المحور الخامس مذكرة رقم:5 المتتاليات العددية

أستعد للباكالوريا

السنة الدراسية 2015/2014	YousfiMath Yousfisifou804@yahoo.fr	اعداد الاستاذ يوسفي عبد الرحمن

المحور الخامس ا لمتتاليات

المستوى : الثالثة تقني ورياضيـــــــــــات علوم تجريبية

الموضوع: المتتاليات suites

كفاءات المحور

الكفاءة المستهدفة

- استعمال التمثيل البياني لتخمين سلوك ونهاية متتالية عددية.
- إثبات خاصية بالتراجع.
- دراسة سلوك ونهاية متتالية.
- معرفة واستعمال مفهوم متتاليتين متجاورتين.
- حل مشكلات توظف فيها المتتاليات والبرهان بالتراجع.

المكتسبات القبلية

- المتتاليات العددية

مخطط الدرس	التوقيت		التوقيت
تذكير بالمتتاليات	4 سا	توليد متتالية عددية	3 سا
1: اتجاه تغير متتالية عددية	2 سا	1: التمثيل البياني لمتتالية تراجعية	2 سا
2:المتتالية الحسابية	1 سا	2: خواص متتالية عددية	1 سا
3: المتتالية الهندسية	1 سا	معالجة	5 سا
الاستدلال بالتراجع	2 سا		
1: مبدا الاستدلال بالتراجع	2 سا		
نهاية متتالية عددية	3 سا		
1: تقارب متتالية	1 سا		
2:متتالية محدودة	1 سا		
3: متتاليات متجاورة	1 سا		

وثائق التحضير	الوسائل البيداغوجية	نقد ذاتي
• دليل الأستاذ • الكتاب المدرسي • المنهاج	• السبورة • جهاز داتاشو	

المؤسســـــة:	المستــــــــوى: الثالثة رياضيات
السنة الدراسية:	ميــدان التعلم: تحليل
التاريـــــــــخ:	الوحدة التعلمية: المتتاليات
توقيت الحصة :	موضوع الحصة : المتتالية الحسابية والهندسية

المكتسبات المستهدفة: تذكير بالمتتالية الحسابية والهندسية

الأنشطة المقترحة وطبيعتها	الإنجاز (سـير الحصة)	المنهاج
	(see below)	يتم بهذه المناسبة التذكير بالمتتاليات الحسابية والمتتاليات الهندسية.

نشاط رقم 1

(V_n) متتالية عددية حيث : $V_n=\dfrac{2n+1}{n+1}$.

1/ احسب : $V_0\,;V_1\,;V_2\,;V_3$ م خمن اتجاه تغير المتتالية (V_n)

2/أدرس اتجاه تغير المتتالية (V_n)

3/ نعتبر الدالة f المعرفة على $[0;+\infty[$ حيث : $f(x)=\dfrac{2x+1}{x+1}$

← أحسب $f'(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f

← من أجل كل عدد طبيعي n تحقق أن : $1\le V_n<2$

نشاط رقم 1 الحل

(V_n) متتالية عددية حيث : $V_n=\dfrac{2n+1}{n+1}$.

1/ نجد ان $V_0=1\,;V_1=3/2\,;V_2=8/5\,;V_3=21/13$ م

اتجاه تغير المتتالية (V_n) من خلال الحدود نجد انها متزايدة

2/ اتجاه تغير المتتالية (V_n)

يتم دراسة اتجاه تغير المتتالية بحساب الفرق $V_{n+1}-V_n$

نجد $V_{n+1}-V_n=\dfrac{(2n+3)(n+1)-(2n+1)(n+2)}{(n+1)(n+2)}=\dfrac{5}{(n+1)(n+2)}$

ومنه $V_{n+1}-V_n\succ 0$ انها متزايدة

3/ نعتبر الدالة f المعرفة على $[0;+\infty[$ حيث : $f(x)=\dfrac{2x+1}{x+1}$

← $f'(x)=\dfrac{1}{(x+1)^2}$

جدول تغيرات الدالة f

x	0 $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	1 ↗ 2

← من أجل كل عدد طبيعي n بما ان $0\le n<+\infty$ ومنه $\lim\limits_{n\to 0}V_n=\lim\limits_{n\to 0}\dfrac{2n+1}{n+1}=1$

$\lim\limits_{n\to+\infty}V_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2n+1}{n+1}=2$ هذا يعني ان $1\le V_n<2$

نشاط رقم 2

(U_n) متتالية عددية حيث : $U_{n+1}=\dfrac{1}{2}U_n+\dfrac{1}{2}$ و $U_0=7$

(Δ) مستقيم معادلته $y=x$ و g دالة عددية حيث $g(x)=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}$

1) انشئ (Δ) و المنحنى (C_g)

2) لاحظ أن $U_{n+1}=g(U_n)$ ثم مثل دون حساب الحدود $U_1\,;U_2\,;U_3;U_4$ على محور الفواصل

3) خمن اتجاه تغير المتتالية (U_n)

4) إذا علمت أن $U_n\ge 1$ أدرس اتجاه تغير المتتالية (U_n)

نشاط رقم 2 الحل

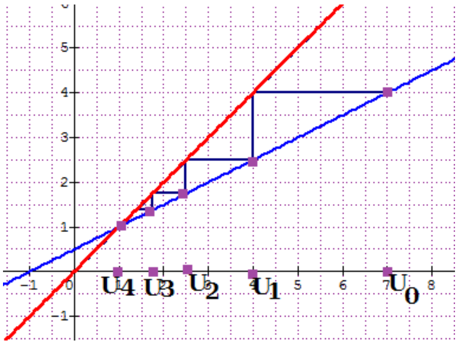
(U_n) متتالية عددية حيث : $U_{n+1}=\frac{1}{2}U_n+\frac{1}{2}$ و $U_0=7$

(Δ) مستقيم معادلته $y=x$ و g دالة عددية حيث

$g(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

5) انشىء (Δ) و المنحنى (C_g)

6) $U_{n+1}=g(U_n)$ الحدود $U_4;U_3;U_2;U_1$ على محور الفواصل



7) اتجاه تغير المتتالية (U_n) متناقصة

8) إذا علمت أن $U_n\geq 1$ أدرس اتجاه تغير المتتالية (U_n)

لدينا الفرق $U_{n+1}-U_n=\frac{1}{2}U_n+\frac{1}{2}-U_n=-\frac{1}{2}U_n+\frac{1}{2}$

وبما ان $U_n\geq 1$ فان $-(1/2)U_n+(1/2)\leq 0$ ما يعني ان $U_{n+1}-U_n\leq 0$ متناقصة

1/ تذكير بالمتتاليات

1.1 المتتالية العددية

تعريف

نسمي متتالية عددية حقيقية كل دالة معرفة من $\mathbb{N}$ نحو $\mathbb{R}$ ترفق بكل عدد طبيعي $n\geq n_0$ ، n_0 معطى، العدد u_n. ونرمزلها ب: u_n أو v_n.

يمكن التعبير عن المتالية باستعمال دالة f و نكتب $u_n=f(n)$

مثال $u_n=-n^2+3$ حيث $f:x\mapsto -x^2+3$.

.... $\mathbb{N}\mapsto\mathbb{R}$.

1) توليد متتالية عددية

1.1: مولدة بحدها العام

تعريف

إذا كان الحد العام لمتتالية عددية معطى بدلالة n فإنها معرفة تماما . و لحساب حد u_{n_0} من الحدود يكفي تعويض n بالقيمة n_0

مثال: المتتالية u المعرفة على $\mathbb{N}$ حيث $u_n=-n^2+3$ معرفة بحدها العام .ويمكن حساب أي حد من الحدود

ملاحظة: لابد من التمييز بين متتالية (u_n) و بين حدها u_n الذي هو عدد حقيقي.

2.1: مولدة بعلاقة تراجعية

تعريف

يمكن تعريف متتالية بالتراجع و ذلك بإعطاء:

1) قيمة الحد الأول.

2) علاقة تراجعية تربط بين حدين متتابعين من المتتالية

لتكن دالة عددية f معرفة على مجال D وحيث أن من أجل $x\in D$ فإن $f(x)\in D$. المتتالية u المعرفة بحدها الأول u_{n_0} و العلاقة $u_{n+1}=f(u_n)$ تسمى متتالية تراجعية.تسمح هذه العلاقة بحساب u_{n+1} إذا علم u_n من أجل كل $n\geq n_0$

مثال: نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ $u_0=2$ و من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=3u_n-2$.

تسمح علاقة $u_{n+1}=3u_n-2$ بحساب قيمة الحد u_{n+1} إذا علمت قيمة الحد الذي يسبقه u_n

معرفة قيمة u_0 تسمح من حساب قيمة u_1 و هكذا فإن $u_1=3\times u_0-2=3\times 2-2=4$.

مثال1: نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بالعلاقة التراجعية $\begin{cases} u_0=-1 \\ u_{n+1}=2u_n+5 \end{cases}$ احسب u_1، u_2، u_3

الحل1: لدينا $u_1=2u_0+5=3$، $u_2=2u_1+5=2\times 3+5=11$.

$u_3=2u_2+5=2\times 11+5=27$ و هكذا ...

مثال2: نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0=1$ و من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=3u_n$.

الحل2: لدينا $u_0=1$ و منه $u_1=3u_0=3$، $u_2=3u_1=9$، $u_3=3u_2=27$ و هكذا ...

✓ ملاحظة: في الحد u_n، n هو دليل الحد وليس رتبته .

ملاحظة: تعرف متتالية بعلاقة تراجعية كذلك بهذه الصيغة $\begin{cases} u_0=1, u_1=3 \\ u_{n+2}=2u_{n+1}+5u_n \end{cases}$

2 إتجاه تغير متتالية عددية

1: متزايدة

تكون متتالية $(u_n)_{n\ge n_0}$ متزايدة (متزايدة تماما على الترتيب) إبتداءا من الرتبة n_0 إذا وفقط إذا كان $u_{n+1}\ge u_n$ ($u_{n+1}>u_n$ على الترتيب) من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0.

2: متناقصة

تكون متتالية $(u_n)_{n\ge n_0}$ متناقصة (متناقصة تماما على الترتيب) إبتداءا من الرتبة n_0 إذا وفقط إذا كان $u_{n+1}\le u_n$ ($u_{n+1}<u_n$ على الترتيب) من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0

3: ثابتة

تكون متتالية $(u_n)_{n\ge n_0}$ ثابتة إبتداءا من الرتبة n_0 إذا و فقط إذا كان $u_{n+1}=u_n$. من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0.

مثال2: نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة ب $u_n=n^2+2$ اثبت أنها متزايدة

$\begin{cases} u_{n+1}-u_n=(n+1)^2+2-n^2-2 \\ u_{n+1}-u_n=n^2+2n+4-n^2-2 \\ u_{n+1}-u_n=2n+2 \end{cases}$ لاحظ بما ان $n\ge 0$ فان $2n+2\ge 0$ فهي متزايدة تماما

4: رتيبة

المتتالية الرتيبة على مجال I من $\mathbb{N}$ (رتيبة تماما على الترتيب) هي متتالية متزايدة (متزايدة تماما على الترتيب) على المجال I من $\mathbb{N}$ أو متناقصة (متناقصة تماما على الترتيب) على المجال I من $\mathbb{N}$ (رتيبة تماما على الترتيب)

تطبيق1: لتكن المتتاليات (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي :

$u_n=-5n+1$. $u_n=2n-4$. $u_n=n^2+1$ أدرس اتجاه تغيرها .

الحل: $u_n=n^2+1$ لدينا $u_{n+1}=(n+1)^2+1=n^2+2n+2$ ومنه

$u_{n+1}-u_n=n^2+2n+2-n^2-1=2n+1$

$2n+1>0$ لأن n عدد طبيعي وبالتالي المتتالية (u_n) متزايدة

خلاصة: لتكن (u_n) متتالية معرفة في $\mathbb{N}$.

- (u_n) متزايدة على $\mathbb{N}$ إذا وفقط إذا كان: من أجل كل n من $\mathbb{N}$، $u_n\le u_{n+1}$.
- (u_n) متناقصة على $\mathbb{N}$ إذا وفقط إذا كان: من أجل كل n من $\mathbb{N}$، $u_n\ge u_{n+1}$.
- (u_n) ثابتة على $\mathbb{N}$ إذا وفقط إذا كان: من أجل كل n من $\mathbb{N}$، $u_n=u_{n+1}$.

3: دراسة إتجاه تغير متتالية

1: الفرق
دراسة اشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$

مثال: ادرس اتجاه تغير المتتالية المعرفة بما يلي:

$u_0 \in \mathbb{R}$ ومن أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1$

1. لدراسة اتّجاه تغيّر المتتالية (u_n) نقوم بحساب الفرق $u_{n+1} - u_n$:

من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = u_n^2 - 2u_n + 1 = (u_n - 1)^2 \geq 0$

إذن: (u_n) متتالية متزايدة على $\mathbb{N}$.

2: المقارنة
مقارنة $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ بالعدد 1 (بالنسبة إلى متتالية حدّها العام موجب تماما)

مثال: ادرس اتجاه تغير المتتالية المعرفة بما يلي:

من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$: $v_n = \frac{n}{2^n}$

2. بما أنّ الحدّ العام للمتتالية (v_n) موجب تماما من أجل كلّ n من $\mathbb{N}^*$ ، فلدراسة اتجاه تغيّرها يكفي حساب حاصل القسمة $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ ومقارنته بالعدد 1.

لدينا: $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{n+1}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n} = \frac{n+1}{2n}$ وبما أنّ: $1 - \frac{n+1}{2n} = \frac{n-1}{2n} \geq 0$

نستنتج أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$، $\frac{v_{n+1}}{v_n} \leq 1$. إذن: (v_n) متناقصة على $\mathbb{N}^*$.

3: الدالة
كتابة $u_n = f(n)$ ، ودراسة تغير الدالة f على المجال $[0; +\infty[$

مثال: ادرس اتجاه تغير المتتالية المعرفة بما يلي:

من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $w_n = \frac{n^2+5n+5}{n+4}$

3. نضع: $f(x) = \frac{x^2+5x+5}{x+4}$. الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}_+$

ومن أجل كل $x \geq 0$: $f'(x) = \frac{x^2+8x+15}{x+4^2}$ ، نستنتج أنه من أجل $x \geq 0$: $f'(x) > 0$

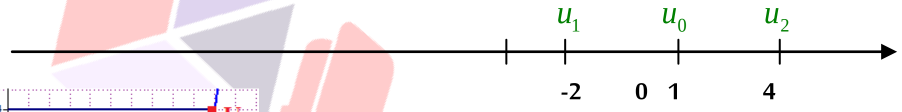
وبالتالي: الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}_+$. إذن: (w_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

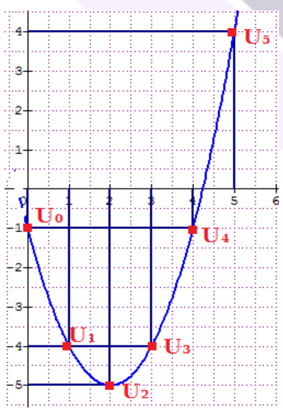
(من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$: $n < n+1$ ومنه $f(n) < f(n+1)$ أي: $w_n < w_{n+1}$).

4: التمثيل البياني لمتتالية عددية

1: حالة الحد العام
يمكن تمثيل حدود متتالية عددية معرفة بحدها العام على محور في المستوي المنسوب إلى معلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$. مجموعة النقط $M(n, f(n))$ هي التمثيل البياني للمتتالية (u_n)

مثال: لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_n = (-2)^n$.





يمكن تمثيل متتالية عددية معرفة بحدها العام (ترفق هذه المتتالية بدالة f).

مثال: لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_n = n^2 - 4n - 1$

(u_n) معرفة كذالك $u_n = f(n)$ حيث: $f : x \mapsto x^2 - 4x - 1$ نعرف f

على المجال $[0, +\infty[$ بما أن n عدد طبيعي. في الرسم المقابل النقط الممثلة إحداثياها $(n, f(n))$ من أجل $n=0$ ، $n=1$ ، $n=2$ ، $n=3$ ، $n=4$ و $n=5$ في المستوي المنسوب إلى معلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$. مجموعة النقط $M(n, f(n))$ هي التمثيل البياني للمتتالية (u_n) .

2: حالة علاقة تراجعية

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول u_0 و العلاقة التراجعية $u_{n+1} = f(u_n)$ حيث f دالة معرفة على $\mathbb{R}$.

مجموعة النقط $M(u_n , f(u_n))$ هي التمثيل البياني في المستوى المنسوب إلى معلم للمتتالية

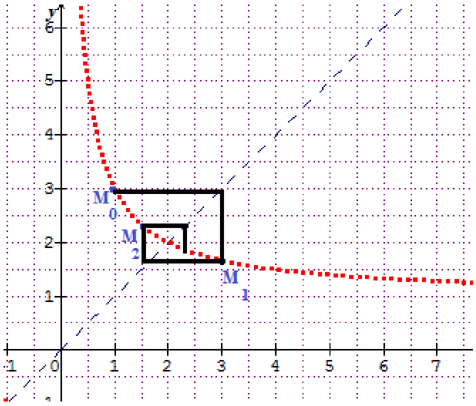
تطبيق:

المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0 = 1$ و العلاقة التراجعية $u_{n+1} = \frac{2+u_n}{u_n}$ حيث n طبيعي

- مثل بيانيا المتتالية (u_n) في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس (O, I, J)

لتمثيل المتتالية (u_n) بيانيا ننشئ الرسم البياني للدالة f المرفقة بالمتتالية (u_n) ثم ننشئ المستقيم ذا المعادلة $y = x$. لأن المتتالية من الشكل $u_{n+1} = f(u_n)$ والتمثيل البياني هو مجموعة النقط $M(u_n, u_{n+1})$

(C_f) هوالرسم البياني للدالة f المرفقة بالمتتالية (u_n) أي. $f(x) = \frac{2+x}{x}$ نعرف الدالة f على المجال $]0, +\infty[$. (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = x$. النقطة $M_0(u_0, u_1)$ أي $M_0(1,3)$ هي أول نقطة نحصل عليها. نسقط النقطة M_0 على (Δ) وفق (Ox) ثم نسقط النقطة المحصل عليها على (C_f) وفق (Oy) وبهذا نحصل على النقطة $M_1(u_1, u_2)$ أي $M_1(3, 5/3)$. نكرر العملية للحصول على M_2 ثم M_3 إلى آخره.



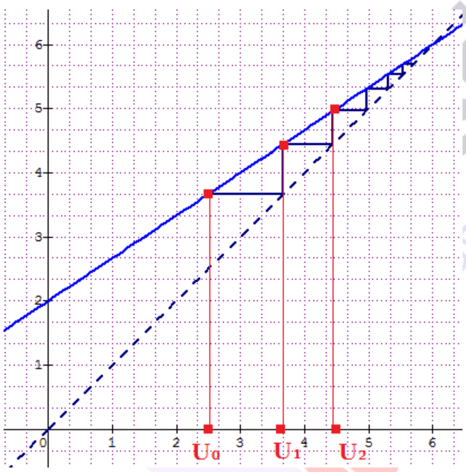
مثال :

(u_n) متتالية عددية معرفة بعلاقة تراجعية كما يلي : $u_0 = \frac{5}{2}$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 2$

1/أ) أرسم في معلم متعامد ومتجانس $(o; \vec{i}\ ; \vec{j}\ )$ المستقيم $(\Delta): y = x$ و المنحنى (d) الممثل للدالة f المعرفة على R بـ: $f(x) = \frac{2}{3}x + 2$

ب) باستعمال الرسم السابق ، مثل على محور الفواصل و بدون حساب الحدود : u_0, u_1, u_2, u_3 و u_4 .

ج) ضع تخمينا حول إتجاه تغير المتتالية (u_n) .



إتجاه تغير المتتالية (u_n) متقاربة نحو 6

2.1 المتتالية الحسابية

تعريف

نقول أن المتتالية العددية (u_n) متتالية حسابية إذا و فقط إذا وجد عدد حقيقي r بحيث أن من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}-u_n=r$ يسمى r أساس المتتالية (u_n).

1 خواص متتالية حسابية

1.2: الحد العام

مبرهنة

(u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_0 أساسها r.

الحد العام للمتتالية الحسابية (u_n) هو $u_n=u_0+nr$ من أجل كل عدد طبيعي n

ملاحظات: إذا كان u_1 الحد الأول فإن عبارة الحد العام هي $u_n=u_1+(n-1)r$.

بصفة عامة إذا كان u_p الحد الأول (p عدد طبيعي أصغر من n) فإن عبارة الحد العام هي الحد $u_n=u_p+(n-p)r$. تعيين الحد العام يعود إلى كتابة u_n بدلالة

مثال: لدينا المتتالية الحسابية (u_n) حيث أن حدها الأول $u_0=3$ و أساسها $r=4$.

-1 احسب u_1 ، u_2 ، u_3 . -2 اكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n

الحل:

$$u_1=u_0+r=3+4=7$$
$$u_2=u_1+r=u_0+2r=7+4=11$$
$$u_3=u_2+r=u_1+2r=u_0+3r=11+4=15$$

الحد العام للمتتالية الحسابية (u_n) هو $u_n=u_0+nr=3+4n$ ا\ا كان الحد الأول u_1

$$u_n=u_1+(n-1)r$$

2.2: مجموع حدود متتابعة

مبرهنة

(u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_0 و أساسها r. ليكن المجموع:

$S=u_0+u_1+........+u_{n-1}+u_n$ من أجل كل عدد طبيعي n: $S=(n+1)\left(\dfrac{u_0+u_n}{2}\right)$.

ملاحظات: $n+1$ يمثل عدد الحدود

S يساوي عدد الحدود مضروب في نصف مجموع الحد الأول و الحد الأخير

تطبيق: لدينا المتتالية الحسابية (u_n) حيث أن حدها الأول $u_0=2$ و أساسها $r=3$.

-1 اكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n.

-2 احسب الحد العاشر.

-3 احسب مجموع العشرة حدود الأولى.

-4 احسب المجموع. $S=u_0+u_1+........+u_{n-1}+u_n$

الحل: -1 عبارة الحد العام u_n بدلالة n.

الحد العام للمتتالية الحسابية (u_n) هو $u_n=u_0+nr=2+3n$ اذا كان الحد الأول u_1

$$u_n=u_1+(n-1)r$$

2.الحد العاشر. $u_9=u_0+3\times9=2+3\times9=29$

3.احسب مجموع العشرة حدود الأولى. $S=u_0+u_1+........+u_9$ ومنه

$$S=(10)\left(\frac{u_0+u_9}{2}\right)=5(2+29)=155$$

4.احسب المجموع. $S=u_0+u_1+........+u_{n-1}+u_n$

عدد الحدود هو $n+1$ حد الحد الأول هو $u_0=2$ وبما ان الحد الأخير هو بدلالة n أي $u_n=2+3n$ اذن

ومنه $S=\frac{(n+1)}{2}(2+2+3n)=\frac{(n+1)}{2}(4+3n)$

2.2: الوسط الحسابي

مبرهنة لتكن a.b.c ثلاث حدود متتابعة من متتالية حسابية اساسها r مأخوذة بهذا الترتيب فان:

$\begin{cases} b=a+r \\ a=b-r \\ c=b+r \end{cases}$ و منه $a+c=2b$

تطبيق:

عين الأعداد a.b.c علما انها بهذا الترتيب تشكل ثلاث حدود متتابعة من متتالية حسابية متزايدة حيث:

$$\begin{cases} a+b+c=15.......................(1) \\ a\times b\times c=105......................(2) \end{cases}$$

الحل:

$a+c=2b$ أي $3b=15$ يعني ان $b=5$ ومنه $a=b-r=5-r$ و $c=5+r$

بتعويض في المعادلة 2 نجد:

$(5-r)5(5+r)=105$ ومنه $25-r^2=21$ أي ان $r=2.............or............r=-2$

-1 لما $r=2$ فان $\begin{cases} a=5-2=3 \\ b=5 \\ c=5+2=7 \end{cases}$ ولما $r=-2$ فان $\begin{cases} a=5+2=7 \\ b=5 \\ c=5-2=3 \end{cases}$ وهذا مرفوض اذن $r=2$

3.2: إتجاه تغير متتالية ح

1: متزايدة تكون متتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ متزايدة إذا كان $r\succ 0$

2: متناقصة تكون متتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ متناقصة إذا كان $r\prec 0$

3: ثابتة تكون متتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ ثابتة إذا كان $r=0$

طريقة: للبرهان على أن متتالية (u_n) متتالية حسابية يمكن البرهان على أن الفرق بين حدين متتابعين كيفيين عدد ثابت ، هذا العدد الثابت هو أساس المتتالية .

تطبيق:لدينا المتتالية (u_n) معرفة على $\mathbb{N}$ حيث ان $u_{n+1}=\alpha u_n+2$

عين قيمة α حتى تكون (u_n) متتالية حسابية

الحل: (u_n) متتالية حسابية يعني ان $u_{n+1}-u_n=r$

ومنه $u_{n+1}-u_n=\alpha u_n+2-u_n=u_n(\alpha-1)+2$

يجب ان يكون $\alpha-1=0$ ومنه $\alpha=1$

3.1 المتتالية الهندسية

تعريف

نقول أن المتتالية (u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_0 إذا و فقط إذا وجد عدد حقيقي q حيث أن من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = u_n \times q$. يسمى q أساس المتتالية (u_n).

1 خواص متتالية هندسية

1.3: الحد العام

مبرهنة

(u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_0 أساسها q.

عبارة الحد العام للمتتالية الهندسية (u_n) $u_n = u_0 \times q^n$ من أجل كل عدد طبيعي n

ملاحظات : (u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_1 أساسها q.

عبارة الحد العام للمتتالية الهندسية (u_n) $u_n = u_1 \times q^{n-1}$ من أجل كل عدد طبيعي n

بصفة عامة إذا كان u_p (p عدد طبيعي أصغرمن n) الحد الأول فإن عبارة الحد العام $u_n = u_p \times q^{n-p}$.

تعيين الحد العام يعود إلى كتابة u_n بدلالة n.

تطبيق: (u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_1 أساسها q موجب تماما حيث : $u_1 = 2$ و $u_3 = 18$

1- أوجد الأساس q

2- اكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n.

3- عين العدد الطبيعي n بحيث $u_n = 162$

الحل:

1- (u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_1 أي $u_n = u_1 \times q^{n-1}$ ومنه $u_3 = u_1 \times q^2$ و منه

$q^2 = 18/2 = 9$

اذن $q = 3$ لأن $q = -3$ مرفوض

2- عبارة الحد العام u_n بدلالة n. لدينا $u_n = u_1 \times q^{n-1}$ اذن $u_n = 2 \times 3^{n-1}$

3- العدد الطبيعي n بحيث $u_n = 162$

$u_n = 2 \times 3^{n-1} = 162$ ومنه $3^{n-1} = 162/2 = 81$ نجد $3^{n-1} = 3^4$ معناه $n - 1 = 4 \rightarrow n = 5$

2.3: مجموع حدود متتابعة

مبرهنة

إذا كانت (u_n) متتالية هندسية أساسها q يختلف عن 1 فإن المجموع:

$S = u_0 + u_1 + \dots\dots + u_{n-1} + u_n$ من أجل كل عدد طبيعي n

$$S = u_0 + u_1 + \dots\dots + u_{n-1} + u_n = u_0\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)$$

ملاحظات : إذا كان $q = 1$ فإن $S = u_0 + u_1 + \dots\dots + u_{n-1} + u_n = (n+1)u_0$

مثال: (v_n) متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}^*$ حدها الأول $v_1 = 3$ و أساسها $q = 2$.

1. أحسب v_2 و v_3.
2. أحسب، بدلالة n، الحد العام v_n.

أحسب، بدلالة n، المجموع $S = v_1 + v_2 + \dots\dots + v_n$

الحل:

1. $v_2 = v_1 \times q = 3\times 2 = 6$ ، $v_3 = v_2 \times q = 6\times 2 = 12$.
2. $v_n = v_1 \times q^{n-1} = 3\times 2^{n-1}$.

$S = v_1 + v_2 + ... + v_n = v_1 \times \frac{1-q^n}{1-q}$ و منه $S = 3\times\frac{1-2^n}{1-2} = -3\left(1-2^n\right) = 3\left(2^n - 1\right)$

تطبيق:

(u_n) متتالية هندسية حدها الأول $u_0 = 2$ أساسها $q = -3$.

-1 اكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n.

-2 احسب الحد الخامس.

-3 احسب مجموع الخمس حدود الأولى لهذه المتتالية.

الحل:

-1 (u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_0 أي $u_n = u_0 \times q^n$ ومنه $u_n = 2\times(-3)^n$

-2 الحد الخامس $u_n = 2\times 3^4 = 162$.

-3 مجموع الخمس حدود الأولى لهذه المتتالية

إذا كان $q \neq 1$ فإن $S = u_0\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right) = u_0\left(\frac{q^{n+1}-1}{q-1}\right)$ من أجل كل عدد طبيعي n

$$S = 2\left(\frac{1-(-3)^5}{1+3}\right) = 2\left(\frac{244}{4}\right) = 122$$

3.3: الوسط الهندسي

مبرهنة

تكون الأعداد غير المعدومة a ، b و c بهذا الترتيب حدودا متتابعة من متتالية هندسية إذا و فقط إذا كان $a\times c = b^2$. يسمى العدد b الوسط الهندسي للعددين a و c.

نتيجة: في متتالية هندسية جداء حدين طرفين يساوي مربع الحد الوسط

تطبيق:

عين الأعداد a.b.c علما انها بهذا الترتيب تشكل ثلاث حدود متتابعة من متتالية هندسية أساسها q:

$$\begin{cases} a+b+c = 26.......................(1) \\ a\times b\times c = 216.....................(2) \end{cases}$$

الحل:

$a\times c = b^2$ أي $b^3 = 216 = 6^3$ يعني ان $b = 6$

$\begin{cases} a+c = 20...............(3) \\ a\times c = 36................(4) \end{cases}$ أي $a = -c + 20$ نعوض في 4 نجد $20c - c^2 - 36 = 0$ اذن

$\Delta = 256 \rightarrow \sqrt{\Delta} = 16$ ومنه

$c_1 = 18.,c_2 = 2$ لما $c_2 = 2$ يعني $a = 18..;.b = 6$ لما $c_2 = 18$ يعني $a = 2..;.b = 6$

4.3: إتجاه تغير متتالية هـ

(u_n) متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}$، حدها الأول u_0 و أساسها q.

نعلم أن $u_{n+1}=u_0q^{n+1}$ و $u_n=u_0q^n$. نستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n،

$u_{n+1}-u_n=u_0q^n(q-1)$ و منه:

1: متزايدة

- إذا كان $0<q<1$ وكان $u_0<0$ فإن المتتالية (u_n) متزايدة.
- إذا كان $q>1$ وكان $u_0>0$ فإن المتتالية (u_n) متزايدة.

2: متناقصة

- إذا كان $0<q<1$ وكان $u_0>0$ فإن المتتالية (u_n) متناقصة.
- إذا كان $q>1$ وكان $u_0<0$ فإن المتتالية (u_n) متناقصة.

3: ثابتة

- إذا كان $q=1$ فإن المتتالية ثابتة.

إذا كان $q>1$ وكان $u_0>0$ فإن المتتالية (u_n) متزايدة.

4: معدومة

- إذا كان $q=0$ تكون كل حدود المتتالية معدومة ابتداء من الحد الثاني.

5: غير رتيبة

إذا كان $q<0$ فإن الفرق $u_{n+1}-u_n$ لا يحتفظ بإشارة ثابتة لأن q^n لا يحتفظ بإشارة ثابتة و منه المتتالية (u_n) ليست رتيبة.

تطبيق:: لتكن (u_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n=n^2-n$.

1. أحسب $u_{n+1}-u_n$ من اجل كل عدد طبيعي n.
2. استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n).

الحل:

1. $u_{n+1}-u_n=\left[(n+1)^2-(n+1)\right]-(n^2-n)$ و منه $u_{n+1}-u_n=2n$.
2. من أجل كل عدد طبيعي n، $2n\geq 0$ أي من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}-u_n\geq 0$.

نستنتج هكذا أن المتتالية (u_n) متزايدة.

تطبيقات:1 لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0=3$ و بالعلاقة: $u_{n+1}=4u_n+6$ من أجل كل عدد طبيعي n . لتكن المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة: $v_n=u_n+2$.

1- أثبت أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول

الحل: بما أن المتتالية (u_n) معرفة على $\mathbb{N}$ فإن المتتالية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ إذن حدها الأول هو $v_0=u_0+2=5$. نكتب v_{n+1} بدلالة v_n. $\begin{cases} v_{n+1}=u_{n+1}+2=4u_n+8 \\ =4(u_n+2)=4v_n \end{cases}$.إذن من أجل كل عدد طبيعي n :

$v_{n+1}=4v_n$. و منه المتتالية (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=4$ و حدها الأول $v_0=5$

2 (u_n) متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}$، أساسها $q=\frac{1}{2}$، و $u_5=\frac{1}{32}$.

1- أحسب u_{2007} .

2- أحسب $S=u_0+u_1+........+u_{28}+u_{29}$.

الحل: نعلم أن من أجل كل عدد طبيعي p أصغر من n : $u_n=u_p\times q^{n-p}$.

إذا $u_{2007}=u_5\times q^{2007-5}=\frac{1}{32}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2002}=\frac{1}{2^{2007}}$.

نعلم أنه إذا كان $q \neq 1$ لدينا $S = u_0\left(\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)$ و ومنه $S = 2\left(1-\dfrac{1}{2^{30}}\right)$

طريقة: للبرهان على أن متتالية (u_n) هندسية نحاول كتابة u_{n+1} على الشكل $u_{n+1} = u_n \times q$ حيث q عدد حقيقي مستقل عن n أو أن كل الحدود u_n غير معدومة و النسبة $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ عدد ثابت ، هذا العدد الثابت هو أساسها

تطبيق لتكن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بحدها الأول $u_0 = 2$ و بالعلاقة: $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + 2$

لتكن المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة: $v_n = u_n - 3$.

- أثبت أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

الحل: • $v_{n+1} = u_{n+1} - 3 = 1/3\ u_n + 2 - 3$

$v_{n+1} = (1/3)(u_n - 3) = (1/3)v_n$ إذن المتتالية (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = (1/3)$ حدها الأول $v_0 = -1$

نهاية متتالية هندسية.

- إذا كان $q > 1$ و $u_0 > 0$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$ و منه $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. المتتالية (u_n) متباعدة
- إذا كان $q > 1$ و $u_0 < 0$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$ و منه $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$. المتتالية (u_n) متباعدة

.

- إذا كان $-1 < q < 1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$ و منه $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. المتتالية (u_n) متقاربة .
- إذا كان $q \leq -1$ فإن المتتالية (u_n) متباعدة (النهاية غير موجودة).

تمرين رقم 59 صفحة 28 من الكتاب المدرسي

a ، b و c أعداد حقيقية غير معدومة .

1) بين أنه إذا كانت a , b و c بهذا الترتيب تشكل حدود متتابعة لمتتالية هندسية فإن :

$a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)(a-b+c)$.

2) جد ثلاث حدود متتابعة لمتتالية هندسية علما أنّ مجموعها هو 78 ومجموع مربعاتها هو 3276 .

تمرين : رقم 51 صفحة 27 كتاب المدرسي

لتكن (u_n) متتالية معرفة على بـ $u_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $4u_{n+1} - 2u_n = 9$.

و لتكن (v_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = 2u_n - 9$.

أ . أحسب الحدود u_1 ، u_2 و u_3 ثمّ v_0 ، v_1 ، v_2 و v_3.

ب . برهن أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها .

ج . جد عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة الحد العام u_n بدلالة n .

د . أحسب بدلالة n المجموع $v_0 + v_1 + ... + v_n$ ثمّ استنتج بدلالة n المجموع $u_0 + u_1 + ... + u_n$.

تمرين مقترح :بكالوريا

جزء1: (u_n) متتالية هندسية متزايدة تماما حدها الأول u_1 وأساسها q حيث :

$$\begin{cases} u_1 + 2u_2 + u_3 = 32 \\ u_1 \times u_2 \times u_3 = 216 \end{cases}.$$

1/ أحسب u_2 والأساس q ثم إستنتج حدها الأول u_1 .

2/ أكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n .

3/ أوجد بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$.

4/ عين العدد الطبيعي n بحيث $S_n = 728$.

جزء2: المتتالية (v_n) المعرفة على N^* كما يلي : $v_{n+1} = \dfrac{3}{2}v_n + u_n$.و $v_1 = 2$

أ) أحسب v_2 و v_3.

ب) نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $w_n = \frac{v_n}{u_n} - \frac{2}{3}$. بين أن (w_n) متتالية هندسيةاساسها $\frac{1}{2}$

ج) أكتب عبارة الحد العام w_n بدلالة n . ثم إستنتج عبارة الحد العام v_n بدلالة n .

تمرين :

(u_n) متتالية عددية معرفة بعلاقة تراجعية كما يلي : $u_0 = \frac{5}{2}$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 2$

نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n - 6$.

أ) بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعين اساسها وحدها الأول .

ب) أكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n . ج) إستنتج عبارة الحد العام u_n بدلالة n .

د) أوجد بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_n$.

ه)إستنتج بدلالة n المجموع S'_n حيث : $S'_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$.

التمرين :

الجزء I : نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها العام كما يلي: $u_n = e^{-\frac{1}{3}+2n}$.

1. أدرس اتجاه تغير الدالة f المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بِ $f(x) = e^{-\frac{1}{3}+2x}$. ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n).

2. بين أن المتتالية (u_n) هندسية يطلب تحديد حدها الأول و أساسها.

3. نضع من أجل كل n من $\mathbb{N}$، $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$. أ) أحسب S_n بدلالة n.

ب) عين العدد الطبيعي n بحيث يكون $S_n = \frac{e^{-\frac{1}{3}}}{1-e^2} \times (1-e^{10})$

الجزء II: نضع من أجل كل n من $\mathbb{N}$، $v_n = \ln(u_n)$.

1. ما هي طبيعة المتتالية (v_n) ؟ حدد حدها الأول و أساسها.

2. عبر بدلالة n عن المجموع S'_n علما أن $S'_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$.

3. عين العدد الطبيعي n بحيث يكون $S'_n = \frac{160}{3}$.

المؤسســــة:	المستـــــــوى: الثالثة رياضيات
السنة الدراسية:	ميـــدان التعلم: تحليل
التاريـــــــخ:	الوحدة التعلمية: المتتاليات
توقيت الحصة :	موضوع الحصة : الاستدلال بالتراجع

المكتسبات المستهدفة: إثبات خاصية بالتراجع.

الأنشطة المقترحة وطبيعتها	الإنجاز (سـير الحصة)	المنهاج
	نشاط رقم 1 في القديم كان اليونان يتعاملون جيد مع المربع التام لعدد طبيعي ووصلوا الى النتيجة التالية: كلما جمعنا أعداد فردية متتابعة و بالتتابع نحصل على مربع تام لعدد طبيعي 1 مربع العدد1 1+3=4 و 4 مربع العدد 2 . 1+3+5=9 و 9 مربع العدد 3. 1) أحسب S_1=1+3+5+7+9+...+53+55. 2) أحسب S_2=1+3+5+7+9+...+85+87. 3) خمن حساب: $(2n-1)$+...+1+3+5+7 بدلالة n. 4) بفرض التخمين الصحيح اثبت أن : **نشاط رقم 1 الحل**	يتم بهذه المناسبة التذكير بالمتتاليات الحسابية والمتتاليات الهندسية.

2/ الاستدلال بالتراجع

1.2 مبدأ الاستدلال

مسلمة

$P(n)$ خاصية متعلقة بعدد طبيعي n و n_0 عدد طبيعي.

للبرهان على صحة الخاصية $P(n)$ من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0 يكفي أن:

1.نتأكد من صحة الخاصية من أجل n_0 أي $P(n_0)$.

2.نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل عدد طبيعي كيفي n أكبر من أو يساوي n_0 أي $P(n_0)$ (فرضية التراجع) و نبرهن صحة الخاصية من أجل $n+1$ أي $P(n+1)$

$P(n_0)$ صحيحة — إذا كانت $P(n)$ صحيحة — فإن $P(n+1)$ صحيحة

المرحلة 1 — المرحلة 2

الخلاصة:
من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0 $P(n)$ صحيحة.

ملاحظة: بصفة عامة المرحلة الأولى تتمثل في عملية تحقق بسيطة لا تطرح أي مشكل إلا أنها تبقى ضرورية لأنه يمكن لخاصية أن تكون وراثية و لكن خاطئة.

مثال: الخاصية:" من أجل كل عدد طبيعي n، 3^n مضاعف للعدد5 " خاطئة رغم أنها وراثية. بالفعل:

إذا كان 3^n مضاعفا للعدد5 فإنه يوجد عدد صحيح k بحيث $3^n=5k$.

لدينا إذن $3^{n+1}=3\times3^n=3(5k)=5(3K)$ و منه 3^{n+1} هو الآخر مضاعف للعدد5.

مثال

لنثبت صحة الخاصية التالية: " من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، $1+2+3+...+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ "

المرحلة 1 من أجل $n=1$ لدينا: $1=\dfrac{1\times2}{2}$ و منه الخاصية صحيحة من أجل $n=1$.

المرحلة 2 (الوراثة):

- نفرض صحة الخاصية من أجل عدد طبيعي n حيث $n\geq1$ أي: $1+2+3+...+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$
- لنبرهن صحة الخاصية من أجل $n+1$ أي: $1+2+3+...+n+(n+1)=\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$.

لدينا: $1+2+3+...+n+(n+1)=(1+2+3+...+n)+(n+1)=\dfrac{n(n+1)}{2}+(n+1)$

و منه $1+2+3+...+n+(n+1)=\dfrac{n(n+1)+2(n+1)}{2}=\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$.

الخلاصة:" من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، $1+2+3+...+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ "

أمثلة: أثبت، باستعمال الاستدلال بالتراجع، أنه: من أجل كل عدد طبيعي n، العدد $2n$ مضاعف للعدد 2.

الحل:

الخاصية " $2n$ مضاعف للعدد 2 " متعلقة بالعدد الطبيعي n. نستعمل الاستدلال بالتراجع.

المرحلة1: من أجل $n=0$، $2\times0=0$ و منه 0 مضاعف للعدد 2.

نستنتج أن الخاصية صحيحة من أجل $n=0$.

المرحلة 2: نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل عدد طبيعي n حيث $n \geq 0$ أي: $2n$ مضاعف للعدد 2.

نضع $2n = 2k$ حيث k عدد طبيعي. و منه $n = k$

و نبرهن أن الخاصية صحيحة من أجل $n+1$ أي $2(n+1)$ مضاعف للعدد 2.

$2(n+1) = 2n+2$

$= 2k+2$ .... لاحظ ان 2 نضاعف ل 2 و $2k$ مضاعف ل2 اذن مجموعهما مضاعف ل2

الخلاصة: من أجل كل عدد طبيعي $2n$ مضاعف للعدد 2

تمرين 1: أثبت، باستعمال الاستدلال بالتراجع، أنه:

من أجل كل عدد طبيعي n، العدد $n^3 - n$ مضاعف للعدد 3

الحل:

الخاصية " $n^3 - n$ مضاعف للعدد 3 " متعلقة بالعدد الطبيعي n. نستعمل الاستدلال بالتراجع.

المرحلة 1: من أجل $n = 0$، $0^3 - 0 = 0 = 3 \times 0$ و منه $0^3 - 0$ مضاعف للعدد 3.

نستنتج أن الخاصية صحيحة من أجل $n = 0$.

المرحلة 2: نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل عدد طبيعي n حيث $n \geq 0$

أي: $n^3 - n$ مضاعف للعدد 3.

نضع $n^3 - n = 3k$ حيث k عدد طبيعي. و منه $n^3 = 3k + n$

و نبرهن أن الخاصية صحيحة من أجل $n+1$ أي $\left[(n+1)^3 - (n+1)\right]$ مضاعف للعدد 3.

$$(n+1)^3 - (n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1 = (3k+n) + 3n^2 + 2n$$

$$(n+1)^3 - (n+1) = 3k + 3n^2 + 3n = 3(k + n^2 + n)$$

و وبما أن $3(k+n^2+n)$ مضاعف للعدد 3 نستنتج أن $(n+1)^3 - (n+1)$ مضاعف للعدد 3

الخلاصة: من أجل كل عدد طبيعي n، $n^3 - n$ مضاعف للعدد 3 .

تمرين 2

: نرمز بـ $P(n)$ إلى الخاصية التالية: " العدد 3 يقسم العدد $4^n + 1$ حيث n عدد طبيعي".

1. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n، إذا كانت $P(n)$ صحيحة تكون $P(n+1)$ صحيحة.
2. هل يمكننا استنتاج أن الخاصية $P(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n ؟ اشرح.

الحل:

1. نفرض أن $P(n)$ صحيحة من أجل عدد طبيعي كيفي n أي أن العدد 3 يقسم العدد $4^n + 1$ و يمكننا أن نعبر عن ذلك بوضع $4^n + 1 = 3k$ حيث k عدد صحيح.

لنبرهن أن $P(n+1)$ صحيحة أي أن العدد 3 يقسم العدد $4^{n+1} + 1$.

لدينا $4^{n+1} + 1 = 4 \times 4^n + 1$ و بما أن $4^n = 3k - 1$ (من الفرضية السابقة) نستنتج أن:

$$4^{n+1} + 1 = 4(3k - 1) + 1$$

لدينا إذن $3(4k) - 3 = 4^{n+1} + 1 = 4 \times 3k - 4 + 1$ و منه $4^{n+1} + 1 = 3(4k - 1)$.

لدينا إذن $4^{n+1} + 1 = 3k'$ مع $k' = 4k - 1$ و هو عدد صحيح. نستنتج أن العدد 3 يقسم العدد $4^{n+1} + 1$. و منه فالخاصية $P(n+1)$ صحيحة.

2. لا يمكننا استنتاج أن الخاصية $P(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n فلابد من التحقق من صحتها من أجل $n = 0$ لأن وراثية الخاصية تبقى غير كافية.

نلاحظ أن الخاصية غير صحيحة من أجل $n = 0$ لأن العدد 3 لا يقسم العدد 2 و بالتالي فهي غير صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n.

تمرين 3: أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $3^{2n+1}+2^{n+2}$ مضاعف للعدد 7 .

الحل: الخاصية " $3^{2n+1}+2^{n+2}$ مضاعف للعدد 7 " متعلقة بالعدد الطبيعي n . نستعمل الاستدلال بالتراجع

المرحلة 1: من أجل $n=0$ ، $3^{2\times 0+1}+2^{0+2}=3+4=7$ و 7 مضاعف للعدد 7.

المرحلة 2: نفرض الخاصية صحيحة من أجل عدد طبيعي n كيفي. أي: $3^{2n+1}+2^{n+2}$ مضاعف للعدد 7.

و نضع $3^{2n+1}+2^{n+2}=7k$ حيث k عدد طبيعي. و منه $3^{2n+1}=7k-2^{n+2}$.

ولنبرهن أن الخاصية صحيحة من أجل $n+1$ أي $3^{2(n+1)+1}+2^{(n+1)+2}$ مضاعف للعدد 7

$$3^{2(n+1)+1}+2^{(n+1)+2}=3^{2n+1+2}+2^{n+2+1}=3^{2n+1}\times 3^2+2^{n+2}\times 2$$
$$=\left(7k-2^{n+2}\right)\times 3^2+2^{n+2}\times 2=7k\times 9-2^{n+2}\times 9+2^{n+2}\times 2=7(k\times 9-2^{n+2})=7k\times 9+2^{n+2}\times(-7)$$

و منه $3^{2(n+1)+1}+2^{(n+1)+2}$ مضاعف للعدد 7.

إذن من أجل كل عدد طبيعي n ، $3^{2n+1}+2^{n+2}$ مضاعف للعدد 7.

تطبيق

نضع $S_n=1^2+2^2+3^2+...+n^2$ حيث n عدد طبيعي غير معدوم .

1) أحسب S_1, S_2, S_3.

2) عبر عن S_{n+1} بدلالة S_n.

3) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم: $S_n=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

مثـــال الاستدلال بالتراجع

نعتبر المتتالية (U_n) المعرفة بحدها الأول $U_0=1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n $U_{n+1}=\sqrt{2U_n+3}$.

برهن بالتراجع أنه من اجل كل عدد طبيعي n : $0<U_n<3$.

تمارين الكتاب المدرسي

13 ص 24: برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا :

$$1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

14 ص 24: برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا :

$$1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

15 ص 24: برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا :

$$1+2^3+3^3+...+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

المؤسســـــــة:
السنة الدراسية:
التاريـــــــــخ:
توقيت الحصة :

المستــــــــوى: الثالثة رياضيات
ميـــدان التعلم: تحليل
الوحدة التعلمية: المتتاليات
موضوع الحصة : توليد متتالية عددية وتخمين سلوكها

المكتسبات المستهدفة: استعمال التمثيل البياني لتخمين سلوك ونهاية متتالية عددية.

الأنشطة المقترحة وطبيعتها	الإنجاز (ســير الحصة)	المنهاج

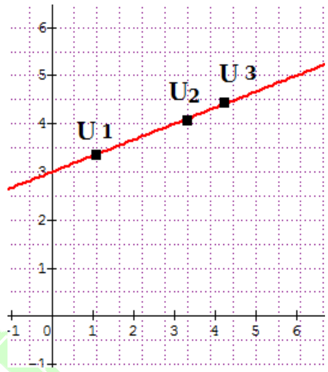
المنهاج:

- تقترح متتاليات معرفة باستعمال دالة f بعلاقة من الشكل: $U_n = f(n)$ أو $U_{n+1} = f(U_n)$

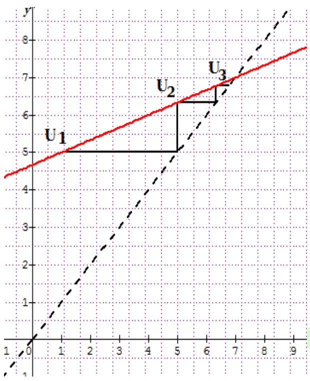
نشاط رقم 1

I. (u_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي : من أجل كل عدد طبيعي n ، $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = (1/3)u_n + (14/3) \end{cases}$.

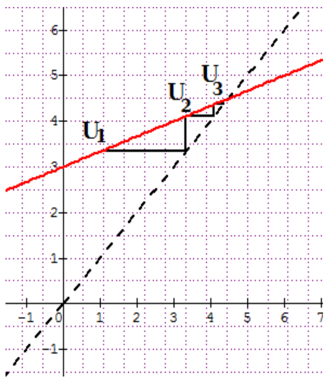
1). احسب الحدود u_1، u_2، u_3 ثم اختار التمثيل المناسب للمتتالية (u_n)



الشكل (1)



الشكل (2)



الشكل (3)

2). ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها .

II. (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n = u_n - 7$.

1) بين أن (v_n) متتالية هندسية ، يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

2) اكتب عبارة v_n بدلالة n ، ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n.

3) أحسب: $\lim_{n\to+\infty} u_n$ و $\lim_{n\to+\infty} v_n$

4) أ- احسب المجموع S بدلالة n حيث : $S = v_0 + v_1 + ... + v_n$.

نشاط رقم 1 الحل

I. (u_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي: $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = (1/3)u_n + (14/3)$.

1) حساب الحدود $u_1 = \frac{15}{3} = 5$ $u_2 = \frac{57}{9} = \frac{19}{3}$ و $u_3 = \frac{183}{27} = \frac{61}{9}$

التمثيل المناسب للمتتالية (u_n) الشكل (2)

2) التخمين حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها

من خلال الحدود الثلاثة الاولى والتمثيل البيا ني يتضح ان

المتتالية متقاربة ونستنتج ان $\lim_{n\to+\infty}(u_n) = 7$.

II. (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n = u_n - 7$.

1) اثبات أن (v_n) متتالية هندسية ،

(v_n) متتالية هندسية يعني: $v_{n+1} = u_{n+1} - 7$

$v_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{14}{3} - 7$ نعلم ان $u_n = v_n + 7$ ومنه

$$v_{n+1}=\frac{1}{3}(v_n+7)+\frac{14}{3}-7$$
$$v_{n+1}=\frac{1}{3}v_n+\left[\frac{14}{3}-\frac{21}{3}+\frac{7}{3}\right]=\frac{1}{3}v_n$$

. اذن هي هندسية أساسها $q=\frac{1}{3}$ و حدها الأول $v_0=-6$.

2) عبارة v_n بدلالة n تعطى عبارة الحد العام كما يلي $v_n=v_0\left(q\right)^n$ ومنه $v_n=-6\left(\frac{1}{3}\right)^n$

عبارة u_n بدلالة n. بما أن $u_n=v_n-4$ ومنه $u_n=-6\left(\frac{1}{3}\right)^n+7$

3) اثبات ان (v_n) متباعدة

لدينا $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=\lim\limits_{n\to+\infty}-6\left(\frac{1}{3}\right)^n=0$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\lim\limits_{n\to+\infty} v_n+7=\lim\limits_{n\to+\infty}-6\left(\frac{1}{3}\right)^n+7=7$

4) أ- حساب المجموع S بدلالة n حيث: $S=v_0+v_1+....+v_n$.

نعلم أن (v_n) متتالية هندسية وبالتالي $S=v_0\times\frac{1-(q)^{n+1}}{1-(q)}$

نستنتج $S=-6\times1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\frac{2}{3}=-9\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\cdot\frac{1}{3}\right)=-9+3\left(\frac{1}{3}\right)^n$

تمارين متتالية تراجعية

(u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ من اجل كل عدد طبيعي n بـ: $\begin{cases}u_0=0\\ u_{n+1}=-\frac{1}{2}u_n+3\end{cases}$

I) لتكن الدالة f للمتغير الحقيقي x حيث: $f(x)=-\frac{1}{2}x+3$

1- أرسم التمثيل البياني لـ f

2- مثل الحدود الخمسة الأولى لـ (u_n) (دون حساب)

3- عين قيمة u_0 حتى تكون المتتالية (u_n) ثابتة .

II) نضع $V_n=u_n-2$ أثبت أن (V_n) متتالية هندسية .

1- أكتب V_n بدلالة n ثم أستنتج u_n بدلالة n.

2- استنتج اتجاه تغير المتتالية (V_n).

3- بين أن (V_n) متقاربة نحو الصفر ثم أستنتج $\lim u_n$

4- أحسب المجموع S_n حيث: $S_n=v_0+v_1+v_2+.........+v_{n-1}$

5- أستنتج المجموع $L_n=u_0+u_1+........u_{n-1}$

6- أحسب $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$

الحل: (u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ من اجل كل عدد طبيعي n بـ: $u_0=0$, $u_{n+1}=-\frac{1}{2}u_n+3$

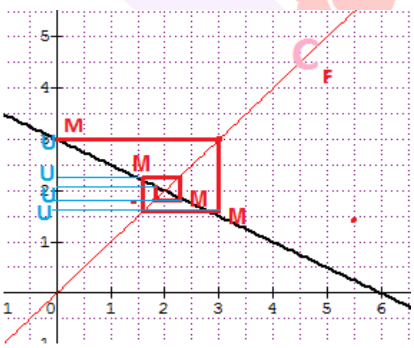
I) الدالة f للمتغير الحقيقي x حيث: $f(x)=-\frac{1}{2}x+3$

1. التمثيل البياني لـ f

2. مثل الحدود الخمسة الأولى لـ (u_n)

3. قيمة u_0 حتى تكون المتتالية (u_n) ثابتة .

يعني ان $\frac{b}{1-a}=u_0=2$



II) نضع $V_n=u_n-2$ أثبات أن

(V_n) متتالية هندسية اي $V_{n+1}=-\frac{1}{2}u_n+3-2$

نعلم ان $V_n = u_n - 2$ اي $u_n = V_n + 2$ ومنه $V_{n+1} = -\frac{1}{2}(V_n + 2) + 3 - 2 = -\frac{1}{2}V_n$ هندسية

4. V_n بدلالة n: بما ان $V_n = V_0 q^n = (-2).(-\frac{1}{2})^n$ لان $V_0 = u_0 - 2 = -2$

u_n بدلالة n . $u_n = V_n + 2$ ومنه $u_n = (-2).(-\frac{1}{2})^n + 2$

5. استنتج اتجاه تغير المتتالية (V_n).

بما ان $q < 0$ و $V_0 \leq 0$ فان (V_n) ليست رتيبة.

6. (V_n) متقاربة نحو الصفر

$\lim\limits_{n\to\infty} V_n = \lim\limits_{n\to\infty} (-2).(-\frac{1}{2})^n = 0$ متقاربة نحو الصفر

ومنه نستنتج ان : $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0 + 2 = 2$

7. المجموع S_n حيث: $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots\dots\dots + v_{n-1}$ من متتالية هندسية

يعني ان $S_n = V_0 \frac{1-q^n}{1-q} = -2\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = -\frac{4}{3}\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)$

8. المجموع $L_n = u_0 + u_1 + \dots\dots\dots u_{n-1}$

$l_n = V_0 + 2 + V_1 + 2 + V_2 + 2 \dots . V_n + 2$

$l_n = 2n + S_n = 2n - \frac{4}{3}\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)$

7- حساب $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$

المؤسســـــــة:	المستـــــــــوى: الثالثة رياضيات
السنة الدراسية:	ميــدان التعلم: تحليل
التاريــــــــخ:	الوحدة التعلمية: المتتاليات
توقيت الحصة :	موضوع الحصة : دراسة سلوك ونهاية متتالية.

المكتسبات المستهدفة: دراسة سلوك ونهاية متتالية.

الأنشطة المقترحة وطبيعتها	الإنجاز (سـير الحصة)	المنهاج

نشاط رقم 1

A. نعتبر الدالة f المعرفة بـ $f(x)=\sqrt{x+6}$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في م متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. عين D_f مجموعة تعريف الدالة f.
2. أدرس قابلية اشتقاق الدالة f عند -6. فسر بيانيا النتيجة.
3. أحسب نهاية f عند $+\infty$.
4. أدرس اتجاه تغير الدالة f.
5. أنجز جدول تغيرات الدالة f
6. عين تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$.
7. أرسم (Δ) و (C_f).

B. نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$u_0=-5$ و من أجل كل n من $\mathbb{N}$، $u_{n+1}=\sqrt{6+u_n}$

1. تحقق أن من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$، $u_n>0$.
2. باستعمال حاسبة بيانية عين u_1، u_2، u_3 و u_4.
3. باستعمال (Δ) و (C_f) مثل على محور الفواصل الحدود u_1، u_2، u_3 و u_4.
4. ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n).
5. باستعمال الحاسبة البيانية خمن من أي عدد يقترب u_n أكثر فأكثر لما يصبح n كبيرا جدا.
6. إذا فرضنا أن تخمينك السابق صحيح أثبت صحة التخمين الذي وضعته في السؤال 4.

نشاط رقم 1 الحل

المنهاج:

في دراسة نهايات المتتاليات تطبق النتائج المحصل عليها في السنة الثانية أوالمبرهنات المعروفة على الدوال عندما يؤول n إلى $+\infty$. عندما تقبل الدالة f نهاية l عندما يؤول المتغير إلى $+\infty$ فإن المتتالية (U_n) المعرفة بالعلاقة $U_n=f(n)$ تقبل نفس النهاية l عندما يؤول n إلى $+\infty$ (ننبه أن العكس غير صحيح).

تعطى أمثلة عن دوال محدودة من الأعلى (بالقيمة المطلقة) بمتتالية هندسية متقاربة.

3/ تقارب متتالية عددية

1.3 نهاية متتالية عددية

تعريف

(u_n) متتالية عددية و l عدد حقيقي.

نقول أن المتتالية (u_n) تقبل l كنهاية إذا وفقط إذا كان كل مجال مفتوح يشمل l فهو يشمل أيضا كل حدود المتتالية (u_n) ابتداءً من رتبة معينة.ونكتب: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ أو $\lim u_n = l$ (حيث أن النهاية لا تحسب إلا عند $+\infty$) في هذه الحالة نقول أن المتتالية (u_n) متقاربة.

ملاحظة:

إذا كانت (u_n) متتالية متقاربة فإن نهايتها وحيدة

إذا كانت (u_n) متتالية غير متقاربة فهي متباعدة (نهايتها غير منتهية أو غيرموجودة).

1: المتتالية المتقاربة

نقول أن المتتالية (u_n) متقاربة نحو العدد الحقيقي l ، أو إنها تقبل l نهاية لها عندما يؤول n إلى $+\infty$، إذا كان من أجل كل مجال مفتوح يشمل l فإنه يشمل أيضا كل حدود المتتالية ابتداء من رتبة معينة. ونكتب:

$\lim_{n\to+\infty} u_n = l$

مثـــال **تقارب متتالية**

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ المعرفة كما يلي : $u_n = \frac{1}{n}$.

باستعمال التعريف ، أثبت أن نهاية (u_n) هي 0.

الحل:

لنبرهن على هذا .ليكن مجال $]\alpha , \beta[$ يشمل 0 .ليكن عدد طبيعي p حيث :

$p > \frac{1}{\beta}$ و $p > -\frac{1}{\alpha}$ ، من أجل كل عدد طبيعي n ($n \geq p$) لدينا $\frac{1}{n} < \frac{1}{p}$ و $\alpha < -\frac{1}{p} < \frac{1}{n}$ و $\frac{1}{n} < \frac{1}{p} < \beta$ إذا

$\alpha < \frac{1}{n} < \beta$ ومنه إبتداء من الرتبة p $\alpha < u_n < \beta$. و بالتالي. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

2.3 نهاية متتالية عددية معرفة بدالة

مبرهنة

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي $u_n = f(n)$. حيث f دالة معرفة على مجال من الشكل $[\alpha , +\infty[$ حيث α عدد حقيقي . إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.

ملاحظة: النتائج المتعلقة بنهاية دالة تبقى صحيحة على المتتاليات على المجال $[0 , +\infty[$ توجد حالات استثنائية

مثـــال **تقارب متتالية**

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n = \frac{3n+1}{n+2}$.

- عين نهاية المتتالية (u_n).

الحل:

المتتالية (u_n) معرفة على الشكل $u_n = f(n)$ حيث f هي الدالة المعرفة على $[0 , +\infty[$ بـ :

$f(x) = \frac{3x+1}{x+2}$. لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3$ إذا $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$.إذن المتتالية (u_n) متقاربة .

تمارين متتالية متباعدة

ادرس اتجاه تغير المتتاليات المعرفة بما يلي:

1. من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $w_n = \frac{n^2+5n+5}{n+4}$

الحل: نضع: $f(x) = \frac{x^2+5x+5}{x+4}$. الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}_+$

من أجل كل $x \geq 0$: $f'(x) = \frac{x^2+8x+15}{x+4^2}$ ، نستنتج أنه من أجل كل $x \geq 0$: $f'(x) \geq 0$

وبالتالي: الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}_+$. إذن: (w_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

(من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $n < n+1$ ومنه $f(n) < f(n+1)$ أي: $w_n < w_{n+1}$).

3.3 نهاية غير منتهية لمتتالية عددية بدالة

مبرهنة

(u_n) متتالية عددية .

- المتتالية (u_n) تقبل $+\infty$ كنهاية إذا وفقط إذا كان كل مجال مفتوح $(\alpha \in \mathbb{R})$ $]\alpha,+\infty[$ يشمل كل حدود المتتالية (u_n) ابتداء من رتبة معينة . و نرمز: $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
- المتتالية (u_n) تقبل $-\infty$ كنهاية إذا وفقط إذا كان كل مجال مفتوح $(\alpha \in \mathbb{R})$ $]-\infty,\alpha[$ يشمل كل حدود المتتالية (u_n) ابتداء من رتبة معينة . و نرمز: $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

ملاحظة: لا نتكلم عن تقارب المتتالية (u_n) إلا إذا كانت نهايتها محدودة (عدد حقيقي ثابت) أما إذا كانت نهايتها غير محدودة ($+\infty$ أو $-\infty$) أو لا تقبل نهاية ففي هذه الحالة نقول إن المتتالية (u_n) متباعدة.

مثــــال تباعد متتالية

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي $u_n = n^2$. ليكن α عدد حقيقي .

n_0 عدد طبيعي أكبر تماما من α لدينا $n^2 \in]\alpha,+\infty[$ إبتداءا من $n \geq n_0$ و منه $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي $u_n = -n^2-1$. ليكن α عدد حقيقي .

n_0 عدد طبيعي أكبر تماما من α لدينا $(-n^2-1) \in]-\infty,\alpha[$ إبتداءا من $n \geq n_0$ و منه $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

تمارين متتالية متزايدة

ادرس اتجاه تغير المتتاليات المعرفة بما يلي:

1. من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $w_n = \frac{n^2+5n+5}{n+4}$

الحل: نضع: $f(x) = \frac{x^2+5x+5}{x+4}$. الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}_+$

من أجل كل $x \geq 0$: $f'(x) = \frac{x^2+8x+15}{x+4^2}$ ، نستنتج أنه من أجل كل $x \geq 0$: $f'(x) \geq 0$

وبالتالي: الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}_+$. إذن: (w_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

(من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $n < n+1$ ومنه $f(n) < f(n+1)$ أي: $w_n < w_{n+1}$).

المؤسســـــــة:	المستــــــــوى:	الثالثة رياضيات
السنة الدراسية:	ميـــدان التعلم:	تحليل
التاريــــــــخ:	الوحدة التعلمية:	المتتاليات
توقيت الحصة :	موضوع الحصة :	المتتالية المحدودة

المكتسبات المستهدفة: دراسة سلوك ونهاية متتالية.

الأنشطة المقترحة وطبيعتها	الإنجاز (سـير الحصة)	المنهاج
	نشاط رقم 1	

نشاط رقم 1

A. نعتبر الدالة f المعرفة بـ $f(x)=\sqrt{x+6}$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في م متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

8. عين D_f مجموعة تعريف الدالة f.
9. أدرس قابلية اشتقاق الدالة f عند -6. فسر بيانيا النتيجة.
10. أحسب نهاية f عند $+\infty$.
11. أدرس اتجاه تغير الدالة f.
12. أنجز جدول تغيرات الدالة f
13. عين تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$.
14. أرسم (Δ) و (C_f).

B. نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$$u_0=-5 \text{ و من أجل كل } n \text{ من } \mathbb{N} ،\ u_{n+1}=\sqrt{6+u_n}$$

7. تحقق أن من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$، $u_n>0$.
8. باستعمال حاسبة بيانية عين u_1، u_2، u_3 و u_4.
9. باستعمال (Δ) و (C_f) مثل على محور الفواصل الحدود u_1، u_2، u_3 و u_4.
10. ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n).
11. باستعمال الحاسبة البيانية خمن من أي عدد يقترب u_n أكثر فأكثر لما يصبح n كبيرا جدا.
12. إذا فرضنا أن تخمينك السابق صحيح أثبت صحة التخمين الذي وضعته في السؤال 4.

نشاط رقم 1 الحل

المنهاج:

في دراسة نهايات المتتاليات تطبق النتائج المحصل عليها في السنة الثانية أوالمبرهنات المعروفة على الدوال عندما يؤول n إلى $+\infty$. عندما تقبل الدالة f نهاية l عندما يؤول المتغير إلى $+\infty$ فإن المتتالية (U_n) المعرفة بالعلاقة $U_n=f(n)$ تقبل نفس النهاية l عندما يؤول n إلى $+\infty$ (ننبه أن العكس غير صحيح).

تعطى أمثلة عن دوال محدودة من الأعلى (بالقيمة المطلقة) بمتتالية هندسية متقاربة.

4/متتالية محدودة

1.4 الحد من اعلى و اسفل

تعريف

نقول عن متتالية (u_n) إنها محدودة من الأعلى بالعدد الحقيقي M إذا وفقط إذا كان : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \le M$.

نقول عن متتالية (u_n) إنها محدودة من الأسفل بالعدد الحقيقي m إذا وفقط إذا كان : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \ge m$.

نقول عن متتالية إنها محدودة إذا وفقط إذا كانت محدودة من الأعلى و من الأسفل.

كل متتالية محدودة من الأعلى ومتزايدة أو محدودة من الأسفل ومتناقصة هي متتالية متقاربة.

مبرهنة

: تقبل بدون برهان .

- إذا كانت (u_n) متتالية متزايدة و محدودة من الأعلى فإنها متقاربة .
- إذا كانت (u_n) متتالية متناقصة و محدودة من الأسفل فإنها متقاربة .

مثـــال تقارب متتالية

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بمايلي:

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n^2 + 1) \end{cases}$$ من أجل كل عدد طبيعي n.

1. أحسب u_1 و u_2 .
2. أثبت أن المتتالية (u_n) متزايدة.
3. أثبت أن المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى بالعدد 1، استنتج أن (u_n) متقاربة ثم أوجد نهايتها.

الحلّ:

1. حساب : $u_1 = \frac{5}{8}$ و $u_2 = \frac{89}{128}$.
2. إثبات أن المتتالية (u_n) متزايدة:

من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}(u_n^2 + 1) - u_n = \frac{1}{2}(u_n^2 - 2u_n + 1) = \frac{1}{2}(u_n - 1)^2$

وبما أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $\frac{1}{2}(u_n - 1)^2 \ge 0$ فإن $u_{n+1} - u_n \ge 0$

إذن: المتتالية (u_n) متزايدة على $\mathbb{N}$.

3. إثبات أن المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى بالعدد 1 :

تذكير: نقول عن متتالية (u_n) إنها محدودة من الأعلى بالعدد الحقيقي M إذا وفقط إذا كان: من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n \le M$.

2.4 النهاية باستعمال الحصر (تذكير)

مبرهنة 1

(u_n) ، (v_n) و (w_n) ثلاث متتاليات عددية و l عدد حقيقي. إذا كانت $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l$ و إذا كان ابتداء من عدد طبيعي n_0 ، $v_n \le u_n \le w_n$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$

مثـــال تقارب متتالية

$(u_n)_{n\ge1}$ متتالية تحقق ما يلي : $\frac{4n}{2n+3} \le u_n \le \frac{2n+1}{n}$. عين نهاية المتتالية $(u_n)_{n\ge1}$.

حل: $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2n+1}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right) = 2$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{4n}{2n+3} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{4}{(2+3/n)} = 2$ و منه $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$

مبرهنة 2

(u_n) و (v_n) متتاليتان عدديتان . إذا كان ابتداءً من عدد طبيعي n_0 ، $u_n \geq v_n$ و $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$

فإن $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

مثـــال تقارب متتالية

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n = n+\sin(n)$.

- عين نهاية المتتالية (u_n).

حل:نعلم من أجل كل عدد طبيعي n : $-1 \leq \sin(n) \leq 1$ ومنه من أجل كل عدد طبيعي n : $\sin(n) \geq -1$

إذا $u_n \geq n-1$ و $\lim_{n\to+\infty} n-1 = +\infty$ وبالتالي $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

مبرهنة 3

(u_n) و (v_n) متتاليتان عدديتان . إذا كان ابتداءً من عدد طبيعي n_0 ، $u_n \leq v_n$ و $\lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty$

فإن $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

مثـــال تقارب متتالية

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0 = 2$ و العلاقة : $u_{n+1} = 1 + {}^{2}\!/_{5}\, u_n$.

لتكن المتتالية (v_n) المعرفة كما يلي: $v_n = u_n - 5/3$

1) أثبت أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

2) عين نهاية المتتالية (u_n).

حل:1) لنحسب v_{n+1}.

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{5}{3} = 1 + \frac{2}{5}u_n - \frac{5}{3} = \frac{2}{5}u_n - \frac{2}{3} = \frac{2}{5}\left(u_n - \frac{5}{3}\right) = \frac{2}{5}v_n$$

إذا أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{2}{5}$ و حدها الأول $v_0 = u_0 - \frac{5}{3} = 2 - \frac{5}{3} = \frac{1}{3}$

2) أساس المتتالية هو $q = 2/5$.

$-1 < \frac{2}{5} < 1$ إذن المتتالية (v_n) متقاربة و $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$ و بالتالي $\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{5}{3}$ لأن $u_n = v_n + \frac{5}{3}$

5/متتاليتان متجاورتان

1.5 تعريف

تعريف

تكون متتاليتان عدديتان متجاورتين إذا كانت و فقط إذا إحداهما متزايدة و الأخرى متناقصة ، و الفرق بينهما يؤول إلى الصفر.

خاصية إذا كانت المتتاليتان متجاورتان ، إذن هما متقاربتان و لهما نفس النهاية

مثـــال تقارب متتالية

لتكن المتتالية (u_n) و المتتالية (v_n) المعرفتين كما يلي :

$u_0 = 12$ ، $v_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 2v_n}{3}$ و $v_{n+1} = \dfrac{u_n + 3v_n}{4}$.

نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $w_n = u_n - v_n$ و $t_n = 3u_n + 8v_n$.

1) أثبت أن المتتالية (w_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول. أحسب w_n بدلالة n. ما هي نهاية (w_n)؟

2) أثبت أن المتتالية (t_n) متتالية ثابتة . ما هي نهاية (t_n)؟

3) أثبت أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان.

4) استنتج نهاية u_n و نهاية v_n.

المؤسســــــة:	المستـــــــــوى: الثالثة رياضيات
السنة الدراسية:	ميــدان التعلم: تحليل
التاريـــــــــخ:	الوحدة التعلمية: المتتاليات
توقيت الحصة :	موضوع الحصة : المتتاليتان المتجاورتان

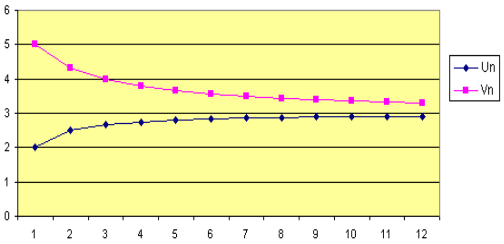
المكتسبات المستهدفة: معرفة واستعمال مفهوم متتاليتين متجاورتين.

الأنشطة المقترحة وطبيعتها	الإنجاز (سـير الحصة)	المنهاج
	(see below)	يعطى تعريف متتاليتين متجاورتين وتقبل النظرية التي تنصّ على أنه إذا كانت متتاليتان متجاورتين فإنهما تتقاربان إلى نفس النهاية ويستثمر ذلك لحصر ثمّ حساب مساحة الحيز تحت المنحنى الممثل لدالة.

نشاط رقم 1

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: من أجل كل n من $\mathbb{N}$، $u_n = \dfrac{3n+2}{n+1}$.

نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: من أجل كل n من $\mathbb{N}$، $v_n = \dfrac{3n+10}{n+2}$.



1. أثبت أن المتتالية (u_n) متزايدة .
2. أثبت أن المتتالية (v_n) متناقصة .
3. عين نهاية المتتالية $u_n - v_n$.
4. الرسم المقابل يعطي التمثيل البياني للمتتاليتين (u_n) و (v_n) باستعمال مجدول اكسال .

ماذا تلاحظ حول نهاية (u_n) وحول نهاية (v_n) ؟

نشاط رقم 1 الحل

نعتبر الدالة f المعرفة على $[0;+\infty[$ ب : $f(x) = \dfrac{3x+2}{x+1}$ تقبل الأشتقاق ودالتها المشتقة $f'(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$

موجبة تماما ومنه f متزايدة تماما بوضع $f(n) = u_n$ المتتالية (u_n) متزايدة .

نعتبر الدالة g المعرفة على $[0;+\infty[$ ب : $g(x) = \dfrac{3x+10}{x+2}$ تقبل الأشتقاق ودالتها المشتقة $f'(x) = \dfrac{-4}{(x+2)^2}$

سالبة تماما ومنه g متزايدة تماما بوضع $g(n) = u_n$ المتتالية (v_n) متناقصة.

نهاية المتتالية $u_n - v_n$.

$$u_n - v_n = \frac{3n+2}{n+1} - \frac{3n+10}{n+2} = \frac{-(5n+6)}{(n+1)(n+2)}$$ ومنه $$\lim_{n\to+\infty} \frac{-(5n+6)}{(n+1)(n+2)} = 0$$

نلاحظ ان $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n+2}{n+1} = 3$ و $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n+10}{n+2} = 3$

5/متتاليتان متجاورتان

1.5 تعريف

تعريف

تكون متتاليتان عدديتان متجاورتين إذا كانت و فقط إذا إحداهما متزايدة و الأخرى متناقصة ، و الفرق بينهما يؤول إلى الصفر.

خاصية إذا كانت المتتاليتان متجاورتان ، إذن هما متقاربتان و لهما نفس النهاية

مثـــال تقارب متتالية

لتكن المتتالية (u_n) و المتتالية (v_n) المعرفتين كما يلي :

$u_0 = 12$ ، $v_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 2v_n}{3}$ و $v_{n+1} = \dfrac{u_n + 3v_n}{4}$.

نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $w_n = u_n - v_n$ و $t_n = 3u_n + 8v_n$.

5) أثبت أن المتتالية (w_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول. أحسب w_n بدلالة n. ما هي نهاية (w_n)؟

6) أثبت أن المتتالية (t_n) متتالية ثابتة . ما هي نهاية (t_n)؟

7) أثبت أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان.

8) استنتج نهاية u_n و نهاية v_n.

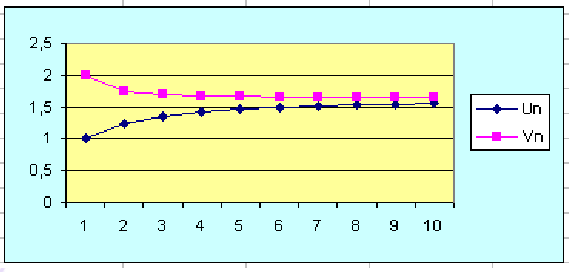
مثـــال تقارب متتالية

لتكن المتتالية u_n المعرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي : $u_n = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \dots + \dfrac{1}{n^2}$.

لتكن المتتالية v_n المعرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي : $v_n = u_n + \dfrac{1}{n}$.

الجدول المقابل يعطي قيم المتتاليتين (u_n) و v_n من أجل قيم n من 1 إلى 10 و يعطي التمثيل البياني للمتتاليتين .انطلاقا من هذا نخمن أن المتتاليتين متجاورتان.

	A	B	C
1	n	Un	Vn
2	1	1	2
3	2	1,25	1,75
4	3	1,36111111	1,69444444
5	4	1,42361111	1,67361111
6	5	1,46361111	1,66361111
7	6	1,49138889	1,65805556
8	7	1,51179705	1,6546542
9	8	1,52742205	1,65242205
10	9	1,53976773	1,65087884
11	10	1,54976773	1,64976773



لنبرهن على صحة هذا التخمين.

$u_{n+1} - u_n = \left(1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \dots + \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{(n+1)^2}\right) - \left(1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \dots + \dfrac{1}{n^2}\right)$ أي $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)^2}$

إذن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $\dfrac{1}{(n+1)^2} > 0$ و منه (u_n) متزايدة على $\mathbb{N}^*$

$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} + \dfrac{1}{n+1} - \left(u_n + \dfrac{1}{n}\right)$ أي $v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n + \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n}$ و منه:

$v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{(n+1)^2} + \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n}$ أي $v_{n+1} - v_n = \dfrac{-1}{n(n+1)^2}$.

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $\dfrac{-1}{n(n+1)^2} < 0$ و منه (v_n) متناقصة على $\mathbb{N}^*$.

- $u_n - v_n = u_n - \left(u_n + \dfrac{1}{n}\right)$ و منه $u_n - v_n = \dfrac{1}{n}$ و $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0$. إذن $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = 0$.

بما أن (u_n) متزايدة ، (v_n) متناقصة و $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n - v_n = 0$ فإن u_n و v_n متجاورتان .

المؤسســـــــة:	المستــــــــوى:	الثالثة رياضيات
السنة الدراسية:	ميـــدان التعلم:	تحليل
التاريــــــــــخ:	الوحدة التعلمية:	المتتاليات
توقيت الحصة :	موضوع الحصة :	توظيف متتاليات في حل مشاكل

المكتسبات المستهدفة: حل مشكلات توظف فيها المتتاليات والبرهان بالتراجع

الأنشطة المقترحة وطبيعتها	الإنجاز (ســير الحصة)	المنهاج
	(انظر أدناه)	يعطى تعريف متتاليتين متجاورتين وتقبل النظرية التي تنصّ على أنه إذا كانت متتاليتان متجاورتين فإنهما تتقاربان إلى نفس النهاية ويستثمر ذلك لحصر ثمّ حساب مساحة الحيز تحت المنحنى الممثل لدالة.

تمرين رقم 1

في أول جانفي 2000 أودع نبيل $10000\,DA$ ببنك يقترح فائدة مركبة نسبتها 5% سنويا. بالإضافة إلى ذلك فإنه يودع في كل أول جانفي من السنوات الموالية مبلغ $2000\,DA$.

نرمز بِ u_n إلى رصيد نبيل في أول جانفي من السنة $2000+n$.

1. عين u_0 ثم احسب u_1 و u_2.
2. تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=1,05u_n+2000$.
3. بين أن المتتالية (u_n) ليست حسابية و ليست هندسية.
4. نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n=u_n+40000$
   - بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $1,05$. عين حدها الأول.
   - أحسب u_n بدلالة n ثم استنتج v_n بدلالة n .
   - كم يكون رصيد نبيل في سنة 2010 ؟
5. نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $S'_n=v_0+v_1+...+v_{n-1}$ و $S_n=u_0+u_1+...+u_{n-1}$
   - أحسب S'_n بدلالة n .
   - أحسب S_n بدلالة n و S'_n ثم استنتج S_n بدلالة n .

تمرين رقم 1 الحل

في أول جانفي 2005 . بلغ عدد سكان إحدى المدن 100 000 نسمة.

<u>ملاحظة:</u> (الفرعان 1 و2 مستقلان)

1. نفرض أن عدد سكان هذه المدينة يرتفع سنويا بنسبة قدرها 3% و نرمز بِ u_n إلى عدد سكانها في أول جانفي من السنة $2005+n$ حيث n عدد طبيعي.
   - ما هي قيمة u_0 ؟ أحسب u_1 و u_2.

قيمة u_0 لدينا $n=0$ اي ابتداءا من $2005+n$

عدد السكان $u_0=100\,000+3000\times 0=100\,000$

قيمة u_1 لدينا $n=1$ اي ابتداءا من $2005+1=2006$ تتم الزيادة ب 3%

في وجود الزيادة نقوم بضرب المقدار في $1+a/100$ حيث $a\%=3\%$ نسبة الزيادة ومنه

$1+a/100=1+3/100=1.03$

$u_1=100000\times 1,03=103\,000$

قيمة u_2 لدينا $n=2$ اي ابتداءا من $2005+2=2007$ تتم الزيادة دائما ب 3% بالنسبة للسنة الماضية اي 2006 ومنه نقوم بضرب قيمة السكان ل 2006 في نسبة الزيادة

وبالتالي $u_2=u_1\times 1.03=103\,000\times 1.03=106090$

- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=1,03\times u_n$. استنتج طبيعة المتتالية (u_n).

برهان ان $u_{n+1}=1,03\times u_n$ لدينا:

$u_1=u_0\times 1,03=103\,000$

$u_2=u_1\times 1.03=106090$

وبالتالي فان $u_{n+1}=u_n\times 1,03$

استنتج طبيعة المتتالية (u_n).

بما انها من الشكل $u_{n+1}=q\times u_n$ فانها هندسية اساسها $q=1,03$

- عبربدلالة n عن u_n.

المطلوب عبارة الحد العام

$u_0=100\ 000$ و $q=1,03$ ومنه $u_n=100000\times(1.03)^n$

- كم يكون عدد سكان المدينة في أول جانفي 2010 ؟ في أول جانفي 2025 ؟ (تدور النتائج).

قيمة u_0 لدينا $n=0$ اي ابتداءا من $2005+n$

ومنه 2025 هو $2005+20$ اي $n=20$ وبالتالي نقوم بحساب u_{20}

$u_{20}=100000\times(1.03)^{20}=180611$

- باستعمال حاسبة بيانية عين ابتداء من أي سنة يتجاوز عدد سكان هذه المدينة 200 000 نسمة ؟

نبحث عن قيمة n اي ان $u_n=100000\times(1.03)^n=200\ 000$ ومنه $(1.03)^n=2$ ومنه

$\ln(1.03)^n=\ln 2$ اي $n\bullet\ln(1.03)=\ln 2$ اذن $n=\ln(1.03)/\ln 2\simeq 24$ اي سنة 2029

2. نفرض أن عدد الوفيات هو نفسه عدد الولادات بهذه المدينة إلا أنه و نظرا لنشاطها الاقتصادي المتميز فإن

5000 شخص إضافي يستقرون بها سنويا.

نرمز بِ v_n إلى عدد سكانها في أول جانفي من السنة $2005+n$ حيث n عدد طبيعي.

- ما هي قيمة v_0 ؟ أحسب v_1 و v_2.

5000 شخص إضافي يستقرون بها سنويا.يعني زيادة كل سنة

v_0 هو عدد سكان الابتدائي وهو 100 000 نسمة.في $2005+0$

ومنه $v_0=100\ 000$

v_1 هو عدد سكان الابتدائي ل $2005+0$ زائد 5000 في $2005+1=2006$

ومنه $v_1=v_0+5000=105000$

v_2 هو عدد سكان ل 2006 زائد 5000 وهو $105\ 000+5000$ نسمة.في $2005+2=2007$

ومنه $v_2=v_1+5000=110000$

- عبر عن v_{n+1} بدلالة v_n. استنتج طبيعة المتتالية (v_n).

من خلال ماسبق نستنتج ان $v_1=v_0+5000=105000$ و $v_2=v_1+5000=110000$ اذن

عموما نتحصل على $v_{n+1}=v_n+5000$ وبالتالي المتتالية (v_n) هي من الشكل $v_{n+1}=v_n+r$ هي صيغة متتالية حسابية اساسها $r=5000$

- عبربدلالة n عن u_n.

لدينا $v_0=100\ 000$ و $r=5000$ ومنه $v_n=v_0+nr=100000+5000n$

- كم يكون عدد سكان المدينة في أول جانفي 2010 ؟ في أول جانفي 2025 ؟ (تدور النتائج).

في 2010 اي $2005+5$ وبالتالي $n=5$ نحسب $v_5=100000+5000\times5=125000$

- ابتداء من أي سنة يتجاوز عدد سكان هذه المدينة 200 000 نسمة ؟

$100000+5000n=200\ 000$ ومنه $n=20$ وبالتالي السنة هي $2005+n$ أي 2025

تمرين رقم 2

يقترح أحمد عمر عقدين لكراء مسكن لمدة 8 سنوات . يدفع عمر $5000\,DA$ في السنة الأولى

1) في العقد الأول, ثمن الكراء يزداد كل سنة بقيمة ثابتة $150\,DA$. نضع u_n ثمن الكراء للسنة n

أ) أحسب الثمن u_2.

ب) أكتب u_n بدلالة n ثم أحسب u_8.

ت) أحسب ثمن الكراء لثماني سنوات.

2) في العقد الثاني ثمن الكراء يزداد كل سنة بنسبة 3% .

نضع v_n ثمن الكراء للسنة n .

أ) أحسب الثمن v_2.

ب) أكتب v_n بدلالة n ثم أحسب v_8.

ت) أحسب ثمن الكراء لثماني سنوات .

3) ما هو العقد الذي يختاره عمر

تمرين رقم 2 الحل

أ) أحسب الثمن u_2.

لدينا $u_1 = 5000\,DA$ ومنه $u_2 = u_1 + 150\,DA = 5150\,DA$

ب) أكتب u_n بدلالة n ثم أحسب u_8.

نلاحظ انه دائما من اجل n عدد طبيعي فان $u_{n+1} = u_n + 150\,DA$ ومنه $u_{n+1} - u_n = 150$

وهي متتالية حسابية اساسها $r = 150$

لدينا $u_1 = 5000\,DA$ مباشرة $u_n = u_1 + (n-1)r$ أي $u_n = 5000 + (n-1)150 = 150n - 4850$

ومنه $u_8 = 150 \times 8 - 4850 = 9600DA$

ث) أحسب ثمن الكراء لثماني سنوات.

يعني حساب مجموع ثمن سنوات وهو $S = u_1 + u_2 + ... + u_8$

اذن $S = u_1 + u_2 + ... + u_8 = {}^{8}\!/_{2}\,(u_1 + u_8) = 58400DA$

2) في العقد الثاني ثمن الكراء يزداد كل سنة بنسبة 3% .

نضع v_n ثمن الكراء للسنة n .

أ) أحسب الثمن v_2.

لدينا $v_1 = 5000\,DA$ ومنه $v_2 = v_1 + 0,03v_1 = 1.03v_1 = 5150$

ب) من أجل n عدد طبيعي لدينا: $v_{n+1} = v_n + 0,03v_n = 1.03v_n$ اذن (v_n) متتالية

هندسيةاساسها 1.03 ومنه $v_n = v_1(1,03)^{n-1} = 5000(1,03)^{n-1}$.

$$v_8 = 5000(1,03)^7 = 6149.37DA$$

$$T = v_1 + v_2 + ... + v_8 = \frac{(1,03)^8 - 1}{1,03 - 1} = 44461.68DA$$

تمرين رقم 3

نعتبر المتتالية $\left(u_n\right)$ المعرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي : $u_1=4$ و من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n،

$u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n-1$. برهن بالتراجع أن المتتالية $\left(u_n\right)$ متناقصة

تمرين رقم 3 الحل

إثبات أن المتتالية $\left(u_n\right)$ متناقصة يؤول إلى إثبات أنه، من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، $u_{n+1}\le u_n$.

المرحلة 1 : نتحقق من أن: $u_2\le u_1$

لدينا $u_2=\frac{1}{2}u_1-1=\frac{1}{2}\times 4-1=1$ و منه $u_2\le u_1$.

المرحلة 2 نفرض أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، $u_{n+1}\le u_n$. نبرهن أن $u_{n+2}\le u_{n+1}$.

لدينا $u_{n+1}\le u_n$. نحصل بعد ضرب الطرفين في $\frac{1}{2}$ على $\frac{1}{2}u_{n+1}\le\frac{1}{2}u_n$. نضيف (-1) إلى الطرفين لنجد:

$\frac{1}{2}u_{n+1}-1\le\frac{1}{2}u_n-1$ أي $u_{n+2}\le u_{n+1}$.

الخلاصة: من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، $u_{n+1}\le u_n$. إذن المتتالية $\left(u_n\right)$ متناقصة.

تمرين رقم 4

نعتبر المتتالية $\left(u_n\right)$ المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0=2$ و $u_{n+1}=0,6u_n-1,2$.

1. أ. برهن بالتراجع أنّ المتتالية $\left(u_n\right)$ متناقصة .

ب. برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n>-3$.

جـ. استنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $\left|u_n\right|<3$.

2. نعتبر المتتالية $\left(v_n\right)$ المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=u_n+3$

أ. برهن أن المتتالية $\left(v_n\right)$ هندسية يطلب تحديد أساسها .

ب. أحسب بدلالة n ، عبارة الحد v_n ثم استنتج عبارة الحد u_n بدلالة n .

3. من أجل كل عدد طبيعي n ، $S_n=v_0+v_1+...+v_n$.

أ. أحسب المجموع S_n بدلالة n .

ب. استنتج بدلالة n المجموع $T_n=u_0+u_1+...+u_n$.

تمرين رقم 4 الحل

1.أ برهن بالتراجع أنّ المتتالية $\left(u_n\right)$ متناقصة أي $u_{n+1}\le u_n$.

المرحلة الأولى: نتحقق من أن: $u_1\le u_0$

لدينا $u_1=0,6u_0-1,2=0$ و منه $u_1\le u_0$.

المرحلة الثانية: نفرض أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، $u_{n+1}\le u_n$.

المرحلة الثالثة: نبرهن أن $u_{n+2}\le u_{n+1}$.

لدينا $u_{n+1}\le u_n$. نحصل بعد ضرب الطرفين في 0.6 على $0.6u_{n+1}\le 0.6u_n$. نضيف $(-1,2)$ إلى الطرفين لنجد: $0.6u_{n+1}-1,2\le 0.6u_n-1,2$ أي $u_{n+2}\le u_{n+1}$.

الخلاصة: من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، $u_{n+1}\le u_n$. إذن المتتالية $\left(u_n\right)$ متناقصة.

ب. برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n>-3$.

$u_n>-3$ يعني ان $0.6u_n>-1.8$ باضافة $(-1,2)$ نجد $0.6u_n-1,2>-3$ أي ان $u_{n+1}>-3$

	اذن بما ان $u_{n+1} \leq u_n$ و $u_{n+1} > -3$ فان $u_n > -3$ ج. استنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $\lvert u_n \rvert < 3$. $\lvert u_n \rvert < 3$ يعني ان $-3 \prec u_n \prec 3$ نثبت ان $u_n \prec 3$ $u_n \prec 3$ يعني ان $0.6u_n \prec -1.8$ باضافة $(-1,2)$ نجد $0.6u_n - 1,2 \prec -3$ أي ان $u_{n+1} \prec -3$ اذن بما ان $u_{n+1} \prec -3$ فان $u_{n+1} \prec 3$ لان $-3 \prec 3$ و منه بما ان $u_{n+1} \prec 3$ فان $u_n \prec 3$ اذن $-3 \prec u_n \prec 3$ وبالتالي $\lvert u_n \rvert < 3$ 2. نعتبر المتتالية (v_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ بِـ: $v_n = u_n + 3$ أ. المتتالية (v_n) هندسية يطلب تحديد أساسها . يعني ان $v_{n+1} = v_n \times q$ $v_n = u_n + 3$ $v_{n+1} = u_{n+1} + 3$ $....... = 0,6u_n - 1,2 + 3$ $....... = 0,6u_n + 1.8$ $....... = 0.6(v_n - 3) + 1,8$ $....... = 0,6v_n$ اذن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = 0.6$ ب. عبارة الحد v_n ثم استنتج عبارة الحد u_n بدلالة n . لدينا $q = 0.6$ و $v_0 = u_0 + 3 = 2 + 3 = 5$ ومنه $v_n = 5 \times (0,6)^n$ لدينا $v_n = u_n + 3$ ومنه $u_n = v_n - 3 = v_n = 5 \times (0,6)^n - 3$ 3. من أجل كل عدد طبيعي n ، $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$. أ. أحسب المجموع S_n بدلالة n $S = v_0 \left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q} \right) = 5 \left(\frac{1-0.6^{n+1}}{0,4} \right)$ ب. استنتج بدلالة n المجموع $T_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$. $T_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$ لدينا $v_n = u_n + 3$ ومنه $T_n = (v_0 - 3) + (v_1 - 3) + ... + (v_n - 3)$ أي $T_n = (-3)(n+1) + (v_0 + v_1 + ... + v_n)$ أي ان $T_n = (-3)(n+1) + 5\left(\frac{1-0.6^{n+1}}{0,4} \right)$.	

المكتسبات المستهدفة: درس اضافي

يتم بهذه المناسبة التذكير بالمتتاليات الحسابية والمتتاليات الهندسية.

متتاليات من الشكل $u_{n+1}=au_n+b$

(u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بحدها الأول u_1 و بالعلاقة $u_{n+1}=au_n+b$ حيث $a\neq 0$ و $b\neq 0$.

الحالة الأولى $a=1$

مثال الكتاب المدرسي

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بحدها الأول $u_1=2$ و من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$ $u_{n+1}=u_n-3$.

- من الواضح أن المتتالية (u_n) حسابية أساسها $r=-3$ و حدها الأول $u_1=2$.
- من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$، $u_n=u_1+(n-1)r$ و منه $u_n=5-3n$.
- من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$، $S_n=u_1+u_2+...+u_n=\frac{n}{2}\ u_1+u_n$

و منه $S_n=\frac{n\ \ 7-3n}{2}$

- من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$، $u_{n+1}-u_n=-3$ و منه المتتالية (u_n) متناقصة

الحالة الثانية $a\neq 1$ و $u_0=\frac{b}{1-a}$

مثال الكتاب المدرسي

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بحدها الأول $u_1=-3$ و من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$ $u_{n+1}=2u_n+3$.

- حساب الحدود الأولى يعطينا: $u_2=-3$ و $u_3=-3$، ... نخمن أن المتتالية (u_n) ثابتة.
- لنبين بالتراجع أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$، $u_n=-3$.

* الخاصية صحيحة من أجل $n=1$ لأن $u_1=-3$.

* نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل عدد طبيعي n حيث $n\geq 1$ أي أن $u_n=-3$ ونبرهن صحتها من أجل $n+1$.

لدينا $u_{n+1}=2u_n+3=2\ \ -3\ \ +3$ و منه $u_{n+1}=-3$. إذن الخاصية صحيحة من أجل $n+1$.

نستنتج، حسب مبدأ البرهان بالتراجع، أن الخاصية صحيحة من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$. إذن المتتالية (u_n) ثابتة.

- من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، $S_n=u_1+u_2+...+u_n=nu_1$ و منه $S_n=-3n$.

الحالة الثالثة $a\neq 1$ و $u_0\neq\frac{b}{1-a}$

لحساب الحد العام u_n و المجموع $S_n=u_1+u_2+...+u_n$ نستعين بالمتتالية ذات الحد العام $v_n=u_n-\frac{b}{1-a}$

مثال الكتاب المدرسي

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بحدها الأول $u_1=1$ و من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$، $u_{n+1}=2u_n+3$.

لتكن المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بحدها العام: $v_n=u_n+3$.

- من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$، $v_{n+1}=u_{n+1}+3=2u_n+3+3=2u_n+6=2(u_n+3)=2v_n$.

لدينا من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$، $v_{n+1}=2v_n$. نستنتج أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=2$ و حدها الأول $v_1=4$.

- من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$، $v_n=v_1\times q^{n-1}=4\times 2^{n-1}$ و $u_n=v_n-3=4\times 2^{n-1}-3$.
- من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$، $S'_n=v_1+v_2+...+v_n=v_1\times\frac{1-q^n}{1-q}=-4\ \ 1-2^n$. لدينا $u_n=v_n-3$ و منه

$$S_n=\ v_1-3\ +\ v_2-3\ +...+\ v_n-3\ =$$
$$v_1+v_2+...+v_n\ -\ 3+3+...+3\ =S'_n-3n$$

نستنتج هكذا أن $S_n=-4\ \ 1-2^n\ \ -3n$.

- من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$، $u_{n+1}-u_n=v_{n+1}-v_n$ و منه للمتتاليتين (u_n) و (v_n) نفس اتجاه التغير