المؤسسة: ثانوية خالص سليمان -بشلول		بطاقة رقم: 58/02	الأستاذ: شداني عبد المالك
الحصة	تحليل	التاريخ	17 فيفري 2016
المحور	المتتاليات العددية	القسم	3 ع ت 4
الموضوع	المتتاليات الحسابية و الهندسية (تذكير)	المدة	ساعتين
الكفاءات المستهدفة		المعارف المكتسبة	السنة الثانية علمي
الوسائل البداغوجية	السبورة، المسطرة	المراجع	الكتاب المدرسي، كتاب الأستاذ

سير الدرس	مراحل الدرس	الزمن
صياغة الكفاءة	**تذكير:** **تعريف:** كل دالة u ترفق بكل عدد طبيعي n من أو يساوي العدد الطبيعي n_0 العدد الحقيقي $u(n)$ نسميها متتالية عددية و نرمز لها بـ u_n	

ملخص الدرس:

	المتتالية الحسابية	المتتالية الهندسية
تعريف	الانتقال من حد إلى الحد التالي يكون بإضافة نفس الثابت r، ويسمى أساس المتتالية	الانتقال من حد إلى الحد التالي يكون بالضرب في نفس الثابت q، ويسمى أساس المتتالية
العلاقة التراجعية	$u_{n+1}=u_n+r$	$u_{n+1}=u_n\times q$
الحد العام	$u_n=u_0+nr \leftarrow$ الحد الأول u_0 $u_n=u_1+(n-1)r \leftarrow$ الحد الأول u_1	$u_n=u_0\times q^n \leftarrow$ الحد الأول u_0 $u_n=u_1\times q^{n-1} \leftarrow$ الحد الأول u_1
العلاقة بين حدين	من أجل كل عددين طبيعيين $n\geq p$: $u_n=u_p+(n-p)r$	من أجل كل عددين طبيعيين $n\geq p$: $u_n=u_p\times q^{n-p}$
مجموع حدود متتابعة	$S=u_0+u_1+...+u_n=(n+1)\left(\frac{u_0+u_n}{2}\right)$ بصفة عامة: $S=$ عدد الحدود $\times\frac{\text{الحد الأول + الحد الأخير}}{2}$ حالة خاصة أساسية: $1+2+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$	$S=u_0+u_1+...+u_n=u_0\times\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ بصفة عامة: $S=$ الحد الأول $\times\frac{1-q^{\text{عدد الحدود}}}{1-q}$ حالة خاصة أساسية: $1+q+q^2+...+q^n=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ مع $q\neq 1$
النهايات	$r>0\rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$ $r<0\rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}u_n=-\infty$	$q>1\rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}q^n=+\infty$ $q=1\rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}q^n=1$ $-1<q<1\rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}q^n=0$ $q\leq-1\rightarrow$ نهاية (q^n) غير موجودة
الوسط الهندسي و الحسابي	الوسط الحسابي (a,b,c حدود متتابعة من متتالية حسابية) يكافئ $2b=a+c$ "يسمى العدد b الوسط الحسابي للعددين a و c	الوسط الهندسي (a,b,c حدود متتابعة من متتالية هندسية) يكافئ $b^2=a\times c$ "يسمى العدد b الوسط الهندسي للعددين a و c

تنبيهات وملاحظات هامة:

1) كيف نحسب عدد الحدود $u_\alpha + ... + u_\beta$: $\boxed{(\beta-\alpha)+1 = \text{عدد الحدود}}$

2) تقارب المتتالية الهندسية: مبرهنة: إذا كان أساس المتتالية الهندسية q ينتمي ينتمي إلى المجال $]-1;+1[$ فإن المتتالية الهندسية متقاربة

كيف ندرس إتجاه تغير متتالية عددية : (3 طرق)

طريقة1: إذا كان : $u_{n+1} - u_n \geq 0$ فإن (u_n) متزايدة إذا كان : $u_{n+1} - u_n \leq 0$ فإن (u_n) متناقصة إذا كان : $u_{n+1} - u_n = 0$ فإن (u_n) ثابتة	طريقة2: إذا كانت : $u_n = f(n)$ إذا كانت f متزايدة على المجال $[0;+\infty[$ فإن المتتالية (u_n) متزايدة و إذا كانت f متناقصة على المجال $[0;+\infty[$ فإن المتتالية (u_n) متناقصة
طريقة3: إذا كان $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ فإن المتتالية (u_n) متزايدة و إذا كان $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$ فإن المتتالية (u_n) متناقصة. تستعمل هذه الطريقة إذا كانت حدود المتتالية موجبة تماما	

مرحلة التقويم و الإستثمار

التمرين1: (U_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2 + 3u_n \end{cases}$

1. أحسب u_1 ، u_2

2. نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \frac{2}{u_n + 1}$

أ) بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها ب) أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

ج) أحسب المجموع: $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_{n-1}$

3. نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $X_n = v_0^2 + v_1^2 + ... + v_{n-1}^2$ ،

بين أن $X_n = \frac{9}{8}\left[1 - \left(\frac{1}{9}\right)^n\right]$

4. أحسب بدلالة n الجداء: $\pi_n = v_0 \times v_1 \times ... \times v_n$

التمرين2: (U_n) متتالية حسابية متناقصة تماما حيث: $\begin{cases} u_0 + u_1 + u_2 = 15 \\ \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} = \frac{33}{40} \end{cases}$

1. أحسب كلا من u_0 ، u_1 ، u_2 و الأساس r 2. أحسب المجموع: $S_n = \sum_{i=0}^{n} u_i$

الحل:---

1) $u_1 = 2 + 3u_0 = 2 + 3 = 5$ ، $u_2 = 2 + 3u_1 = 2 + 15 = 17$

2) أ) تبيان أن (v_n) هندسية:

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$v_{n+1} = \frac{2}{u_{n+1} + 1} = \frac{2}{2 + 3u_n + 1} = \frac{2}{3 + 3u_n} = \frac{1}{3} \times \frac{2}{u_n + 1} = \frac{1}{3} \times v_n$$

إذن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$ و حدها الأول $v_0 = \frac{2}{u_0 + 1} = 1$

عبارة الحد العام لـ v_n : $v_n = v_0 \times q^n = 1\times\left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{3^n}$

عبارة الحد العام لـ u_n : لدينا $v_n = \frac{2}{u_n+1}$ ومنه $v_n\left(u_n+1\right)=2$ ومنه

$u_n+1=\frac{2}{v_n}$ اي $u_n=\frac{2}{v_n}-1$ ومنه : $u_n=\frac{2}{\frac{1}{3^n}}-1=\left(2\times 3^n\right)-1$

حساب المجموع:

$$S = v_0+v_1+...+v_n = v_0\times\frac{1-q^{n+1}}{1-q}=\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right]$$

3) **حساب** X_n **:**

$$\begin{aligned}S_2 &= V_0{}^2+V_1{}^2+...+V_n{}^2\\ &= V_0{}^2+(V_0q)^2+(V_0q^2)^2+...+(V_0q^n)^2\\ &= V_0{}^2+V_0{}^2q^2+V_0{}^2(q^2)^2+...+V_0{}^2(q^n)^2\\ &= V_0{}^2\left[1+q^2+(q^2)^2+...+(q^2)^n\right]\end{aligned}$$

بوضع: $y=q^2$ نجد:

$$S_2 = V_0{}^2(1+y+y^2+...+y^n)=V_0^2\left(\frac{1-y^{n+1}}{1-y}\right)=V_0{}^2\left(\frac{1-q^{2(n+1)}}{1-q^2}\right)$$

$$=\left(\frac{1-\left(\frac{1}{9}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{9}}\right)=\frac{9}{8}\left[1-\left(\frac{1}{9}\right)^{n+1}\right]$$

4. **أحسب بدلالة n الجداء:** $\pi_n = v_0\times v_1\times...\times v_n$:

$$\begin{aligned}P &= V_0\times V_1\times...\times V_n = V_0\times(V_0q)\times(V_0q^2)\times...\times(V_0q^n)\\ &= \underbrace{(V_0\times V_0\times...\times V_0)}_{n+1}\times\left(q\times q^2\times...\times q^n\right)\\ &= V_0{}^{n+1}\times\left(q^{1+2+...+n}\right)\\ &= \boxed{V_0{}^{n+1}\times q^{\frac{n(n+1)}{2}}}\\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}\end{aligned}$$