\ln a=\ln b$ معناه $a=b$.

2) $\ln a>\ln b$ معناه $a>b$.

3) **حالة خاصة :** $\ln a>0$ معناه $a>1$ ، $\ln a<0$ معناه $0<a<1$.

أمثلة: ○ لدينا : $3<5$ اذن : $\ln 3<\ln 5$.

○ لدينا : $\dfrac{3}{4}<1$ اذن : $\ln\dfrac{3}{4}<0$. ○ لدينا : $\dfrac{3}{2}>1$ اذن : $\ln\dfrac{3}{2}>0$.

$III-8)$ دراسة الدالة $\ln \circ U$

النهايات: لدراسة نهاية الدالة $\ln \circ U$ نستعمل المبرهنة الخاصة بنهاية دالة مركبة.

أمثلة: أحسب نهايتَيْ الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها والمعرفة بـ: $f(x)=\ln(x-3)$.

الدالة المشتقة:

خاصية: إذا كانت U دالة قابلة للإشتقاق وموجبة تماما على مجال I فإن الدالة $\ln \circ U$ قابلة للإشتقاق على المجال I ولدينا من أجل كل x من I : $\left(\ln \circ U\right)'(x)=\dfrac{U'(x)}{U(x)}$.

أمثلة: مشتق الدالة f حيث $f(x)=\ln(x^3-2x+1)$ هي الدالة المعرفة بالعبارة $f'(x)=\dfrac{3x^2-2}{x^3-2x+1}$

التقويم:

تمارين: تمرين: 67 ، 68 وَ 78 صفحة 107 .

تمرين: 91 صفحة 109 .

بِالْتَوْفِيقْ

المستـــــوى: 3 علوم تجريبية — ميــــــدان التعَّلم: الدوال الأسية واللوغاريتمية
الموضـــوع: دراسة الدالة log — الكفاءات المستهدفة: حل مشكلات بتوظيف خواص الدالة لوغاريتم.
المـدة الزمنية: سا — الوسائـل التعليميـــة: الكتاب المدرسي - منتديات التعليم.

$III - 9)$ دالة اللوغاريتم العشري

تعريف: نسمي دالة اللوغاريتم العشري الدالة التي نرمز إليها بالرمز log والمعرفة على $]0,+\infty[$ بـ: $\log x = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$.

مثال : $\log 10 = \dfrac{\ln 10}{\ln 10}$ أي : $\log 10 = 1$.

خواص ونتائج: من أجل كل عددين حقيقيين موجبين تماما a ، b لدينا: $\log(ab) = \log a + \log b$ ، $\log \dfrac{a}{b} = \log a - \log b$ ، من أجل كل n من $\mathbb{Z}$: $\log a^n = n \log a$ ، الدالة log متزايدة تماما على $]0,+\infty[$

ملاحظات: • من أجل كل x من $]0;+\infty[$ فإن : $\log'(x) > 0$.

• الخواص التحـليلية للدالة "ln" تبقى صحيـحة للدالة "log" .

• التمثيل البياني للدالة "log" يستنتج من التمثيل البياني للدالة "ln" .

التقويم:

تمارين: تمرين: 100 ، 101 صفحة 109 .

مسألة: صفحة 99 . (للحل)

ملاحظة : لدالة اللوغاريتم العشريـ "log" تطبيقات مختلفة وهامة في عدة مواد وبصفة خاصة الفيزياء و الكمياء - الإقتصاد، الجغرافيا . (انظر التمرين المحلول "2" ص 93 من الكتاب المدرسيـ).

بِاَلْتَوْفِيقْ

المستـــــوى: 3 علوم تجريبية ميـــــدان التعَّلم: الدّوال القوى و الجذور النونية التزايد المقارن.

الموضـــــوع: الدّوال القوى و الجذور النونية الكفاءات المستهدفة: حل مشكلات بتوضيف دوال القوى

المـدة الزمنية: سا الوسائـل التعليميــة: الكتاب المدرسي - منتديات التعليم.

نشاط الأول (بتصرف) صفحة 120

$(1-VI)$ دوال القوى

اذا كان b, a عددان حقيقيان حيث : $a > 0$

أ) تعريف :

تقبل العلاقة : $a^b = e^{b\ln a}$.

أمثلة: (1 $3^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}\ln 3}$ ، (2 $\left(\frac{2}{3}\right)^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2}\ln\frac{2}{3}}$.

2. بعض الدساتير

ب) خواص : b, a عددان؛ حقيقيان موجبان تماما و y, x عددان حقيقيان؛

$$a^x.a^y = a^{x+y} \quad (1) \qquad \frac{a^x}{a^x} = a^{x-y} \quad (2) \qquad a^{-x} = \frac{1}{a^x} \quad (3)$$

$$(a^x)^y = a^{xy} \quad (4) \qquad (ab)^x = a^x.b^x \quad (5)$$

$$(\frac{a}{b})^x = \frac{a^x}{b^x} \quad (6) \qquad \ln(a^x) = x\ln a$$

3. دالة جديدة

تعريف : تسمى الدالة f العرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة $f(x) = a^x = e^{x\ln a}$ ؛ الدالة الأسية ذات الأساس a.

أمثلة:

1) الدالة f العرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = 2^x$ هي الدالة الأسية ذات الأساس 2.

2) الدالة f العرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ الدالة الأسية ذات الأساس $\frac{2}{3}$.

التقويم:

تمارين: g, f هما الدّالتان المعرفتان على $\mathbb{R}$

كمايلي : $f(x) = 5^x$ ، $g(x) = (0.2)^x$ $(C_g), (C_f)$ هما ؛ «لى الترتيب ؛ التمثيلان البيانيان g, f في معلم م ، $(o; \vec{i}; \vec{j})$.

1. ادرس تغيرات كل من g, f .
2. بين أنّ (C_f) وَ (C_g) متناظران بالنسبة إلى حامل محور التراتيب.
3. أنشىء في معلم ؛ (C_f) وَ (C_g) .

$VI - 2)$ الدوال الجذور النونية

أ) تعريف :

يسمى العدد الحقيقي الموجب b الجذرقلنوني للعدد a ، ونرمز له بالرمز : $\sqrt[n]{a}$

اذنّ : إذا كان : b, a عددين حقيقيين موجبين فإنّ : $b^n = a$ معناه $b = \sqrt[n]{a}$

أمثلة:

1. $\sqrt{4} = 2$ $\sqrt[3]{27} = 3$ $\sqrt[4]{625} = 5$

ب) تعريف :

الدّالة f المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ كمايلي : $f(x) = \sqrt[n]{5}$ حيث : n عدد طبيعي و $n \geq 2$ تسمى الجذر النوني

ب) تمرين :

n عدد طبيعي حيث : $n \geq 2$ f_n الدّالة المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ كمايلي : $f_n(x) = \sqrt[n]{x}$.

1. ادرس قابلية اشتقاق الدّالة f_n عند القيمة 0 . فسر النتيجة بيانيا .
2. ادرس تغيرات الدّالة f_n .

$VI-3)$ التزايد وَ المقارنة

أ) التزايد المقارن للدّالة $''exp''$ و الدّالة الحيادية :

- $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$
- حساب $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty}xe^x$ نضع : $U=-x$ عندها يكون : $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty}xe^x=0^-$.

ب) التزايد المقارن للدّالة $''\ln''$ و الدّالة الحيادية :

- حساب $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\dfrac{\ln x}{x}$

نضع : $U=\ln x$ عندها يكون : $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0^+$

- حساب $\lim\limits_{x\longrightarrow0^+}x\ln x$.

نضع : $U=\dfrac{1}{x}$ عندها يكون : $\lim\limits_{x\longrightarrow0^+}x\ln x=0^-$.

ج) التزايد المقارن لكل من $''exp''$ ، $''\ln''$ و الدوال القوى :

n عدد طبيعي غير معدوم

- $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\dfrac{e^x}{x^n}=+\infty$ • $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty}x^ne^x=0$.
- $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\dfrac{\ln x}{x^n}=0^+$ • $\lim\limits_{x\longrightarrow0^+}x^n\ln x=0^-$.

التقويم :

تمارين: تمرين: 40 ، 43, 42, 41 وَ 43 صفحة 136 .

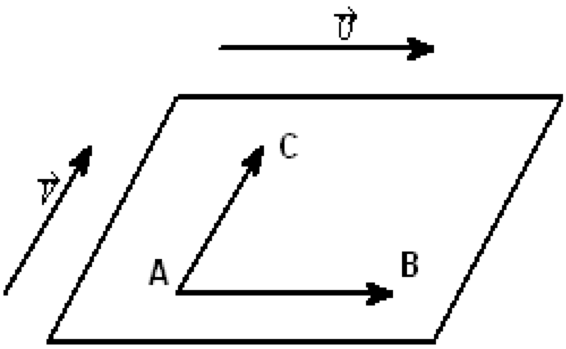
بِالتَّوْفِيقْ

المستـــــوى: 3 علوم تجريبية   ميـــــــدان التعَّلم : الجداء السلمي في الفضاء .
الموضــــوع: المستقيم و المستوى في الفضاء الكفاءات المستهدفة: تعامد مستقيمين - تعامد مستويين تعامد مستقيم وَ مستو.
المــدة الزمنية: سا   الوسائـل التعليميـــة: الكتاب المدرسي - منتديات التعليم.

نشاط الأول صفحة 190

$VII-1$) الجداء السلمي في الفضاء

$\vec{U}$ ، $\vec{V}$ شعاعان للفضاء وَ A, B وَ C نقط من الفضاء حيث :



$\overrightarrow{AB} = \vec{U}$ وَ $\overrightarrow{AC} = \vec{V}$.

(P) مستوي يشمل النقط A, B وَ C

تعريف : الجداء السلمي للشعاعيّن $\vec{U}$ ، $\vec{V}$ في اللفضاء هو الجداء السلمي للشعاعين $\overrightarrow{AB}$ وَ $\overrightarrow{AC}$ في المستوى (P) .

ملاحظة :

من هذا التعريف أنّ كل الخواص للجداء السلمي في المستوي تطبق على الأشعة من نفس المستوى في الفضاء.

ب) العبارة التحليلية :

إذا كان : $\vec{U} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ، $\vec{V} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ شعاعين للفضاء المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس فإنّ :

$\vec{U}.\vec{V} = xx' + yy' + zz'$.

مثال :

$\overrightarrow{U} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ ، $\overrightarrow{V} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3' \\ -1 \end{pmatrix}$ شعاعان للفضاء المنسوب إلى معلم م م ·

لدينا : $\overrightarrow{U}.\overrightarrow{V} = 0$ إذن : $\overrightarrow{U}$ وَ $\overrightarrow{V}$ متعامدان ·

نتيـجة:

إذا كان : $B(x_B; y_B; z_B), A(x_A; y_A; z_A)$ نقطتيين من الفضاء المنسوب إلى م م فإنّ : $AB = \sqrt{(x_B - xA)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$ ·

مثـــــــال:

$B(0; 2; -1), A(2; 1; -3)$ نقطتان من الفضاء المنسوب إلى م م م

لدينا : $AB = 3$ ·

التقويم:

تمارين: $D(5; 2; -1)$ وَ $C(1; -1; 0), B(0; 3; 4), A(1; 1; 2)$ نقط من المستوى المنسوب إلى م م م

– بين أنّ المستقيمين (AB) وَ (CD) متعامدان·

تمارين: 01 صفحة 208 ·

بِاَلْتَوْفِيقْ

المستــــوى: 3 علوم تجريبية	ميـــــدان التعلّم: الجداء السلمي في الفضاء .
الموضــوع: المستقيم و المستوى في الفضاء	الكفاءات المستهدفة: توظيف الجداء السلمي لتعيين معادلة ديكارتية لمستوى وَ الوضع النسبي للمستويين.
المـدة الزمنية: سا	الوسائـل التعليميـة: الكتاب المدرسي - منتديات التعليم .

$VI - 2$ المعادلات الديكارتية لمستوى:

أ) تعريف:

نسمي شعاعا عموديا (ناظميا) على مستوى (P) كل شعاع غير معدوم عمودي على شعاعين غير مرتبطين من المستوى (P) .

مثـــــــال :

الفضاء منسوب إلى م م م $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

- الأشعة $\vec{i}, \vec{j}$ وَ $\vec{k}$ عمودية على الترتيب على المستويات : $(yoz), (xoz)$ وَ (xoy) .

ملاحظة: اذا كان $\vec{n}$ شعاعا عموديا (ناظميا) على مستوى (P) فإنّ :

1. الشعاع $\vec{U}$ عمودي على أي شعاع من (P) .
2. كل مستقيم الشعاع $\vec{n}$ شعاع توجيه له عمودي على (P) .

ب) تميز مستوى :

A نقطة من الفضاء وَ $\vec{n}$ شعاع غير معدوم للفضاء.

- مجموعة النقط M من الفضاء حيث : $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$ هي المستوى الذي يشمل النقطة A و الشعاع $\vec{n}$ شعاع ناظمي له.

مثـــــــال :

مجموعة النقط M من الفضاء حيث : $\overrightarrow{oM}.\vec{i} = 0$ هي المستوى الذي يشمل المبدء o وَ $\vec{i}$ شعاع ناظمي له أي المستوى (yoz) .

ج) خـــــاصية :

في الفضاء المنسوب إلى م م م .

1. كل مستوى الشعاع $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\overrightarrow{U}$ ناظمي له معرف بالمعادلة الديكارتية $ax+by+cz+d=0$ حيث : a, b, c وَ d ثوابت حقيقية.

2. مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء المعرف بالمعادلة $ax+by+cz+d=0$ حيث : a, b, c وَ d ثوابت حقيقية. مع a, b وَ c لا تنعدم معا هي المستوى الذي الشعاع $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\overrightarrow{U}$ ناظمي له.

مثــــــــال :

في الفضاء المنسوب إلى م م م

مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء و المعرفة بالمعادلة $2x-y+5=0$ هي المستوى الذي الشعاع $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\overrightarrow{U}$ ناظمي له.

التقويم :

تمارين: 13, 14, 15 وَ 17 صفحة 209 وَ 208

بِالْتَوْفِيقْ

المستـــــوى: 3 علوم تجريبية		ميــــــدان التعلّم : الجداء السلمي في الفضاء .

الموضـــــوع: المستقيم و المستوى في الفضاء		الكفاءات المستهدفة: توظيف الجداء السلمي لحساب المسافة بين نقطة و مستوى.

المـدة الزمنية: سا		الوسائـل التعليميـــة: الكتاب المدرسي - منتديات التعليم .

نشاط مقترح:

المستوى منسوب إلى م م م $(o;\overrightarrow{i};\overrightarrow{j})$ (Δ) المستقيم المعرف بالمعادلة $2x-3y-5=0$

1. احسب المسافة بين النقطة $A(3;2)$ وَ المستقيم (Δ) .

2. احسب المسافة بين النقطة $B(1;-1)$ وَ المستقيم (Δ) . ماذا تستنتج ؟

المسافة بين نقطة و مستوي:

الفضاء منسوب إلى م م م

المسافة بين امستوي (P) المعرف بالمعادلة $ax+by+cz+d=0$ وَ النقطة $A_0(x_0;y_0;z_0)$ هي :

$\dfrac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^+c^2}}$.

مثال:

الفضاء منسوب إلى م م م

(P) هو المستوى المعرف بالمعادلة : $2x+3y-1=0$ وَ $A(-1;0;5)$.

المسافة بين A وَ (P) هي : $\frac{3\sqrt{13}}{13}$.

التقويم:

تمارين: تمرين : 16 وَ 19 صفحة 209

: **تطبيق حول توظيف الجداء السلمي لتعين مجموعة النقط.** :

الفضاء منسوب إلى م م $(o;\overrightarrow{i};\overrightarrow{j})$.

ABC مثلث حيث : وَ $A(-3;2;-1)$ $B(-1;1;0)$ نقطتان من الفضاء

عين؛ في كل حالة من الحالات الأتية؛ مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء وكتب معادلة ديكارتية لها :

1) $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB}=0$ ، 1) $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB}=2$ ، 1) $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{MB}=0$ ، 4) $MA^2-MB^2=0$

المستــــوى: 3 علوم تجريبية
ميـــــدان التعّلم : الجداء السلمي في الفضاء .
الموضــــوع: التمثيل الوسيطي
الكفاءات المستهدفة: كتابة التمثيل الوسيطي لمستقيم في الفضاء.
المـدة الزمنية: سا
الوسائـل التعليميــة: الكتاب المدرسي - منتديات التعليم .

$VI - 3)$ المستقيمات و المستويات في الفضاء:

التمثيل الوسيطي لمستقيم في الفضاء:

الفضاء منسوب إلى معلم $A(x_A; y_A; z_A)$ نقطة من الفضاء $\vec{U}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$ شعاع غير معدوم للفضاء .

(Δ) المستقيم الذي يشمل النقط A وَ $\vec{U}$ شعاع توجيه له.

إنّ (Δ) مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء حيث : $\overrightarrow{AM} = \lambda.\vec{U}$ مع عدد حقيقي ،

$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-x_A\\ y-y_A\\ z-z_A\end{pmatrix}$ و لدينا : $\lambda\vec{U}\begin{pmatrix}\lambda\alpha\\ \lambda\beta\\ \lambda\gamma\end{pmatrix}$ أي :

$$\begin{cases} x = x_A + \lambda\alpha \\ y = y_A + \lambda\beta \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \\ z = z_A + \lambda\gamma \end{cases}$$

تسمى هذه الجملة تمثيلا وسيطا للمستقيم (Δ) و الوسيط هنا هو λ .

أمثلـــــــة:

الفضاء منسوب إلى م $(o; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

1. (xx') حامل محور الفواصل يشمل النقطة $O(0;0;0)$ وَ $\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$ شعاع توجيه له إذنّ المستقيم (xx')

معرف بالتمثيل الوسيطي التالي : $\begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \\ z = 0 \end{cases}$

2. (Δ) المستقيم الذي يشمل النقطة $A(1;0-1)$ وَ الشعاع $\vec{U}\begin{pmatrix}0\\3\\-3\end{pmatrix}$

المستقيم (Δ) معرف بالتمثيل الوسيطي : $(\lambda \in \mathbb{R})$ $\begin{cases} x = 1 \\ y = 3\lambda \\ z = -1 - 3\lambda \end{cases}$

3. (Δ) مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء حيث : معرف بالتمثيل الوسيطي :

$$\begin{cases} x = -\alpha \\ y = -2 + \alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R}) \\ z = 0 \end{cases}$$

إذنّ (Δ) هي المستقيم الذي يشمل النقطة $B(0;-2;0)$ وَ

$\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ $\vec{V}$ شعاع توجيه له .

4. (T) مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء حيث : $(\mu \in \mathbb{R})$ $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = \mu \end{cases}$

إذنّ (T) هي المستقيم الذي يشمل النقطة $O(0;0;0)$ وَ

$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ $\vec{k}$ شعاع توجيه له .

التقويم :

تمرين : تمرين : 2 صفحة 226 (حول استعمال التميل الوسيطي لمستقيم في الفضاء لحل مسائل الاستقامية).

تمرين : 4 صفحة 226 + سؤال بتصرف (حول الإنتقال من الشكل الوسيطي إلى المعادلة الديكارتية و العكس).

الوضع النسبي لمستقمين في الفضاء :

تمرين : $21, 20, 15$ وَ 22 صفحة 227 .

استعمال التمثيلات الوسيطية لحل مسائل التلاقي :

تمرين مقترح:

$(o;\overrightarrow{i};\overrightarrow{j};\overrightarrow{k})$ معلم للفضاء $A(1;0;0)$, $B(0;1;0)$, $C(0;1;0)$, $D(1;0;1)$, $E(0;0;1)$ وَ $F(1;1;0)$ نقط من الفضاء ٠

1. أكتب تمثيلا و سيطيا لكل من المستقيمات (AB), (CD) وَ (EF) ٠
2. استنتج أنّ المستقيمات (AB), (CD) وَ (EF) ٠ تتلاقى في نقطة يطلب تعينها ٠

الأوضاع النسبية لمستقيم و مستوى في فضاء :

تمرين : 26 صفحة 228 ٠

بِالْتَوْفِيقْ

المستـــــوى: 3 علوم تجريبية ميـــــدان التعلّم : الجداء السلمي في الفضاء .
الموضـــوع: التمثيل الوسيطي الكفاءات المستهدفة: كتابة التمثيل الوسيطي لمستوى في الفضاء.
المـدة الزمنية: سا الوسائـل التعليميـة: الكتاب المدرسي - منتديات التعليم .

التمثيل الوسيطي لمستوى في الفضاء:

الفضاء منسوب إلى م $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

$A(x_A;y_A;z_A)$ نقطة من الفضاء $\vec{U}=\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$ ، $\vec{V}=\begin{pmatrix}\alpha'\\\beta'\\\gamma'\end{pmatrix}$ شعاعان غير مرتبطين خطيا من الفضاء (P) هو المستوى في الفضاء المعيين بالمعلم $(A;\vec{U};\vec{V})$

إنّ (P) هو مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء حيث : $\overrightarrow{AM}=\lambda\vec{U}+t\vec{V}$

أي : $\begin{cases}x=x_A+\lambda\alpha+t\alpha'\\y=y_A+\lambda\beta+t\beta'\\z=z_A+\lambda\gamma+t\gamma'\end{cases}$ $(\lambda\in\mathbb{R},t\in\mathbb{R})$

♣ نسمي الجملة الأخيرة تمثيلا وسيطيا للمستوى (P) و الوسيطان هنا هما λ وَ t

أمثلـــــــة:

الفضاء منسوب إلى معلم $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

1. المستوى (xoz) معين بالمعلم $(o;\vec{i};\vec{k})$

اذنّ : (xoz) معرف بالتمثيل الوسيطي التالي : $\begin{cases}x=\lambda\\y=0\\z=t\end{cases}$ $(\lambda\in\mathbb{R},t\in\mathbb{R})$

2. (P) هو المستوى المعين بالمعلم $(A;\vec{U};\vec{V})$ حيث : $A(1;0;-2)$

$\vec{U}=\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$ وَ $\vec{V}=\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}$ المستوى (P) معرف بالتمثيل الوسيطي التالي :

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = \alpha \\ z = -2 - t + 3\alpha \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R})$$

3. (π) مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء حيث : $(t \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}) \quad \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = \alpha \end{cases}$

إنّ (π) هي المستوى المعين بالمعلم $(o;\vec{i};\vec{k})$

التقويم :

الإنتقال من التمثيل الوسيطي إلى معادلة ديكارتية أو العكس :

تمارين : تمرين : 40 صفحة 229 .

تمرين : 46 صفحة 230 .

استعمال التمثيلات الوسيطية لحل مسائل انتماء أربع نقط إلى نفس المستوى:

تمرين : 46 صفحة 230 .

الوضع النسبي لمستويين:

تمرين : 44 صفحة 229 .

تمرين : 28 صفحة 228 .

بِالْتَوْفِيقْ

المستــــــوى: 3 علوم تجريبية — ميــــــدان التعلّم: الجداء السلمي في الفضاء .

الموضـــــوع: التميز المرجحي — الكفاءات المستهدفة:

المــدة الزمنية: سا — الوسائـل التعليميـــة: الكتاب المدرسي - منتديات التعليم .

تميز المرج:

B, A وَ C ثلاث نقط من الفضاء ليست على استقامية و متمايزة مثنى مثنى

1) المستقيم (AB) هو مجموعة النقط M من الفضاء حيث : $\overrightarrow{AM} = \lambda.\overrightarrow{AB}$ حيث : $\lambda \in \mathbb{R}$

أي : $(1-\lambda)\overrightarrow{MA} + \lambda\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{0}$

لدينا : $(1-\lambda) + \lambda = 1 \neq 0$ اذنّ : M مرجح الجملة المثقلة : $\{A, (1-\lambda); (B, \lambda)\}$

ومنه المستقيم (AB) هو مجموعة مراجح الجمل $\{A, (1-\lambda); (B, \lambda)\}$ حيث : $(\lambda \in \mathbb{R})$.

القطعة $[AB]$ هي مجموعة الجمل $\{A, (1-\lambda); (B, \lambda)\}$ حيث : $(\lambda \in [0; 1])$.

2) المستوى (ABC) هومجموعة النقط M ن الفضاء حيث : $\overrightarrow{AM}m.\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}$ حيث : $m, t \in \mathbb{R}$

أي : $(1-m-t)\overrightarrow{MA} + m\overrightarrow{MB} + t\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0}$

لدينا : $(1-m-t) + m + t = 1 \neq 0$ اذنّ : M مرجح الجملة المثقلة : $\{A, (1-m-t); (B, m); (C, t)\}$.

التقويم:

تمرين تقويمي : الفضاء منسوب إلة م م م $(o; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j}; \overrightarrow{k})$.

ABC مثلث حيث : $A(1; 0; -1)$ ، $B(2; 2; 3)$ وَ $C(3; 1; -2)$.

- عين؛ في كل حالة من الحالات الاتية؛ مجموعة النقط $M(x; y; z)$ من الفضاء وكتب معادلة ديكارتية لها :

1. $||\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}|| = 2$
2. $||\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}|| = ||\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}||$
3. $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) = 0$

بِالتَّوْفِيق

المستـــــوى: 3 علوم تجريبية　　ميــــــــدان التعّلم : الأعداد المركبة.
المـوضــــوع: /　　الكفاءات المستهدفة: اجراء العمليات الحسابية على الأعداد المركبة.
المـدة الزمنية: سا　　الوسائـل التعليميــة: الكتاب المدرسي - منتديات التعليم.

نشاط مقترح:

نعتبر المعادلة الاتي ذات المجهول z : $z^2 - 4z + 125 = 0 \; \ldots \; (\star)$.

1. تأكد أنّ المعادلة $(\star)$ لا تقبل أي حل حقيقي.
2. تخيل عددا نرمز له $''i''$ حيث : $i^2 = -1$.

أ) تأكد أنّ $z^2 - 4z + 125 = (z-2)^2 - 121i^2$.

ب) استنتج أنّ المعادلة $(\star)$ تقبل حلين من الشكل $x + iy$ حيث y, x عددان حقيقيان.

$(1 - VII)$ تعريف:

نسمي عددا مركبا كل عدد z يكتب على الشكل $z = x + iy$ حيث y, x عددان حقيقيان وَ $i^2 = -1$.

أمثــــــلة: كل من : $2 + 3i$ ، $1 - i$ ، -2 ، $4i$ 0 هو عدد مركب.

ملاحظات :

1) نرمز إلى مجموعة الأعدد المركبة بالرمز $\mathbb{C}$.

2) z عدد مركب حيث : $z = x + iy$ مع y, x عددان حقيقيان .

- تسمى الكتابة $z = x + iy$ الشكل الجبريے (الكتابة الجبرية) للعددمركب z .
- يسمى العدد الحقيقي x الجزء الحقيقي للعددمركب z و نرمز إليه بالرمز $Re(z)$.
- يسمى العدد الحقيقي y الجزء التخيلي للعددمركب z و نرمز إليه بالرمز $Im(z)$.

أمثــــــلة :

1. z عدد مركب حيث : $z = 3 - 4i$.

إن z مكتوب على شكله الجبري حيث $Re(z) = 3$ وَ $Im(z) = -4$.

2. z عدد مركب حيث : $z = 4i$.

إن z مكتوب على شكله الجبري حيث $Re(z) = 0$ وَ $Im(z) = 4$.

3. z عدد مركب حيث : $z = 0$ ·

إن z مكتوب على شكله الجبري حيث $Re(z) = 0$ وَ $Im(z) = 0$ ·

- ذا كان $x = 0$ فإنّ : $z = iy$ ونقول أنّ z عدد تخيلي بحت (أو صرف أو محض)·
- ذا كان $y = 0$ فإنّ : $z = x$ ونقول أنّ z عدد حقيقي ·
- ذا كان $(z = 0)$ معناه : $(x = 0)$ وَ $(y = 0)$ ·

4. إذا كان z, z' عددان مركبان مكتوبين على شكليهما الجبريين : $z' = x' + iy', z = x + iy$

$(z = z')$ معناه $(x = x')$ وَ $(y = y')$ ·

5. قواعد الحساب في مجموعة $\mathbb{C}$ هي تلك المعروفة في المجموعة $\mathbb{R}$ مع الأخذ بعين الإعتبارات $i^2 = -1$ ·

التقويم :

تمارين : التمرين 23 صفحة 145 ·
التمرين 2 صفحة 144 ·
التمرين 29 صفحة 146 ·
تمرين مقترح :

1) أحسب كل من : i^4, i^3 ثمّ استنتج كلا من $i^{4k+3}, i^{4k+2}, i^{4k+1}, i^{4k}$ وَ k عدد طبيعي·

2) أحسب كلا من : i^{1432}, i^{2011} ·

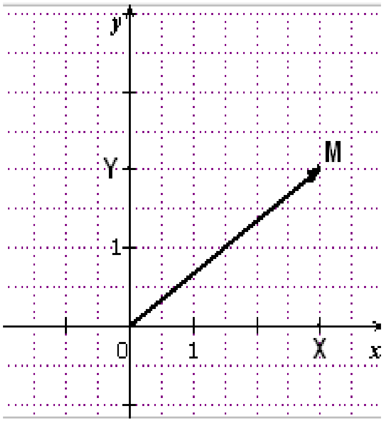
بِالْتَوْفِيقْ

المستوى: 3 علوم تجريبية ميدان التعلّم : الأعداد المركبة.
الموضوع: / الكفاءات المستهدفة: اجراء العمليات الحسابية على الأعداد المركبة.
المدة الزمنية: سا الوسائل التعليمية: الكتاب المدرسي - منتديات التعليم.

النشاط الثالث ص 121 :

التمثيل الهندسي لعدد مركب :

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.



z عدد مركب مكتوب على شكل الجبري : $z=x+iy$ ، نرفق إلى العددلمركب z النقطة $M(x,y)$.

- تسمى النقطة M صورة العدد المركب z وَ يسمى أيضا الشعاع $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{OM}$ صورة العدد المركب z .
- كل نقطة $M(x,y)$ هي صورة عدد مركب وحيد z حيث : $z=x+iy$.

◦ يسمى العدد المركب z لاحقة النقطة M و يسمى أيضا لاحقة الشعاع $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{OM}$.

أمثلة :

1. صورة العدد المركب 1 هي النقطة $I(1;0)$ وهي؛ أيضا لاحقة الشعاع $\overrightarrow{oI}$.
2. صورة العدد المركب i هي النقطة $J(0;1)$ وهي أيضا لاحقة الشعاع $\overrightarrow{oJ}$.
3. لاحقة النقطة $A(-3;2)$ هي العدد المركب $(-3+2i)$ وهي؛ أيضا لاحقة الشعاع $\overrightarrow{oA}$.

ملاحظات :

1) كل عدد حقيقي x صورته النقطة $M(x;0)$ فهي نقطة من حامل محور الفواصل. يسمي محور الفواصل المحور الحقيقي.

2) كل عدد تخيلي بحت iy صورته النقطة $M(0;y)$ فهي نقطة من حامل محور التراتيب. يسمي محور التراتيب المحور التخيلي.

3) يسمي المستويے المستوى المركب.

التقويم :

تمارين: التمرين 5 وَ 6 صفحة 144 .

تمرين مقترح: المستوى المركب منسوب إلى معلم متعمد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$. z عدد مركب معرف كمايلي : $z = x^2(1+i) + i(y-1) + x$ حيث y, x عددان حقيقيان.

1. عين (E_1) مجموعة النقط $M(x;y)$ من المستوى التي من أجها يكون z حقيقيا ثم أنشئها.
2. عين (E_2) مجموعة النقط $M(x;y)$ من المستوى التي من أجها يكون z تخيليا بحت ثم أنشئها.

بِالْتَوْفِيقْ

المستـــــوى: 3 علوم تجريبية   ميـــــــدان التعَلُّم : الأعداد المركبة.

الموضــــوع: /   الكفاءات المستهدفة: استعمال خواص مرافق عدد مركب.

المــدة الزمنية: 1 سا   الوسائـل التعليميــة: الكتاب المدرسي - منتديات التعليم.

نشاط :

المستوى المركب منسوب إلى معلم متعمد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$ ، A نقطة من المستوى لاحقتها z_A حيث $z_A = 3-2i$ وَ B نظيرة A بالنسبة إلى حامل محور الفواصل لاحقتها z_B

- أنشئ A وَ B ثم عين z_B .

مرافق عدد مركب :

تعريف : مرافق عدد مركب z مكتوب على شكله الجبري $z = x+iy$ هو العدد المركب الذي رمزه $\overline{z}$ و المعرف كمايلي : $\overline{z} = x - iy$.

مـــــلاحظة : في المستوي المركب اذا كانت M صورة عدد مركب z و كانت M' صورة مرافقه $\overline{z}$ فإنّ النقطتين M, M' متناظرتان بالنسبة إلى حامل محور الفواصل.

أمـــــثلة :

1) اذا كان $z = 3+i$ فإنّ : $\overline{z} = 3-i$.   2) اذا كان $z = -3-i$ فإنّ : $\overline{z} = -3+i$.

3) اذا كان $z = -2$ فإنّ : $\overline{z} = -2$.   4) اذا كان $z = -5i$ فإنّ : $\overline{z} = 5i$.

نتــــــائج :

z عدد مركب مكتوب على شكله الجبري $z = x+iy$ وَ $\overline{z}$ مرافقه أي : $\overline{z} = x - iy$.

1. $\overline{\overline{z}} = z$ و نقول أنّ z وَ $\overline{z}$ عددان مركبان مترافقان. 2. $z+\overline{z} = 2x$ ، 3. $z-\overline{z} = 2iy$.

4. (z حقيقي) معناه : $(\overline{z} = z)$ ؛ (z تخيلي بحت) معناه : $(\overline{z} = -z)$ ، 5. $z.\overline{z} = x^2 - y^2$

أمثــــلة : z عدد مركب حيث : $z = 2-3i$.

1) $z+\overline{z} = 8$ ، 2) $z-\overline{z} = -6i$ ، 3) $z.\overline{z} = 2$.

التقويم : تمارين: التمرين 11 صفحة 144

التمرين 15 صفحة 145 .

بِالْتَوْفِيق

المستـــــوى: 3 علوم تجريبية ميـــــدان التعَلم : الأعداد المركبة.
الموضـــوع: / الكفاءات المستهدفة: استعمال خواص مرافق عدد مركب.
المـدة الزمنية: سا الوسائـل التعليميــة: الكتاب المدرسي - منتديات التعليم .

خـــواص:

z عددان مركبان مكتوبان على شكليهما الجبريين $z = x + iy$ وَ $z' = x + iy$.

1) $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$ ، 2) $z \times z' = \overline{z} \times \overline{z'}$.

أمثـــلة : z عدد مركب مكتوب حيث : $z = (1 + 2i)(2 - 3i)$: لدنا $\overline{z} = (1 - 2i)(2 + 3i)$

3) اذا كان z عددا مركبا و كان n عددا طبيعيا غير معدوم فإن : $\overline{z^n} = \overline{z}^n$.

أمثـــلة : $z = \overline{(1 - 3i)^4}$ فإنّ : $(1 + 3i)^4$.

4) فرض أنّ : $z \neq 0$ $\overline{\frac{1}{z}} = \frac{1}{\overline{z}}$.

5) فرض أنّ : $z' \neq 0$ $\overline{\frac{z}{z'}} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$.

أمثـــلة : $\overline{\frac{1 + i}{2 - i}} = \frac{1 - i}{2 + i}$.

التقويم:

تمارين مقترحة : التمرين 1 : n عدد طبيعي

نضع : $z = (1 + 2i)^n + (1 - 2i)^n$ وَ $z' = (1 + 2i)^n - (1 - 2i)^n$.

بين أنّ : z حقيقي وَ أنّ z' تخيلي بـحت.

التمرين 2 : z عدد مركب : نضع $p(z) = z^3 - 4z^2 + z - 3$.

بين أنه إذا كان z جذرا لكثير الحدود $p(z)$ فإنّ $\overline{z}$ أيضا جذر لـ : $p(z)$

التمرين 18 صفحة 145 .

بِالْتَوْفِيقْ

المستـــــوى: 3 علوم تجريبية ميـــــــدان التعلّم : الأعداد المركبة.
الموضـــــوع: الطويلة لعدد مركب الكفاءات المستهدفة: حساب الطويلة و عمدة عدد مركب.
المـدة الزمنية: 1 سا الوسائـل التعليميـــة: الكتاب المدرسي - منتديات التعليم.

الطويلة لعدد مركب - و عمدة لعدد مركب غير معدوم:

نشـــاط المستوي المركب منسوب إلى م م م $(o;\vec{i};\vec{j})$ ، A النقطة من المستوى المركب ذات الإحداثيتين $(3;4)$ لاحقتها z_A .

عين كل من : z_A ، الطول OA ، ثمّ أنشئ النقطة A .

تعريف: يسمى الطول OA طويلة العدد امركب z_A و نرمز إليه بالرمز $|z_A|$.

الطويلة لعدد مركب :

المستوي المركب منسوب إلى م م م $(o;\vec{i};\vec{j})$.

z عدد مركب مكتوب على شكله الجبري $z=x+iy$ صورته النقطة M .

تعريف: طويلة العدد المركب z هي العدد الحقيقي الموجب الذي رمزه $|z|$ و المعرف كمايلي : $|z|=OM$ أي : $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$.

أمثـــــلة :

(1) $|1+2i|=\sqrt{2}$ (2) $|1-2i|=\sqrt{2}$ (3) $|-1-2i|=\sqrt{2}$

(4) $|-2|=2$ (5) $|-2|=2$

(6) $|3i|=3$ (7) $|-3i|=3$

مـــــلاحضات :

1. إذا كان z عددا مركبا فإنّ : $|\overline{z}|=|z|$ ، $|-z|=|z|$

الرسم :

2. B, A نقطتان من المستويـ المركب لاحقتاهما على الترتيب z_B, z_A .

نعلم أنّ لاحقة الشعاع $\vec{AB}$ هو العدد المركب z_B-z_A اذنّ : $||\vec{AB}||=AB=|z_B-z_A|$.

أمثـــــلة : B, A نقطتان من المستويـ المركب لاحقتاهما على الترتيب z_B, z_A حيث $z_B=-\sqrt{3}+i, z_A=\sqrt{3}+i$. يكون $AB=2\sqrt{3}$.

التقويم :

تمارين: التمرين 30 وَ 31 صفحة 146 ٠
التمرين 112 صفحة 153 ٠

بِالْتَوْفِيقْ

المستـــــوى: 3 علوم تجريبية ميــــــدان التعَلّم : الأعداد المركبة.
الموضـــــوع: عمدة لعدد مركب غير معدوم الكفاءات المستهدفة: حساب الطويلة و عمدة عدد مركب.
المــدة الزمنية: 1 سا الوسائـل التعليميـــة: الكتاب المدرسي - منتديات التعليم .

نشـــاط: المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o; \vec{i}; \vec{j})$.

A النقطة من المستوى المركب لاحقتها z_A حيث : $z_A = 1 + i$.

أنشيء النقطة A . – عين قيسا؛ بالرديان؛ للزاوية الموجهة $(\vec{i}; \overrightarrow{OA})$.

تعريف: نسمي كل قيس؛ بالرديان؛ للزاوية الموجهة $(\vec{i}; \overrightarrow{OA})$ عمدة للعدد المركب z_A و نرمز إليها بالرمز $arg(z_A)$.

إذن : $arg(z_A) = \frac{\pi}{4}$.

عمدة لعدد مركب غير معدوم :

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o; \vec{i}; \vec{j})$.

تعريف :

نسمي عمدة للعدد المركب z كل قيس؛ بالرديان؛ للزاوية الموجهة $(\vec{i}; \overrightarrow{OA})$ و نرمز إليها بالرمز $arg(z)$.

أمثـــــلة :

(1) $arg(1) = 0$. (2) $arg(2) = 0$. (3) $arg(-1) = \pi$ (4) $arg(-3) = \pi$

(5) $arg(i) = \frac{\pi}{2}$. (6) $arg(2i) = \frac{\pi}{2}$. (7) $arg(-i) = -\frac{\pi}{2}$. (8) $arg(-3i) = -\frac{\pi}{2}$

مــــــلاحظات :

1) عمدة العدد المركب المعدوم غير معرفة. 2) z عدد مركب غير معدوم .

أ) إذا كان θ عمدة لـ z فإن : $\theta + 2k\pi; (k \in \mathbb{Z})$ كما نكتب : $arg(z) \equiv \theta[2]$

ب) الرســــــم كل من $z, -z, \bar{z}$:

ج)

- z حقيقي معناه $arg(z) = k\pi$: $(k \in \mathbb{Z})$.
- z تخيلي بحت معناه $arg(z) = \frac{\pi}{2} + k\pi$: $(k \in \mathbb{Z})$

3) B, A نقطتان متمايزتان من المستوى المركب المنسوب إلى م، م، م، $(o;\vec{i};\vec{j})$ لاحقتاهما على الترتيب z_B, z_A .

نعلم أنّ لاحقة الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هو العدد المركب $z_B - z_A$ أذنّ : $(\vec{i};\overrightarrow{AB}) = arg(z_B - z_A)$

مثـــــال: $A(1;2)$ ، $B(2;-1)$ نقطتان من المستوى المركب المنسوب إلى م، م، م، $(o;\vec{i};\vec{j})$.

لدينا : $(\vec{i};\overrightarrow{AB}) = arg(z_B - z_A) = \frac{\pi}{4}$.

الإنتقال من الشكّل الجبري إلى الشكل المثلثي و العكس:

الشكل المثلثي لعدد مركب غير معدوم :

المستوى المركب المنسوب إلى م، م، م، $(o;\vec{i};\vec{j})$.

z عدد مركب غير معدوم مكتوب على شكله الجبري $z = x + iy$ وَ M صورته القطية في المستوى المركب.

الرسم

لدينا $\cos\theta = \frac{x}{r}$ وَ $\sin\theta = \frac{y}{r}$ ومنه $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ... $(\star)$

تسمى الكتابة $(\star)$ الشكل المثلثي للعدد المركب z حيث : $r = |z|$ وَ $\theta = \arg(z)$ مع $\begin{cases} \cos\theta = \frac{x}{r} \\ \sin\theta = \frac{x}{r} \end{cases}$

أمثلـــــــة: z_4, z_3, z_2, z_1 وَ z_5 أعدد مركبة حيث $z_4 = \frac{1}{2}i, z_3 = i, z_2 = -\sqrt{3}, z_1 = 3$ وَ $z_5 = -7i$.

الشكل المثلثي لكل من هذه الأعداد المركبة هو :

(1) $z_1 = 3(\cos 0 + i\sin 0)$. (2) $z_2 = \sqrt{3}(\cos\pi + i\sin\pi)$. (3) $z_3 = (\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$

(4) $z_4 = \frac{1}{2}(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$. (5) $z_5 = -7(\cos\frac{-\pi}{2} + i\sin\frac{-\pi}{2})$

ملاحـــــــات:

1. إذا كان z عددا مركبا حيث : $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ مع $r \in \mathbb{R}_+^*$ وَ $\theta \in \mathbb{R}$ فإنّ :

$$r = |z| \text{ وَ } \theta = \arg(z)$$

أمثلـــــــة:

إذا كان z عددا مركبا حيث : $z = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$ مع فإنّ : $|z| = \sqrt{2}$ وَ $\arg(z) = \frac{\pi}{4}$.

2. z_1, z_2 عددان مركبان غير معدومين ، اذا كانت r_1 طويلة z_1 وَ θ_1 عمدة له وَ كانت r_2 طويلة z_2 وَ θ_2 عمدة له فإنّ :

$$\begin{cases} r_1 = r_2 \\ \theta_1 = \theta_2 + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$ معناه

3. • إذا كان z عددا مركبا طويلته ١ وَ θ عمدة له فإنّ : $z = \cos\theta + i\sin\theta$ أي : $z = e^{i\theta}$ يسمى هذا الترميز ترميز أولر (*Euler*).

أمثلـــــــــــة:

$e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$.

$e^{i\frac{\pi}{4}} = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$.

• إذا كان z عددا مركبا غير معدوم طويلته r وَ θ عمدة له فإنّ : $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ونكتب $z = e^{i\theta}$ اذن : $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ تسمى هذا الكتابة الشكل الأسي للعدد المركب z .

مثـــــــــال: z عدد مركب طويلته r وَ $\frac{\pi}{3}$ عمدة له .

الشكل المثلثي لـ z هو : $z = \sqrt{3}(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$.

الشكل الأسي لـ z هو : $z = e^{i\frac{\pi}{3}}$.

التقويم:

تمارين: التمرين 44 وَ 49 صفحة 147 .

التمرين 39 صفحة 146 .

بِالْتَوْفِيقْ