الرقم: 07/01

المؤسســـــة:	**المستـــوى:** 3رياضيات، 3ت رياضي، 3ع تج
السنة الدراسية: 2015 / 2016.	**ميدان التعلم:** تحليل - متتاليات
التاريـــــخ:	**الوحدة:** المتتاليات
توقيت الحصـة: ساعتان.	**موضوع الحصة:** المتتاليات الحسابية والمتتاليات الهندسية

المكتسبات القبلية:

الكفاءات القاعدية: حل مسائل باستخدام متتاليات هندسية، ومتتاليات حسابية.(ضمنية)

مؤشرات الكفـاءة:

الأنشطة المقترحة وطبيعتها	الإنجاز (سير الحصة)	توجيهات و تعاليق و أنشطة
نشاط:	(see below)	- يتم بهذه المناسبة التذكير بالمتتاليات الحسابية والمتتاليات الهندسية.

I/ تمهيد:

II/ العرض:

I) تذكير:

تعريف: كل دالة u ترفق بكل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي العدد الطبيعي العدد الحقيقي n_0 $u(n)$ نسميها متتالية عددية. **مثالان:** $u_n=\sqrt{n-4}$ ، $v_n=n+1$.

اتجاه تغير متتالية: نقول عن متتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ إنها متزايدة (متزايدة تماما) إذا وفقط إذا كانت من أجل كل n أكبر من أو يساوي n_0 لدينا: $u_{n+1}\geq u_n$ ($u_{n+1}>u_n$)، ونقول إنها متناقصة (متناقصة تماما) إذا وفقط إذا كانت من أجل كل n أكبر من أو يساوي n_0 لدينا: $u_{n+1}\leq u_n$ ($u_{n+1}<u_n$)،ونقول إنها ثابتة إذا وفقط إذا كانت من أجل كل n أكبر من أو يساوي n_0 لدينا: $u_{n+1}=u_n$ ($u_{n+1}-u_n=0$).

الرتابة: إذا كانت المتتالية متزايدة فقط أو متناقصة فقط نقول إنها رتيبة.

المتتالية الحسابية: نقول عن متتالية (u_n) إنها حسابية إذا وجد عدد حقيقي α وحقق من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=u_n+\alpha$ ، (أو $u_{n+1}-u_1=\alpha$).ويسمى α أساسها.

نتائج: إذا كانت (u_n) متتالية حسابية فإننا نجد: $\boxed{u_n+u_{n+2}=2u_{n+1}}$. ومن أجل كل n و m من N: $\boxed{u_n=u_0+\alpha n=u_1+\alpha(n-1)=u_m+\alpha(n-m)}$.ونجد: $\boxed{u_0+...+u_n=\frac{n+1}{2}(u_0+u_1)}$.أي:

$\boxed{u_0+...+u_n=}$ (آخر حد في مج+ أول حد في مج)×(2 /عدد الحدود)

المتتالية الهندسية: نقول عن متتالية (u_n) إنها هندسية إذا وجد عدد حقيقي q وحقق من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=q.u_n$. (حالة خاصة: الأساس: $q=1$).

نتائج: T متتالية هندسية معرفة بالحد T_0، والأساس q. نجد من أجل كل n و m من N: $\boxed{T_n=T_0.q^n=T_1.q^{n-1}=T_m.q^{n-m}}$، ونجد أيضا: $\boxed{T_0+T_1+....+T_n=T_0\times\frac{1-q^{n+1}}{1-q}}$ من أجل: $q\neq 1$. وإلا: $\boxed{T_0+T_1+....+T_n=(n+1)T_0}$.

اتجاه تغير المتتالية الحسابية، والمتتالية الهندسية: (تقدم في شكل موجز)

II) نهاية متتالية هندسية:

المتتالية المتباعدة والمتتالية المتقاربة: نقول عن متتالية إنها متقاربة إذا وفقط إذا كانت نهايتها هي عدد حقيقي.

مثال: u متتالية هندسية غير معدومة أساسها q، وحدها الأول u_0. نجد: $\boxed{u_n=u_0.q^n}$ ومنه:

إذا كان $q>1$ و $u_0>0$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$ إذا u متباعدة.

و إذا كان $q>1$ و $u_0<0$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=-\infty$ إذا u متباعدة.

و إذا كان $-1<q<1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$ إذا u متقاربة.

وإذا كان $q<-1$ فإن u متباعدة (النهاية غير موجودة).

III/ تطبيق: من رقم2 إلى 11 ص24.

الرقم:07/02

المؤسســــة:	**المستـــوى:** 3رياضيات، 3ت رياضي، 3ع تج
السنة الدراسية:2015 / 2016.	**ميدان التعلم:** تحليل - متتاليات
التاريــــخ:	**الوحدة:** المتتاليات
توقيت الحصـة:.	**موضوع الحصة:** الاستدلال بالتراجع

المكتسبات القبلية:
الكفاءات القاعدية: الاستدلال بالتراجع
مؤشرات الكفـاءة:

الأنشطة المقترحة وطبيعتها	*الإنجاز (سير الحصة)*	توجيهات و تعاليق و أنشطة
نشاط: نرتب تلاميذ الأقسام النهائية في الثانوية، ونرقمهم بحيث نرمز للتلميذ رقم n بالرمز، $E(n)$ حيث $n \geq 1$. علما أن: - $E(1)$ ناجح. - إذا نجح $E(n)$ ينجح $E(n+1)$. ما هي النتيجة المحصلة؟	**I/ تمهيد:** **II/ العرض:** **مبدأ الاستدلال بالتراجع (مُسَلَّمَةٌ) :** $P(n)$ خاصية متعلقة بالعدد الطبيعي n. لإثبات صحة $P(n)$ من أجل كل عدد طبيعي n أكبر أو يساوي n_0، يكفي أن: - نتأكد من صحة $P(n_0)$. - نفرض صحة الخاصية من أجل عدد كيفي q أكبر أو يساوي n_0، أي "$P(q)$ صحيحة"، ونثبت صحتها من أجل $q+1$، أي صحة $P(q+1)$. **مثال1:** بين أنه من أجل كل عدد طبيعي أكبر من أو يساوي 6، فإن: $3^n \geq 100n$. **مثال2:** لاحظ أنه إذا كان "3^p يقبل القسمة على5" فإن "3^{p+1} يقبل القسمة على5". ماذا تستنتج؟ **تنبيهان هامان:** - إن الشرط الأول في مبدأ الاستدلال بالتراجع ضروري جدا. - هذا المبدأ صالح فقط مع مجموعة الأعداد الطبيعية. **III/ تطبيق:** من12 إلى 22 ص24، 25.	

الرقم:07/03

المؤسســـــة:	**المستــــوى:** 3رياضيات، 3ت رياضي، 3ع تج
السنة الدراسية: 2015 / 2016.	**ميدان التعلم:** تحليل - متتاليات
التاريــــــخ:	**الوحدة:** المتتاليات
توقيت الحصـة:.	**موضوع الحصة:** توليد متتالية عددية، وتخمين سلوكها.

المكتسبات القبلية:

الكفاءات القاعدية: استعمال التمثيل البياني لتخمين سلوك ونهاية متتالية عددية.

مؤشرات الكفـاءة:

الأنشطة المقترحة وطبيعتها

نشاط:

نفرض المستوي منسوبا إلى معلم متعامد ومتجانس، ولتكن الدالة $f: x \mapsto \sqrt{x+6}$

*أدرس f دراسة شاملة، وأنشئ (C_f)، والمستقيم $(\Delta): x = y$

*نعتبر الآن المتتالية u المعرفة بما يلي: $u_0 = -5$، ومن أجل كل n من N^*: $u_{n+1} = \sqrt{6+u_n}$.

- بين أن u موجبة باستثناء الحد الأول.

- استعن بالحاسبة واحسب ثم مثل الحدود u_0، u_1، u_2، u_3، u_4.

- خمن اتجاه تغير u، ونهايتها؟

- اعتمادا على أن u تؤول إلى 3 بقيم أصغر من3، برر اتجاه التغير.

(حل: 1/ 2/ 3/ 4/ سهلة، 5/ لنقدر إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$. وحيث أن u_n، u_{n+1} موجبتان، يكفي تقدير إشارة الفرق $(u_{n+1})^2 - (u_n)^2$، نجد:

$$(u_{n+1})^2 - (u_n)^2 = 6 + u_n - u_n^2 = -(u_n + 2)(u_n - 3)$$

فنحصل على الجدول التالي:

		-2		3	
الفرق	-	0	+	0	-

مع العلم أن u_n موجبة وأصغر من3، ومنه فإن $u_{n+1} - u_n > 0$ أي أن u متزايدة).

الإنجاز (سير الحصة)

I/ تمهيد:

II/ العرض:

III/ تطبيق:

ت1: نفرض المستوي منسوبا إلى معلم متعامد ومتجانس، ولتكن الدالة $f: x \mapsto x^2 - 5x + 4$.
والمتتالية v المعرفة من أجل كل n من N بـ $v_n = f(n)$.

1/ أدرس f دراسة شاملة، وأنشئ (C_f).

2/ أحسب ثم مثل الحدود السبعة الأولى لـ v.

3/ استنتج مما سبق نهاية المتتالية v؟

ت2: رقم 1 ص24.

توجيهات و تعاليق و أنشطة

- تقترح متتاليات معرفة باستعمال دالة f بعلاقة من الشكل: $U_n = f(n)$ أو $U_{n+1} = f(U_n)$

الرقم:07/04

المؤسسـة:	**المستـوى:** 3رياضيات، 3ت رياضي، 3ع تج
السنة الدراسية: 2015 / 2016.	**ميدان التعلم:** تحليل - متتاليات
التاريـخ:	**الوحدة:** المتتاليات
توقيت الحصـة:.	**موضوع الحصة:** نهاية متتالية.

المكتسبات القبلية:

الكفاءات القاعدية: دراسة سلوك ونهاية متتالية.

مؤشرات الكفـاءة:

الأنشطة المقترحة وطبيعتها	*الإنجاز (سير الحصة)*	توجيهات و تعاليق و أنشطة
نشاط: نعتبر المتتالية المعرفة بما يلي: $u_n=\dfrac{3n^2-4}{n^2+1}$. - أحسب الحدود الـ10 الأولى، ثم مثلها في مستو منسوب إلى معلم. - مثل على محور التراتيب المجال $]2.7,3.3[$. - أوجد العدد n_0 ، حيث من أجل كل $n \geq n_0$ يكون $u_n \in]2.7,3.3[$.	**I/ تمهيد:** **II/ العرض:** **نهاية متتالية عددية:** **تعريف:** (u_n) متتالية عددية، و l عدد حقيقي. نقول إن نهاية (u_n) هي l إذا وفقط إذا كان كل مجال مفتوح يشمل l يشمل أيضا كل حدود (u_n) ابتداء من رتبة معينة. (ونكتب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=l$ أو $\lim u_n=l$). ونقول أيضا إن (u_n) متقاربة نحو l . **ملاحظة:** النتائج المتعلقة بنهايات الدوال تبقى صحيحة مع المتتاليات ونشير إلى أنه إذا وضعنا $u_n=f(n)$ نحصل على: إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l$ فإن $\lim u_n=l$ ، وإذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ فإن $\lim u_n=+\infty$ وإذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ فإن $\lim u_n=-\infty$. مثال: نعتبر $f(x)=\dfrac{2x+1}{-3x+5}$. أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، واستنتج طبيعة المتتالية المرفقة بها ($u_n=\dfrac{2n+1}{-3n+5}$). **تنبيه:** عكس النتائج السابقة غير صحيح على إطلاقه، فمثلا: من أجل $f(x)=\dfrac{3x\cos(2\pi x)}{x+2}$ نجد $u_n=\dfrac{3n}{n+2}$ و $\lim u_n=3$ ، ورغم ذلك $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ غير موجودة. **III/ تطبيق:** من رقم23 إلى31 ص25، 26.	- في دراسة نهايات المتتاليات تطبق النتائج المحصل عليها في السنة الثانية أو المبرهنات المعروفة على الدوال عندما يؤول n إلى $+\infty$. - عندما تقبل الدالة f نهاية l عندما يؤول المتغير إلى $+\infty$ فإن المتتالية (U_n) المعروفة بالعلاقة $U_n=f(n)$ تقبل نفس النهاية l عندما يؤول n إلى $+\infty$ (ننبه أن العكس غير صحيح). - تعطى أمثلة عن دوال محدودة من الأعلى (بالقيمة المطلقة) بمتتالية هندسية متقاربة.

الرقم:07/05

المؤسســـــة:	**المستـــوى:** 3رياضيات، 3ت رياضي، 3ع تج
السنة الدراسية:2015 / 2016.	**ميدان التعلم:** تحليل - متتاليات
التاريــــــخ:	**الوحدة:** المتتاليات
توقيت الحصـة:.	**موضوع الحصة:**

المكتسبات القبلية:

الكفاءات القاعدية: دراسة سلوك ونهاية متتالية.

مؤشرات الكفـاءة:

الأنشطة المقترحة وطبيعتها	الإنجاز (سير الحصة)	توجيهات و تعاليق و أنشطة

الأنشطة المقترحة وطبيعتها

نشاط:

لتكن المتتالية المعرفة كما يلي: من أجل كل n من N : $u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n+1$.

1) نضع $u_0=3$، أحسب بعض الحدود لها. ماذا تستنتج؟

2)نفرض الآن أن: $u_0=4$.

ولتكن المتتالية v حيث من أجل كل n من N : $v_n=u_n-3$.

بين أن v هندسية، وحدد أساسها.

3) عبر بدلالة n عن كل من: v_n ، u_n.

4) هل (u_n) متقاربة؟

5) بين أن كل حدود u محصورة بين3 و4.

n	un
0	4
1	3.666667
2	3.444444
3	3.296296
4	3.197531
5	3.131687
6	3.087791
7	3.058528
8	3.039018
9	3.026012
10	3.017342
11	3.011561
12	3.007707
13	3.005138

الإنجاز (سير الحصة)

I/ تمهيد:

II/ العرض:

المتتالية المحدودة:

تعريف: (u_n) متتالية عددية معرفة على N.

-(u_n)محدودة من الأعلى معناه يوجد عدد حقيقي A أكبر من جميع حدودها.(أي من أجل كل n من N يكون $u_n\le A$). ونسمي A حادا من الأعلى.

-(u_n) محدودة من الأسفل معناه يوجد عدد حقيقي A أصغر من جميع حدودها.(أي من أجل كل n من N يكون $u_n\ge A$). ونسمي A حادا من الأسفل.

-(u_n) محدودة معناه هي محدودة من الأعلى ومن الأسفل.

مثال: نعتبر $u_n=\frac{2n+1}{n+1}$، الـ Excel يعطينا النتائج التالية:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Un	1	1.5	1.7	1.8	1.8	1.8	1.9	1.88	1.9	1.9	1.9	1.9	1.9	1.9

بإنشاء التمثيل البياني اعتمادا على هذه النتائج، نخمن أن u محدودة، وأن1 و2 حادان لها من الأسفل ، ومن الأعلى على التوالي. برر ذلك؟

ملاحظة: المتتالية المحدودة تقبل عددا غير منته من الحواد.

مبرهنة: (نقبل المبرهنة التالية)

المتتالية المتزايدة والمحدودة من الأعلى متقاربة. والمتتالية المتناقصة والمحدودة من الأسفل متقاربة.

III/ تطبيق:

1) مسألة: a، b عددان حقيقيان. ولتكن المتتالية المعرفة كما يلي: من أجل كل n من N : $u_{n+1}=au_n+b$. نريد دراسة مفصلة ومناقشة شاملة لتقارب هذه المتتالية.

1) ناقش الحالتين $a=0$، $a=1$.

نفرض الآن أن $a\neq 0$، و $a\neq 1$.

2) إذا كانت(u_n) متقاربة، فما هي نهايتها؟

نعتبر المتتالية v حيث من أجل كل n من N : $v_n=u_n+\frac{b}{a-1}$.

3) بين أن v هندسية، وحدد أساسها.

4) عبر بدلالة n، u_0، a، b عن كل من: v_n ، u_n.

5) هل (u_n) متقاربة؟ أجب عن السؤال2) بطريقة أخرى؟

6) **حالة خاصة**: أدرس المتتالية(u_n) من أجل $a=-2$، $b=1$، $u_0=\frac{1}{3}$.

2)تمارين الكتاب المدرسي: من رقم32 إلى37 ص26.

توجيهات و تعاليق و أنشطة

- من خلال أمثلة، ندرس تقارب المتتاليات من الشكل $U_{n+1}=f(U_n)$ خاصة عندما تكون الدالة f تآلفية ($f(x)=ax+b$)،

- وفي هذه الحالة نناقش سلوك المتتالية حسب قيم العددين الحقيقيين a و b.

الرقم: 07/06

المؤسســــة:	**المستـــوى:** 3رياضيات، 3ت رياضي، 3ع تج
السنة الدراسية: 2015 / 2016.	**ميدان التعلم:** تحليل - متتاليات
التاريـــــخ:	**الوحدة:** المتتاليات
توقيت الحصـة:.	**موضوع الحصة:** المتتاليتان المتجاورتان

المكتسبات القبلية:

الكفاءات القاعدية: معرفة واستعمال مفهوم متتاليتين متجاورتين.

مؤشرات الكفـاءة:

الأنشطة المقترحة وطبيعتها	الإنجاز (سير الحصة)	توجيهات و تعاليق و أنشطة
نشاط: لتكن المتتاليتان المعرفتان بما يلي: من أجل كل n من N : $u_n = 3 - \frac{4}{n}$ ، $v_n = \frac{3n+1}{n}$. 1) أدرس اتجاه تغير كل منهما. 2) أحسب $\lim(u_n - v_n)$. 3) مثل بيانيا كلا منهما في نفس المعلم.	**I/ تمهيد:** **II/ العرض:** **المتتاليتان المتجاورتان:** **تعريف:** تتجاور متتاليتان عدديتان إذا وفقط إذا كانت إحداهما متزايدة والأخرى متناقصة، وكان الفرق بينهما يؤول إلى الصفر. **مثال:** بين أن المتتاليتين المعرفتين بما يلي متجاورتان. من أجل كل n من N : $u_n = \frac{2n-3}{n}$ ، $v_n = \frac{2n+3}{n}$. **مبرهنة:** (نقبل المبرهنة التالية) إذا كانت متتاليتان متجاورتين فإنهما تتقاربان إلى نفس النهاية. **III/ تطبيق:** من رقم38 إلى44 ص26، 27.	- يعطى تعريف متتاليتين متجاورتين وتقبل النظرية التي تنصّ على أنه إذا كانت متتاليتان متجاورتين فإنهما تتقاربان إلى نفس النهاية ويستثمر ذلك لحصر ثمّ حساب مساحة الحيز تحت المنحنى الممثل لدالة. تعديل2008/2009: الكفاءة المتعلقة باستعمال متتاليتين متجاورتين. الاقتصار على توظيف المفهوم فقط لتبرير حساب مساحة السطح تحت المنحنى في الدرس.

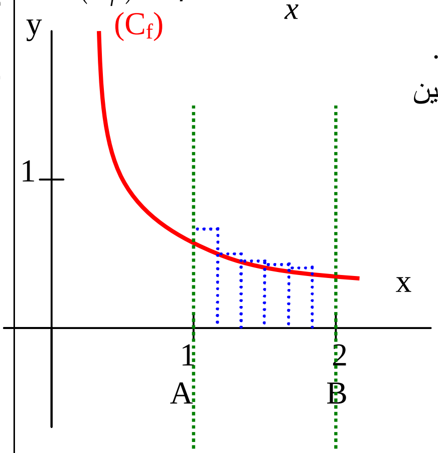
الرقم:07 والأخيرة

المؤسســـة:	**المستـــوى:** 3رياضيات، 3ت رياضي، 3ع تج
السنة الدراسية: 2015 / 2016.	**ميدان التعلم:** تحليل - متتاليات
التاريــــخ:	**الوحدة:** المتتاليات
توقيت الحصـة:	**موضوع الحصة:**

المكتسبات القبلية:

الكفاءات القاعدية: حل مشكلات توظف فيها المتتاليات والبرهان بالتراجع

مؤشرات الكفـاءة:

الأنشطة المقترحة وطبيعتها	الإنجاز (سير الحصة)	توجيهات و تعاليق و أنشطة
نشاط: كل الحصة عبارة عن أنشطة	**I/ تمهيد:** **II/ العرض:** **III/ تطبيق:** المستوي منسوب إلى معلم، ولتكن الدالة $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ ، و (C_f) تمثيلها البياني على المجال $]0,+\infty[$ كما بالشكل.  الهدف حساب S مساحة السطح E المحصور بين (C_f)ومحور الفواصل والمستقيمين المعرفين بالمعادلتين: $x=1$ ، $x=2$. n عدد طبيعي أكبر من أو يساوي2. و u_n مساحة كل المستطيلات المحتواة في E . و v_n مساحة كل المستطيلات المحتوي فيها E . 1) أثبت أن: $u_n = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n}$ ، $v_n = \frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+...+\frac{1}{2n-1}$. 2) أدرس اتجاه تغير كل من u ، v . 3) أحسب $\lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n)$ ، ماتعليقك؟ 4) إن استخدام الـExcel يعطي مثلا: $u_2 = 0.5833$ ، $v_2 = 0.8333$ ، $u_{50} = 0.6882$ ، $v_{50} = 0.6982$ ، $u_{100} = 0.6907$ ، $v_{100} = 0.6957$. (فائدة: هذه النهاية تسمى اللوغاريتم النبيري للعدد2) **تطبيقات الكتاب المدرسي:** ابتداء من رقم45، ص27 وما بعد.	..... فإنهما تتقاربان إلى نفس النهاية ويستثمر ذلك لحصر ثمّ حساب مساحة الحيز تحت المنحنى الممثل لدالة