أستعد للباكالوريا

السنة الدراسية		اعداد الاستاذ
2015/2014	Yousfi Math Yousfisifou804@yahoo.fr	يوسفي عبد الرحمن

المحور الثاني :الهندسة في الفضاء

المستوى : الثالثة علوم ورياضيـــــــــــات

الموضوع : الهندسة في الفضاء droites et plans dans l'espace

الكفاءة المستهدفة

- توظيف الجداء السلمي لإثبات تعامد مستوين مستقيم ومستو.
- توظيف الجداء السلمي لتعيين معادلة ديكارتية لمستو.
- توظيف الجداء السلمي لحساب المسافة بين نقطة ومستو.
- توظيف الجداء السلمي لتعيين مجموعات نقط.
- الانتقال من جملة معادلتين ديكارتيتين لمستقيم أو معادلة ديكارتية لمستو إلى تمثيل وسيطي، والعكس.
- تديد الوضع النسبي لمستوين،لمستقيم ومستو، لمستقيمين.
- تعيين تقاطع مستوين،مستقيم ومستو، مستقيمين
- استعمال التمثيلات الوسيطية لحل مسائل الاستقامية، التلاقي، انتماء 4 نقط إلى نفس المستوي.
- دراسةمجموعة النقط.

المكتسبات القبلية

- الجداء السلمي
- المرجح
- الهندسة في الفضاء
- مجموعات النقط

مخطط الدرس	التوقيت		التوقيت
الجداء السلمي		**تقاطع ثلاث مستويات**	
1: أنشطة تعاريف وخواص	2 سا	8:تمثيل مستقيم بمعادلتين خطيتين.	1 سا
2: تطبيقات الجداء السلمي	2 سا	9:استعمال التمثيلات الوسيطية لحل مسائل الاستقامية, التلاقي,انتماء 4نقط الى نفس المستوي	2 سا
التمثيل الوسيطي لمستقيم ومستو		تقويم ومعالجة بيداغوجية	2 سا
3: الانتقال من جملة معادلتين ديكارتيتين او	1 سا		5 سا
4:معادلة ديكارتية لمستو الى تمثيل وسيطي و العكس	2 سا		
5: الوضع النسبي لمستقيمين.	1 سا		
6: الوضع النسبي لمستقيم و مستو.	1 سا		
7: الوضع النسبي لمستوين.	1 سا		

وثائق التحضير	الوسائل البيداغوجية	نقد ذاتي
• دليل الأستاذ • الكتاب المدرسي • المنهاج • الهباج في الرياضيات • الجديد في الرياضيات	• السبورة • جهاز داتاشو	

نهائي رياضيات وعلوم

2015 الجداءالسلمي في الفضاء

المحور الثاني

الكفاءة المستهدفة

- توظيف الجداء السلمي لإثبات تعامد مستقيمين، تعامد مستويين و تعامد مستقيم و مستوى
- توظيف الجداء السلمي لتعيين معادلة ديكارتية لمستوى
- توظيف الجداء السلمي لحساب المسافة بين نقطة و مستوى
- توظيف الجداء السلمي لتعيين مجموعات النقط

المكتسبات القبلية

- الجداء السلمي في المستوي
- حساب الجداء السلمي لشعاعين.
- إثبات علاقات تتعلق بالتعامد.
- كتابة معادلة مستقيم علم شعاع ناظمي له و نقطة منه.
- تعيين معادلة دائرة.

الأستاذ YousfiMath Yousfisifou804@yahoo.fr الجداء السلمي يوسفي عبد الرحمن

- نعمم تعريف الجداء السلمي في المستوي إلى الفضاء، نراجع بهذه المناسبة الجداء السلمي في المستوي. ونستعمل التعبير "شعاع يعامد مستو".
- تعالج مسائل يتطلب حلها استعمال الجداء السلّمي و/أو عبارته التحليلية.
- مجموعات النقط المقصودة هنا هي تلك المعرفدة كما يلي: مجموعة النقط M حيث $\overrightarrow{AM}\times\overrightarrow{U}=k$ أو بصفة عامة $\alpha MA^2+\beta MB^2=k$ ($k\in$).
- نبر كيف أنّ دراسة الوضع النسبي لمستويين أو لمستقيم ومستو أو لمستقيمين يؤول إلى حل جملة معادلات خطية.
- نتطرق إلى تقاطع 3 مستويات الذي يؤدي إلى حل جملة ثلاث معادلات خطية بثلاثة مجاهيل.

ســــــــــــــير الدرس	التوقيت
نشاط 1: انشطة وتذكير بالجداء السلمي في المستوي 2: الجداء السلمي في الفضاء عبارات وتحاليل 3: تطبيقات الجداء السلمي 4: معادلة ديكارتية لمستوي في الفضاء 5: المسافة بين نقطة ومستوي 6:المرجح 7:تعيين مجموعة نقط باستعمال المرجح	

وثائق التحضير	الوسائل البيداغوجية	نقد ذاتي
• دليل الأستاذ • الكتاب المدرسي • المنهاج • الهباج في الرياضيات • مذكرات شايبي امين	• السبورة •	

المؤسســـــــة:	المستـــــــــوى: الثالثة رياضيات
السنة الدراسية:	ميـــدان التعلم: هندسة
التاريـــــــخ:	الوحدة التعلمية: الجداء السلمي في الفضاء
توقيت الحصة :	موضوع الحصة : انشطة تذكير بالجداء السلمي في المستوي(أنشطة تعاريف وخواص)

المكتسبات المستهدفة: مدخل انشطة وتذكير

الأنشطة المقترحة وطبيعتها

نشاط مقترح

نعتبر مثلثا كيفيا ABC و لتكن النقطة H المسقط العمودي للنقطة C على المستقيم (AB). نعتبر

$$w=\frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-BC^2\right)$$

1. انشئ الشكل
2. بين ان $AC^2=HA^2+HC^2$
3. استنتج ان $w=\frac{1}{2}\left(AB^2+HA^2-HB^2\right)$
4. اكتب HB بدلالة HA و AB

5: بين ان $w=AB\times AH$

$=AB\times AC\cos BAC$

الإنجاز(ســــــــير الحصة)

1 النشاط

$\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعان من المستوى

بين أن $4\vec{u}\cdot\vec{v}=\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|^2-\left\|\vec{u}-\vec{v}\right\|^2$ و $\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|^2+\left\|\vec{u}-\vec{v}\right\|^2=2\left(\left\|\vec{u}\right\|^2+\left\|\vec{v}\right\|^2\right)$

بين أن $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)\cdot\left(\vec{u}-\vec{v}\right)=\left\|\vec{u}\right\|^2-\left\|\vec{v}\right\|^2$

استنتج أن قطرى متوازي أضلاع يكونان متعامدين إذا كانت أضلاعه متقايسة.

2 الحـــل

نعلم ان $\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\left\|\vec{u}\right\|^2+\left\|\vec{v}\right\|^2-\left\|\vec{u}-\vec{v}\right\|^2\right)$...(1) و كذلك(2)... $\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left[\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|^2-\left\|\vec{\mu}\right\|^2-\left\|\vec{v}\right\|^2\right]$

بجمع (1) و(2) نجد $4\vec{u}\cdot\vec{v}=\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|^2-\left\|\vec{u}-\vec{v}\right\|^2$

ومنه $\frac{1}{2}\left(\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|^2-\left\|\vec{u}\right\|^2-\left\|\vec{v}\right\|^2\right)=\frac{1}{2}\left(\left\|\vec{u}\right\|^2+\left\|\vec{v}\right\|^2-\left\|\vec{u}-\vec{v}\right\|^2\right)$

$$\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|^2+\left\|\vec{u}-\vec{v}\right\|^2=2\left(\left\|\vec{u}\right\|^2+\left\|\vec{v}\right\|^2\right)$$

نعلم ان $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)\left(\vec{u}-\vec{v}\right)=\vec{u}^{\,2}-\vec{v}^{\,2}$ وبما ان $\left\|\vec{v}\right\|^2=\vec{v}^{\,2}$ و $\left\|\vec{u}\right\|^2=\vec{u}^{\,2}$ فان

$$\left(\vec{u}+\vec{v}\right)\cdot\left(\vec{u}-\vec{v}\right)=\left\|\vec{u}\right\|^2-\left\|\vec{v}\right\|^2$$

1 النشاط

في المستوي $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ نعتبر النقط A(1;0) ،B(2;-2) ،C(3;1) ،D(α;-1) و $\alpha\in\mathbb{R}$

1) عين طبيعة المثلث ABC
2) اكتب معادلة الدائرة (γ) ذات القطر [AB]
3) عين α حتى يكون ABCD مربعا $(\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD})$
4) اكتب معادلة المستقيم (BC)
5) عين α حتى تكون المسافة بين D و (BC) مساوية إلى $\sqrt{10}$

2 الحـــل

: A(1;0) ،B(2;-2) ،C(3;1) ،D(α;-1) $\alpha\in\mathbb{R}$

1) تعيين طبيعة المثلث ABC:

لدينا: $\overrightarrow{AB}(1;-2)$ ، $\overrightarrow{AC}(2;1)$ وعليه: $\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{5}$ و $\|\overrightarrow{AC}\|=\sqrt{5}$

ولدينا: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(1)(\quad)+(-2)(\quad)=0$

اذن المثلث ABC قائم في A و متساوي الساقين.

2) تعيين معادلة الدائرة (γ) ذات القطر [AB]:

الدائرة (γ) هي مجموعة النقط $M(x,y)$ من المستوي حيث:

$\overrightarrow{MA}\perp\overrightarrow{MB}$ أي $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$ حيث $\overrightarrow{MA}(1-x;y)$ ، $\overrightarrow{MB}(2-x;-2-y)$

التعليمات و التوجيهات

- نعمم تعريف الجداء السلمي في المستوي إلى الفضاء. نراجع بهذه المناسبة الجداء السلمي في المستوي. ونستعمل التعبير " شعاع يعامد مستو".
- تعالج مسائل يتطلب حلها استعمال الجداء السلّمي و/أو عبارته التحليلية.

منه: $(1-x)(2-x)+(-y)(-2-y)=0$

$x^2+y^2-3x+2y+2=0$ و منه : $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+(y+1)^2=\frac{5}{4}$

(γ) مركزها $w\left(\frac{3}{2};-1\right)$ و نصف قطرها $r=\frac{\sqrt{5}}{2}$

3) تعيين α حتى يكون ABDC مربعا:

يكون ABDC مربعا إذا كان $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{}$ حيث: $\overrightarrow{AC}(2;)$ ، $\overrightarrow{BD}(\alpha-2;1)$

منه: $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}$ يكافئ α-2=2 و منه: α=4

4) معادلة المستقيم (BC) :

لدينا: $\overrightarrow{BC}(1;)$ ، من أجل كل نقطة $M(x,y)$ من المستوي لدينا:

M نقطة من (BC) إذا كان $\overrightarrow{BM}//\overrightarrow{BC}$ منه (BC): $3x-y-8=0$

5) تعيين α حتى تكون المسافة بين D و (BC) مساوية إلى $\sqrt{}$

$DH=\frac{|3\alpha+1-8|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{|3\alpha-7|}{\sqrt{10}}$ حيث H المسقط العمودي لـ D على (BC)

$DH=\sqrt{10}$ يعني: $\frac{|3\alpha-7|}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}$ منه: $|3\alpha-7|=10$

منه : $3\alpha-7=10$ أو $3\alpha-7=-10$ و منه: $\alpha=\frac{17}{3}$ أو $\alpha=-1$

1/ الجداء السلمي في المستوي تذكير

1.1 الجداء السلمي لشعاعين

تعريف: $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعين من المستوي الجداء السلمي لشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ هو العدد الحقيقي الذي نرمز إليه بالرمز $\vec{u}\cdot\vec{v}$ و المعرف كما يلي :

- إذا كان $\vec{u}=\vec{0}$ أو $\vec{v}=\vec{0}$ فان $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$
- إذا كان $\vec{u}\neq\vec{0}$ و $\vec{v}\neq\vec{0}$ فان $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\vec{u},\vec{v})$

حالات خاصة:

- إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطين خطيا و كان لهما نفس الاتجاه فإن $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$ لأن $\cos(\vec{u},\vec{v})=1$
- إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطين خطيا و متعاكسين في الاتجاه فإن $\vec{u}\cdot\vec{v}=-\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$ لأن $\cos(\vec{u},\vec{v})=-1$
- نرمز إلى الجداء السلمي $\vec{u}\cdot\vec{u}$ بـ $\vec{u}^2$ و نسميه المربع السلمي للشعاع $\vec{u}$ و هكذا $\|\vec{u}\|^2=\vec{u}^2$ و

بصفة خاصة إذا كانت A و B نقطتين فإن $\overrightarrow{AB}^2=\|\overrightarrow{AB}\|^2=AB^2$

مبرهنة

إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعين فإن: $\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$

2.1 العبارة التحليلية للجداء السلمي

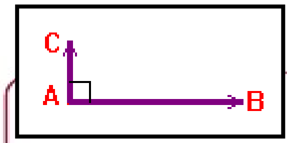
مبرهنة

إذا كانت، في معلم متعامد و متجانس إحداثيات $\vec{u}$ هي (x,y) و كانت إحداثيات $\vec{v}$ هي (x',y') فإن: $\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'$

3.1 الأشعة المتعامدة

تعريف: يكون الشعاعين غير المعدومين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ حيث $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$ و $\overrightarrow{AC}=\vec{v}$ متعامدان اذا وفقط اذا كان: المستقيمان (AB) و (AC) متعامدين.

ملاحظة نصطلح على أن الشعاع المعدوم عمودي على كل الأشعة.



مبرهنة

القول أن الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدان يعني أن $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.

4.1: خواص الجداء السلمي

مبرهنة

من اجل كل ثلاث أشعة $\vec{u}$، $\vec{v}$ و $\vec{w}$ و من أجل كل عدد حقيقي λ لدينا

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}\ (1)\qquad \vec{u}\cdot\left(\vec{v}+\vec{w}\right)=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}\ (2)$$

$$\left(\vec{u}+\vec{v}\right)\cdot\vec{w}=\vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{w}\ (3)\qquad \left(\lambda\vec{u}\right)\cdot\vec{v}=\lambda\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right)\ (4)\qquad \vec{u}\cdot\left(\lambda\vec{v}\right)=\lambda\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right)\ (5)$$

2/ الجداء السلمي والاسقاط العمودي

1.2 المسقط العمودي لشعاع على محور او شعاع

تعريف: $\vec{v}$ شعاع حيث $\vec{v}=\overrightarrow{CD}$. C' و D' المسقطان العموديان على الترتيب للنقطتين C و D على محور $\left(O;\vec{u}\right)$. يسمى الشعاع $\vec{v'}$ ، المعرف بِ $\vec{v'}=\overrightarrow{C'D'}$ ، المسقط العمودي للشعاع $\vec{v}$ على المحور $\left(O;\vec{u}\right)$ (أو على الشعاع $\vec{u}$)

2.2 الجداء السلمي و المسقط العمودي لشعاع

مبرهنة

إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعين حيث $\vec{u}\neq\vec{0}$ و كان $\vec{v'}$ المسقط العمودي للشعاع $\vec{v}$ على $\vec{u}$ فإن: $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot\vec{v'}$

5/ المسافة بين نقطة ومستقيم

مبرهنة

في معلم متعامد و متجانس المسافة بين نقطة $A\left(x_0,y_0\right)$ و مستقيم $\left(\Delta\right)$ معادلته : $ax+by+c=0$ هي : $d\left(A,D\right)=\dfrac{\left|ax_0+by_0+c\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

6/ الجداءات السلمية الشهيرة

$$\left(\vec{u}+\vec{v}\right)^2=\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|^2=\left\|\vec{u}\right\|^2+2\vec{u}.\vec{v}+\left\|\vec{v}\right\|^2$$

$$\left(\vec{u}-\vec{v}\right)^2=\left\|\vec{u}-\vec{v}\right\|^2=\left\|\vec{u}\right\|^2-2\vec{u}.\vec{v}+\left\|\vec{v}\right\|^2$$

$$\left(\vec{u}+\vec{v}\right)\left(\vec{u}-\vec{v}\right)=\left\|\vec{u}\right\|^2-\left\|\vec{v}\right\|^2$$

المؤسســــــــــــة:	المستـــــــــوى: الثالثة رياضيات
السنة الدراسية:	ميـــدان التعلم: هندسة
التاريـــــــــخ:	الوحدة التعلمية: الجداء السلمي في الفضاء
توقيت الحصة :	موضوع الحصة : تطبيقات الجداء السلمي في الفضاء

المكتسبات المستهدفة: توظيف الجداء السلمي لإثبات تعامد مستقيمين، تعامد مستويين، تعامد مستقيم ومستو

الأنشطة المقترحة وطبيعتها	الإنجاز (سـير الحصة)	التعليمات والتوجيهات

نشاط 2:

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

1) نعتبر النقط : $A(1;3;8)$ ، $B(-1;1;6)$ ، $C(2;-2;-9)$ ،

بين أن النقط A، B، C تعين مستوي (P)

2) لتكن $M(x,y,z)$ نقطة تنتمي إلى المستوي (P)

أ- برر وجود عددين حقيقين α و β حيث $\overrightarrow{AM}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$

ب- عبرعن α و β بدلالة x و y

ت- ج- استنتج أن احداثيات M تحقق $2x-3y+z-1=0$

3) العكس: لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من الفضاء حيث : $2x-3y+z-1=0$

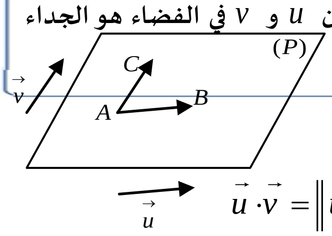
ث- برهن أنه يوجد عددان حقيقيان k و $\vec{k}$ حيث: $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AB}+\vec{k}$

ماذا يمكن القول عن النقط M.

1/ الجداء السلمي في الفضاء

1.1 تعريف

تعريف $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعان في الفضاء : الجداء السلمي للشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ في الفضاء هو الجداء السلمي للشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ في مستوى (P) يشملهما



1 نتائج

نتيجة 1 : إذا كان $\vec{u}\neq\vec{0}$ و $\vec{v}\neq\vec{0}$ فان $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\vec{u},\vec{v})$

نتيجة 2 : إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعين فإن: $\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$

ملاحظة: العبارة مستقلة عن تمثيل $\vec{u}$ و $\vec{v}$ وبالتالي مستقلة عن المستوي (P)

نتيجة 3 : $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ شعاعان من الفضاء ينتميان إلى نفس المستوي، k عدد حقيقيلدينا :

$\vec{u}\vec{u}=\frac{1}{2}\|\vec{u}\|^2$ ، $\vec{u}\vec{v}=\vec{v}\vec{u}$ ، $(k\vec{u})\vec{v}=\vec{u}.(k\vec{v})=k(\vec{u}\vec{v})$ ، $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+2\vec{u}\vec{v}+\|\vec{v}\|^2$

2 خواص

كل خواص الجداء السلمي في المستوي تطبق على الأشعة من نفس المستوي في الفضاء

خاصية1 : $\vec{u}$، $\vec{v}$، $\vec{w}$ أشعة من الفضاء. لدينا $\vec{u}(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\vec{v}+\vec{u}\vec{w}$

خاصية2 : يكون الشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدين إذا و فقط إذا كان $\vec{u}\vec{v}=0$

خاصية3 : $\vec{0}$ عمودي على كل شعاع من الفضاء

خاصية4 إذا كانت $C.B.A$ ثلاث نقط و H المسقط العمودي للنقطة C على المستقيم (AB) المنتمي إلى المستوى (P) فإن $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$

خاصية5 ليكن $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ شعاعين غير معدومين. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{C'D'}$ حيث C' و D' المسقطان العموديان لـ C و D على (AB) بالتوالي.

3 العبارة التحليلية

في أساس متعامد و متجانس ليكن $\vec{u}(x,y,z)$ ($\vec{v}(x',y',z')$)

لدينا : $\vec{u}\vec{v}=x.x'+y.y'+z.z'$

4 طويلة شعاع

ليكن $\vec{u}$ شعاع غير معدوم، A و B نقطتين من الفضاء حيث $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ و منه $\vec{u}\cdot\vec{u}=AB^2$

إذن لكل شعاع غير معدوم $\vec{u}$ العدد الحقيقي: $\vec{u}\cdot\vec{u}$ يسمى المربع السلمي لـ $\vec{u}$ و يكتب $\vec{u}^2$

العدد $\sqrt{\vec{u}^2}$ يسمى طويلة الشعاع $\vec{u}$ و نكتب $\|\vec{u}\|$

المسافة بين نقطتين

نتيجة : لتكن النقطتين $A(x_A,y_A,z_A)$ و $B(x_B,y_B,z_B)$ في معلم متعامد و متجانس من الفضاء لدينا

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$$

التعليمات والتوجيهات:

- نعمم تعريف الجداء السلمي في المستوى إلى الفضاء، نراجع بهذه المناسبة الجداء السلمي في المستوي. ونستعمل التعبير "شعاع يعامد مستو".
- تعالج مسائل يتطلب حلها استعمال الجداء السلّمي و/أو عبارته التحليلية.

إذا كانت $\vec{u}(x; y; z)$ بالنسبة للمعلم المتعامد و المتجانس $\left(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k}\right)$ فإن:

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

تمرين محلول:

في معلم متعامد و متجانس من الفضاء لدينا النقط

D(2;-1;0) , C(-2;0;1) , B(3;1;-2) , A(-1;-2;0)

1) هل المستقيمان (AB) و (CD) متعامدان ؟

2) هل المستقيمان (AB) و (AC) متعامدان ؟

الحل : لدينا $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}4\\1\\-2\end{pmatrix}$ ، $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}4\\ \\-1\end{pmatrix}$ 3 $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$

1) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 16-3+2 = 15 \neq 0$ و بالتالي (AB) و (CD) ليسا متعامدين

2) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -4+6-2 = 0$ و بالتالي (AB) و (AC) متعامدان

تمرين1:

1) حدد شعاع $\vec{w}$ عمودي على $\overrightarrow{\ }(\mathbf{-1; 1; 1})$ و $\vec{\ }(\mathbf{1; -2; 0})$

2) حدد شعاع $\vec{w}$ عمودي على $\vec{\boldsymbol{u}}(\mathbf{1; 1; 0})$ و $\vec{\ }(\mathbf{0; 2; 1})$ و $\|\vec{\boldsymbol{w}}\| = \sqrt{\mathbf{3}}$

تمرين 2: نعتبر $A\left(1;1;\sqrt{2}\right)$ و $B\left(\sqrt{2};-\sqrt{2};0\right)$ و $C\left(-1;-1;-\sqrt{2}\right)$

بين أن ABC مثلث متساوي الساقين و قائم الزاوية.

الحل:1:

1) $\vec{w}$ عمودي على $\vec{u}\left(-1;1;1\right)$ يعني انه بوضع $\vec{w}\left(x;y;z\right)$. ومنه $\vec{w}.\vec{u} = -x+y+z = 0$

$\vec{w}$ عمودي على $\vec{u}\left(1;-2;0\right)$ يعني انه بوضع $\vec{w}\left(x;y;z\right)$. ومنه $\vec{w}.\vec{v} = x-2y = 0$ ينتج لنا

نحل الجملة $\begin{cases}-x+y+z = 0....(1)\\ x-2y = 0..........(2)\end{cases}$ بجمع نجد $z = y$ ومنه $x = 2z$ أي $\vec{w}.z\left(2;1;1\right)$.

2) $\vec{w}$ عمودي على $\vec{u}\left(1;1;0\right)$ يعني انه بوضع $\vec{w}\left(x;y;z\right)$. ومنه $\vec{w}.\vec{u} = x+y = 0$

$\vec{w}$ عمودي على $\vec{v}\left(0;2;1\right)$ يعني انه بوضع $\vec{w}\left(x;y;z\right)$. ومنه $\vec{w}.\vec{v} = 2y+z = 0$

نحل الجملة $\begin{cases}\left(-2\right)\left(x+y = 0\right)....(1)\\ 2y+z = 0..........(2)\end{cases}$ بجمع نجد $x = z/2$ ومنه $y = -z/2$ أي

ومنه $\vec{w}.z\left(1/2;-1/2;1\right)$. ومنه $\|\vec{w}\| = z\sqrt{1/4+1/4+1} = z\sqrt{6}/2$ ومنه $z\sqrt{6}/2 = \sqrt{3}$ أي

$z = 2\sqrt{3}/\sqrt{6} = \frac{2}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ أي ان $\vec{w}\left(\sqrt{2}/2;-\sqrt{2}/2;\sqrt{2}\right)$.

الحل:2

1) $A\left(1;1;\sqrt{2}\right)$ و $B\left(\sqrt{2};-\sqrt{2};0\right)$ و $C\left(-1;-1;-\sqrt{2}\right)$ المثلث متساوي الساقين

لدينا $AB = \sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2+\left(-\sqrt{2}-1\right)^2+\left(-\sqrt{2}\right)^2}$ ومنه $AB = \sqrt{8}$

لدينا $AC = \sqrt{\left(-1-1\right)^2+\left(-1-1\right)^2+\left(-2\sqrt{2}\right)^2}$ ومنه $AB = 4$

لدينا $BC = \sqrt{\left(-1-\sqrt{2}\right)^2+\left(-1+\sqrt{2}\right)^2+\left(-\sqrt{2}\right)^2}$ ومنه $BC = \sqrt{8}$

بما ان $AB = \sqrt{8}$ و $BC = \sqrt{8}$ فالمثلث متساوي الساقين

لدينا $\overrightarrow{AB} = \left(\left(\sqrt{2}-1\right);\left(-\sqrt{2}-1\right);\left(-\sqrt{2}\right)\right)$ و $\overrightarrow{BC} = \left(-1-\sqrt{2}\right);\left(-1+\sqrt{2}\right);\left(-\sqrt{2}\right)$

ومنه $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = \left(\left(\sqrt{2}-1\right)\left(-1-\sqrt{2}\right)+\left(-\sqrt{2}-1\right)\left(-1+\sqrt{2}\right)+\left(-\sqrt{2}\right)\left(-\sqrt{2}\right)\right) = 2-2 = 0$ قائم في B

المؤسســــــــة:	المستـــــــــوى: الثالثة رياضيات
السنة الدراسية:	ميـــدان التعلم: هندسة
التاريـــــــــخ:	الوحدة التعلمية: الجداء السلمي في الفضاء
توقيت الحصة :	موضوع الحصة : تطبيقات الجداء السلمي في الفضاء

المكتسبات المستهدفة: توظيف الجداء السلمي لإثبات تعامد مستقيمين، تعامد مستويين، تعامد مستقيم ومستو

الأنشطة المقترحة وطبيعتها	الإنجاز (ســير الحصة)	التعليمات والتوجيهات

الأنشطة المقترحة وطبيعتها:

3: استعمال الجداء السلمي في البرهان على التعامد

(P) مستو يشمل المستقيم(D)، M نقطة لا تنتمي إلى (P) . N هي المسقط العمودي للنقطة M على (P) و R هي المسقط العمودي للنقطة N على(D) .

برهن ان

$MR \perp D$.

حل مختصر

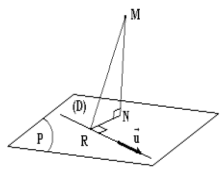
يوظف هنا التلميذ مكتسباته في الأشعة و الجداء السلمي ليبرهن نتيجة معروفة بـ: " مبرهنة الأعمدة الثلاثة".

$\vec{u}$ هو شعاع توجيه للمستقيم (D) .

نبين بسهولة ان :

$\overrightarrow{MR}.\vec{u} = 0$

أي $MR \perp D$



الإنجاز (ســير الحصة):

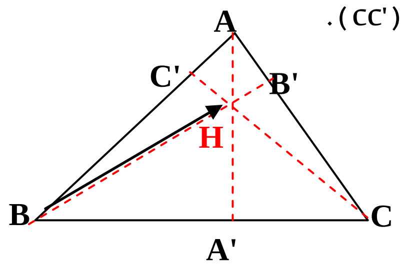
نشاط 1

ABC مثلث كيفي ، 'A' ، B' و C المساقط العمودية للنقط A ، B و C على (BC) ، (AC) و (AB) على التراتيب . H نقطة تقاطع ('BB) و ('CC) .

1) أحسب : $\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{AB}$

2) أحسب : $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}$

3) ماذا تستنتج ؟



الحل 1

ABC مثلث كيفي ، 'A' ، B' و C المساقط العمودية للنقط A ، B و C على (BC) ، (AC) و (AB) على التراتيب . H نقطة تقاطع ('BB) و ('CC) .

1) حسا ب : $\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{AB}$

نعلم أن : $\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC} = AB'\,AC$

$$\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC}\ \overrightarrow{BH}\ \overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AH})\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BA}\ \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AH}\ AC = -AB'\overrightarrow{AC}+AB'AC = 0$$

بطريقة مماثلة نجد : $\overrightarrow{CH}\ \overrightarrow{AB} = 0$

2) أيضا $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}=0$

3) الأشعة : $\overrightarrow{BC}\&\overrightarrow{AH}$; $\overrightarrow{AC}\&\overrightarrow{BH}$; $\overrightarrow{AB}\&\overrightarrow{CH}$ متعامدة

2/ تطبيقات الجداء السلمي في الفضاء

1.2 التعامد

1 تعامد مستقيمين

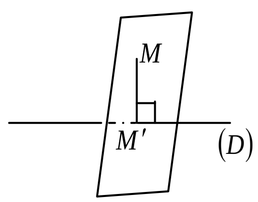
ليكن (D_1) و (D_2) مستقيمين من الفضاء موجهين بالشعاعين $\vec{u_1}$ و $\vec{u_2}$ على التوالي.

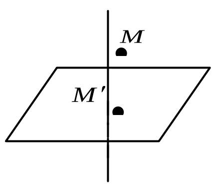
$\vec{u_1}\cdot\vec{u_2}=0$ يكافئ $(D_1)\perp(D_2)$

2 تعامد مستقيم ومستوي

ليكن (P) مستو، M نقطة من الفضاء، المستقيم العمودي على (P) و الذي يشمل M يقطع (P) في نقطة وحيدة M' هي المسقط العمودي للنقطة M على (P)

(D) مستقيم ، M نقطة من الفضاء المستوى العمودي على (D) و الذي يشمل M يقطع (D) في نقطة وحيدة M' M' هي المسقط العمودي لـ M على (D)





التعليمات والتوجيهات:

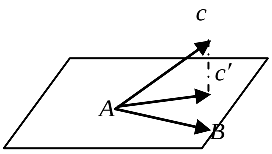
- نعمم تعريف الجداء السلمي في المستوى إلى الفضاء، نراجع بهذه المناسبة الجداء السلمي في المستوى. ونستعمل التعبير " شعاع يعامد مستو".
- تعالج مسائل يتطلب حلها استعمال الجداء السلّمي و/أو عبارته التحليلية.

خاصية: ليكن (P) مستوي موجه بالشعاعين $\overrightarrow{u_1}$ و $\overrightarrow{u_2}$ ، (D) مستقيم موجه بالشعاع $\overrightarrow{u_3}$.

$\overrightarrow{u_1} \perp \overrightarrow{u_2}$ و $\overrightarrow{u_2} \perp \overrightarrow{u_3}$ يكافئ (D) ⊥ (P)

1 نتائج

1) A و B نقطتان من المستوى (P) و (C) نقطة لا تنتمي إلى (P)

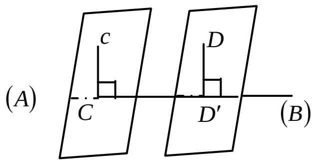


لدينا : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC'}$

حيث c' المسقط العمودي لـ C على (P)

2) $\vec{u}=\overrightarrow{AB}\neq\vec{0}$ ، $\vec{v}=\overrightarrow{CD}$

لدينا : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{C'D'}$



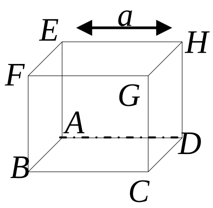
حيث C' و D' المسقطان العموديان للنقطتين C و D

على الترتيب على المستقيم (AB)

مثال: نعتبر المكعب $ABCDEFGH$ الذي ضلعه a

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}=a^2$$

تطبيق



في المكعب $ABCDEFGH$ الذي ضلعه a

أحسب الجداء السلمي $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{HC}$

الحل: لتكن D المسقط العمودي للنقطة C على المستوى (AEH)

و بالتالي : $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{HD}=-\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AE}=-a^2$ لأن $\overrightarrow{HD}=\overrightarrow{HC}+\overrightarrow{CD}$

1. (AE) و (CD) من مستويين متعامدين

تمرين 21 ص 210 نعتبرالنقط A(1 ; 2 ; -2) ،B(2 ; 3 ; -2) ،

D(0 ; 3 ; -2) و E(1 ; 2 ; -2+$\sqrt{2}$)

2. تحقق أن: AB =AD =AE و أن المستقيمات

(AB)، (AD) و (AE) متعامدة مثنى مثنى .

الحل:

$$A(1;2;-2).B(2;3;-2).D(0;3;-2).\sqrt{2}E(1;2-2)$$

$$\overrightarrow{AB}(1;1;0)\overrightarrow{AD}(-1;1;0)\overrightarrow{AE}(0;0;\sqrt{2})$$

ومنه $AB=\sqrt{2}.AD=\sqrt{2}.AE=\sqrt{2}$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=(-1+1)=0$ ومنه $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AE}=0$ ومنه $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AE}$

و $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AE}=0$ ومنه $\overrightarrow{AD}.\perp\overrightarrow{AE}$

تمرين 22 ص 210 في مستو (P) نعتبر الدائرة (C) التي قطرها S[AB] نقطة من (D) المستقيم العمودي على (P) في A ، لتكن M نقطة من (C) تختلف عن A وعن B .

1. بين أن المستقيم (BM) عمودي على المستوى (SAM)

2. استنتج طبيعة المثلث BMS وعين تقاطع سطحي الكرتين اللتين قطريهما [AB] و [SB] .

3. نسمي H تقاطع الارتفاع المرسوم من A في المثلث AMS مع (MS) بين أن الشعاع $\overrightarrow{AH}$ عمودي على المستوى (BMS).

تمرين محلول 3:

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس

1) نعتبر (S) سطح الكرة التي مركزها W(2 , 1 , 0) و نصف قطرها $\sqrt{2}$. أكتب معادلة ديكارتية لـ(S)

2) نعتبر (S') سطح الكرة التي قطرها [AB] حيث A (1 , 0 , -2) ، B(0 , - 1 , 2)

عين قيمتي العدد الحقيقي a حتى تكون النقطة C(a , 1 , 0) نقطة من (S') .

الحل:

1) لتكن M(x , y , z) نقطة من (S) أي أن $WM = \sqrt{2}$

(S) : $(x-2)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 2$

أو $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 3 = 0$ معادلة ديكارتية لـ (S)

2) لتكن M(x , y , z) نقطة من (S') أي أن $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$

الشعاعان $\overrightarrow{MA}$ ، $\overrightarrow{MB}$ يكتبان $\overrightarrow{MA}\begin{pmatrix}1-x\\-y\\-2-z\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{MB}\begin{pmatrix}-x\\-1-y\\2-z\end{pmatrix}$

M نقطة من (S') يعني $(x-1)x + y(y+1) + (z+2)(z-2) = 0$

أو $x^2 + y^2 + z^2 - x + y - 4 = 0$ معادلة ديكارتية لـ (S')

3 ملاحظات واصطلاحات

♥ $\vec{u}$ هو شعاع توجيه المستقيم (D) العمودي على مستوي (P)، يسمى شعاع ناظمي للمستوي (P).

♥ إذا كان $\overrightarrow{\ \ }$ ناظمي لمستوي (P) فإن كل شعاع $\vec{\ }$ مرتبط خطيا مع $\vec{u}$ يكون ناظمي للمستوي (P).

♥ إذا كان $\vec{u}$ ناظمي لمستوي (P) و $\vec{v}$ ناظمي لمستوي $(\acute{P})$ و كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطان خطيا فإن (P) و $(\acute{P})$ متوازيان.

♥ إذا كان $(A; B) \in (\quad)^2$ و $\vec{u}$ ناظمي لمستوي (P) فإن $\vec{u} \perp \overrightarrow{AB}$.

تمرين1: في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد

حدد تمثيل وسيطي للمستقيم (D) المار من $A(-1; 2; 0)$ و العمودي على المستوي (P) الموجه بالشعاعين $\vec{u}(1; -1; 1)$ و $\vec{v}(2; 1; 1)$.

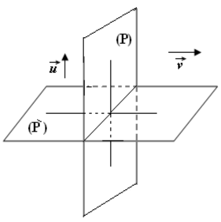
تمرين2: في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد $\left(O; \overrightarrow{\ \ }; \vec{j}; \vec{k}\right)$ نعتبر المستوى (P) الذي معادلته $ax - 2y + z - 2 = 0$ و المستقيم (D) تمثيله الوسيط :

-1 حدد شعاعين موجهين للمستوى (P).

-2 حدد a وb لكي يكون (P) ⊥ (D).

3 تعامد مستويين

يكون مستويان متعامدان إذا و فقط إذا اشتمل احدهما على مستقيم عمودي على المستوي الآخر.



ليكن (P) و p' مستويين من الفضاء، $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعين ناظمين لهما على التوالي.
(P) ⊥ p' إذا و فقط إذا كان $\vec{u} \perp \vec{v}$.

المؤسســـــــــة:	المستـــــــــوى: الثالثة رياضيات
السنة الدراسية:	ميـــدان التعلم: هندسة
التاريــــــــخ:	الوحدة التعلمية: الجداء السلمي في الفضاء
توقيت الحصة :	موضوع الحصة : تطبيقات الجداء السلمي في الفضاء

المكتسبات المستهدفة: توظيف الجداء السلمي لتعيين معادلة ديكارتية لمستو

الأنشطة المقترحة وطبيعتها	الإنجاز (سـير الحصة)	التعليمات والتوجيهات

الأنشطة المقترحة وطبيعتها

3: استعمال الجداء السلمي في البرهان على التعامد.

(P) مستوي يشمل المستقيم (D)، M نقطة لا تنتمي إلى (P). N هي المسقط العمودي للنقطة M على (P) و R هي المسقط العمودي للنقطة N على (D).

برهن ان $MR \perp D$.

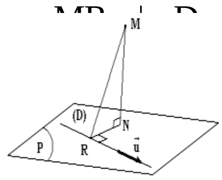
حل مختصر

يوظف هنا التلميذ مكتسباته في الأشعة و الجداء السلمي ليبرهن نتيجة معروفة بـ " مبرهنة الأعمدة الثلاثة".

$\vec{u}$ هو شعاع توجيه للمستقيم (D).

نبين بسهولة ان : $\overrightarrow{MR}.\vec{u}=0$

أي $MR \perp D$



الإنجاز (سـير الحصة)

2/ تطبيقات الجداء السلمي في الفضاء

2.2 المعادلة الديكارتية لمستو

تذكير معادلات مستقيم معرف بنقطة و شعاع توجيه له

ليكن $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ معلم للفضاء. ليكن (D) المستقيم الذي يشمل النقطة $A(x_A,y_A,z_A)$ و $\vec{u}(a,b,c)$ شعاع توجيه له.

$M(x,y,z)\in(D)$ يعني $\overrightarrow{AM}=\alpha\vec{u}$ $(\alpha\in\mathbb{R})$ أي $x-x_A=\alpha a$ و $y-y_A=\alpha b$ و $z-z_A=\alpha c$ وهذا يعني إذا كان $abc\neq 0$ أن $\frac{x-x_A}{a}=\frac{y-y_A}{b}=\frac{z-z_A}{c}$ أي أن مثلا:

أما إذا كان أحد الأعداد a، b أو c معدوما فإن مثلا في حالة $c=0$: $\begin{cases} b(x-x_A)-a(y-y_A)=0 \\ c(x-x_A)-a(z-z_A)=0 \end{cases}$

أما إذا انعدم عددان من الأعداد a، b و c فإن مثلا $\begin{cases} b(x-x_A)-a(y-y_A)=0 \\ z=z_A \end{cases}$

في حالة $a=b=0$: $\begin{cases} x=x_A \\ y=y_A \end{cases}$ و يبقى z كيفي.

1 الشعاع الناظمي لمستو

كل شعاع غير معدوم عمودي على شعاعين غير مرتبطين خطيا من مستو (p) هو شعاع ناظمي على المستوى (p)

نتيجة إذا كان $\vec{n}$ شعاعا ناظميا (عموديا) على (P) فإن $\vec{n}$ عمودي على كل شعاع من المستوي (P) و بالتالي كل مستقيم موجه بالشعاع $\vec{n}$ هو مستقيم عمودي على (P) .

1.2.2 معادلة مستوي يشمل نقطة

ليكن $\vec{n}$ شعاع غير معدوم و A نقطة من الفضاء: المستوي الذي يشمل A و $\vec{n}$ شعاع ناظمي له هو مجموعة النقط M من الفضاء حيث $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$ مجموعة النقط M من الفضاء حيث $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$ هو المستوي الذي يشمل A و $\vec{n}$ شعاع ناظمي له

البرهان

نعتبر المستقيم (D) الذي يشمل A و $\vec{n}$ شعاع توجيه له ، والمستوي (P) يشمل A و $\vec{n}$ شعاع ناظمي له

اذا كانت M نقطة من (P) فان $\overrightarrow{AM}$ شعاع من (P) و بالتالي $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$

و بالعكس نعتبر نقطة M من الفضاء حيث $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$ لتكن H المسقط العمودي للنقطة M على المستقيم (D) وبالتالي $\overrightarrow{AH}.\vec{n}=0$ لأن $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$ لكن $\overrightarrow{AH}$ و $\vec{n}$ مرتبطان خطيا اذن $\overrightarrow{AH}=\vec{0}$ لأن $(\vec{n}\neq 0)$ وبالتالي $A=H$ المسقط العمودي لـ M على (D) هو A أي أن M نقطة من (P)

التعليمات والتوجيهات

- نعمم تعريف الجداء السلمي في المستوى إلى الفضاء، نراجع بهذه المناسبة الجداء السلمي في المستوى. ونستعمل التعبير " شعاع يعامد مستو".
- تعالج مسائل يتطلب حلها استعمال الجداء السلّمي و/أو عبارته التحليلية.

2.2.2 معادلة مستوي يشمل نقطة وله شعاع

كل مستوي (P) من الفضاء و $\vec{n}(a,b,c)$ شعاع ناظمي له يقبل معادلة ديكارتية من الشكل $ax+by+cz+d=0$ حيث d عدد حقيقي كل معادلة من الشكل $ax+by+cz+d=0$ حيث $(a,b,c)\neq(0,0,0)$ هي معادلة مستوي (P) من الفضاء و $\vec{n}(a,b,c)$ شعاع ناضمي له. معادلة مستوي (P) من الفضاء يشمل نقطة $A(x_0,y_0,z_0)$ و $\vec{n}(a,b,c)$ شعاع ناظمي له هي : $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

البرهان

لتكن $A(x_A,y_A,z_A)$ نقطة من المستوي (P) و $\vec{n}(a,b,c)$ شعاع ناظمي له

تكون النقطة $M(x,y,z)$ نقطة من (P) اذا وفقط اذا $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$ أي :

$$a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0$$

بوضع $d=-a\,x_A-b\,y_A-c\,z_A$ نجد $ax+by+cz+d=0$

$\vec{n}$ شعاع ناظمي فان a,b,c ليست كلها معدومة

وبالعكس نعتبر (E) مجموعة النقط $M(x,y,z)$ من الفضاء حيث

$ax+by+cz+d=0$ بما أن a,b,c ليست كلها معدومة نأخذ مثلا $a\neq0$ ونعتبر النقطة $A\left(-\frac{d}{a},0,0\right)$. A نقطة من (E) ولدينا $\vec{n}(a,b,c)$ شعاع غير معدوم.من أجل كل نقطة $M(x,y,z)$ من الفضاء لدينا

$$\overrightarrow{AM}.\vec{n}=a\left(x+\frac{d}{a}\right)+b\,y+cz=ax+by+cz+d$$

M نقطة من (E) يعني $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$ وبالتالي هو المستوي الذي A يشمل و $\vec{n}$ ناظمي له .

البحث عن معادلة المستوي :

ليكن $\vec{u}(\alpha;\beta;\delta)$ و $A(a,b,c)$ و $M(x,y,z)$

ومنه نبحث اولا عن مركبات الشعاع $\overrightarrow{AM}$ ومنه $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-a\\y-b\\z-c\end{pmatrix}$

$M\in(p)$ يعني ان $\overrightarrow{AM}.\vec{u}=0$ ومنه $(\alpha(x-a)+\beta(y-b)+\delta(z-c))=0$

ومنه نجد $\alpha x+\beta y+\delta z-a\alpha-\beta b-c\delta=0$ وهي معادلة ديكارتية للمستوي (P)

2 حالات خاصة

المعادلة الديكارتية للمستوي $(0,\vec{i},\vec{j})$ هي $z=0$

المعادلة الديكارتية للمستوي $(0,\vec{j},\vec{k})$ هي $x=0$

المعادلة الديكارتية للمستوي $(0,\vec{i},\vec{k})$ هي $y=0$

3.2.2 توازي وتعامد مستويين

1 مستويين متوازيين

يتوازي مستويان إذا كان شعاعهما الناظمين مرتبطين خطيا أي أن (P) يوازي (P') معناه يوجد عدد k حقيقي بحيث $\vec{n}=k\vec{n'}$

1 مستويين متعامدين

يكون المستوي (P) الذي $n(a,b,c)$ شعاع ناظميا له عمودي على المستوي (P') الذي $\vec{n'}(a',b',c')$ شعاع ناظمي له إذا فقط إذا كان $\vec{n}.\vec{n'}=0$ أي $aa'+bb'+cc'=0$

مبرهنة ليكن $\overrightarrow{}$ شعاع غير معدوم و A نقطة من الفضاء و k عدد حقيقي

مجموعة النقط M من الفضاء حيث $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = k$ هي المستوي (P) العمودي $D(A,\vec{n})$

ف النقطة H حيث $\overline{AH} = \frac{k}{}$ ، $\vec{n} = \overrightarrow{AB}$

تطبيق : في معلم متعامد و متجانس $\left(0,\vec{i},\vec{J},\vec{k}\right)$ من الفضاء نعتبر النقط $A(-2,0.1)$ ،

$C(1,-1,2)$ ، $B(1,0,-3)$

1)بين أن النقط $C,B.A$ تعين مستويا

2)أكتب معادلة ديكارتية للمستوى (ABC)

3)أكتب معادلة ديكارتية للمستوى (P) الذي يشمل A و $\overrightarrow{BC}$ شعاع ناظمي له.

الحل : نبحث عن مركبات الشعاعين $\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}$

1) ومنه $\overrightarrow{AB}(3;0;-4)$ و $\overrightarrow{AC}(3;-1;1)$

كل شعاعان غير مرتبطان خطيان يشكلان مستويا وبما ان $\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطان خطيا لان

$\frac{-4}{1} \neq \frac{0}{-1} \neq \frac{3}{3}$ فهما يشكلان مستويا أي ان النقط (ABC) تشكل مستوي

2) معادلة ديكارتية للمستوى (ABC)

نبحث عن الشعاع الناظمي للمستوي وليكن $\vec{u}$ حيث $\vec{u}(\alpha;\beta;\delta)$ ومنه $\vec{u}\perp\overrightarrow{AB}$ و $\vec{u}\perp\overrightarrow{AC}$

وهذا يعني ان $\vec{u}.\overrightarrow{AB}=0$ يكافئ $3\alpha+\beta(0)-4\delta=0$

وهذا يعني ان $\vec{u}.\overrightarrow{AC}=0$ يكافئ $3\alpha-\beta+\delta=0$

حل الجملة $\begin{cases}3\alpha+\beta(0)-4\delta=0\\3\alpha-\beta+\delta=0\end{cases}$ هو $\alpha={}^{4}\!/_{3}\,\delta$ و $\beta=5\delta$ أي $\vec{u}.\delta\left({}^{4}\!/_{3};5;1\right)$ ومنه

$\vec{u}.3\delta(4;15;3)$ أي ان $\vec{u}(4;15;3)$

لدينا $\vec{u}(4;15;3)$ و $A(-2,0.1)$ و $M(x,y,z)$

ومنه نبحث اولا عن مركبات الشعاع $\overrightarrow{AM}$ ومنه $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+2\\y\\z-1\end{pmatrix}$

$M\in(p)$ يعني ان $\overrightarrow{AM}.\vec{u}=0$ **ومنه** $\left(4(x+2)+15y+3(z-1)\right)=0$

ومنه نجد $4x+15y+3z+5=0$ وهي معادلة ديكارتية للمستوى (ABC)

لدينا $\overrightarrow{BC}(0;1-;5)$ و $A(-2,0.1)$ و $M(x,y,z)$

ومنه نبحث اولا عن مركبات الشعاع $\overrightarrow{AM}$ ومنه $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+2\\y\\z-1\end{pmatrix}$

$M\in(p)$ يعني ان $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC}=0$ **ومنه** $\left(0(x+2)-1y+5(z-1)\right)=0$

ومنه نجد $y-5z+5=0$ وهي معادلة ديكارتية للمستوى (P)

تمرين 15 ص 209

من بين المستويات التالية ، أذكر المتوازية والمتعامدة

$(P):-x+2y+z-3=0$ ، $(P'):x-2y-z=0$

$(R):x-2y+z+3=0$

$(R'):2x+3y-4z+2=0$

الحل : نبحث عن الاشعة الناظمية لكل مستو $\vec{u}(-1,2,1)$ و $\vec{u}'(1,-2,-1)$ و $\vec{r}(1,-2,1)$ و

$\vec{r}'(2,3,-4)$

لاحظ ان $\vec{u}'=-\vec{u}$ ومنه (P) و (P') متوازيان لان $\vec{u}'//\vec{u}$

كذلك $\vec{u'}\vec{u} \neq 0$ أي ان (P) و (P') غير متعامدان

كذلك $\vec{u}.\vec{r} \neq 0$ أي ان (R) و (P) غير متعامدان

كذلك $\vec{u'}.\vec{r'} = 0$ أي ان (R') و (P') متعامدان

كذلك $\vec{r}.\vec{r'} \neq 0$ أي ان (R) و (R') غير متعامدان

كذلك $\vec{u'}.\vec{r} \neq 0$ أي ان (R) و (P') غير متعامدان

كذلك $\vec{u}.\vec{r'} = 0$ أي ان (R') و (P) متعامدان

تمرين 16 ص 209

نعتبر المستوي (P) الذي معادلته الديكارتية

$-5x + y - z - 6 = 0$ و النقطة $A(-6;2;-1)$

- بين أن النقطة $B(-1;1;0)$ هي المسقط العمودي للنقطة A على (P).

الحل: النقطة $B(-1,1,0)$ مسقط عمودي لـ $A(-6,2,-1)$ على (P) يعني انه

اولا يجب ان تنتمي $B(-1,1,0)$ الى (P)

$-5x + y - z - 6 = 0$ ومنه $5+1-6=0$ ومنه $B \in (P)$

ثانيا: نثبت ان $\vec{AB}$ ناظمي لـ (P) لدينا $\vec{AB}(5;-1;1)$ و $\vec{u}(-5;1;-1)$ و هما مرتبطان خطيا اذن

$\vec{AB}(5;-1;1)$ هو شعاع ناظمي لــ (P)

بما ان $B \in (P)$ و $\vec{AB}$ هو شعاع ناظمي لــ (P) فان B مسقط عمودي لـ A على (P)

تمرين 23 ص 210

تعطى النقط $A(1,-1,0)$ ، $B(2,3,-4)$ و $C(-3,0,1)$ والشعاع $\vec{n}(8,15,17)$.

1. تحقق أن النقط A،B،C ليست في استقامية.
2. أحسب $\vec{AB}.\vec{n}$ و $\vec{AC}.\vec{n}$ استنتج معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .
3. عين معادلة ديكارتية للمستوي (P) الذي يوازي المستوي (ABC) و يمر من النقطة $D(-2,2,-1)$

الحل: نبحث عن مركبات الشعاعين $\vec{AB};\vec{AC}$

1) ومنه $\vec{AB}(1;4;-4)$ و $\vec{AC}(-4;1;1)$

كل شعاعان غير مرتبطان خطيان يشكلان مستويا وبما ان $\vec{AB};\vec{AC}$ غير مرتبطان خطيا لان

$\frac{4}{1} \neq \frac{1}{-4}$ فهما يشكلان مستويا أي ان النقط (ABC) تشكل مستوى

2) معادلة ديكارتية للمستوي (ABC)

$$\vec{AB}.\vec{n} = 1(8)+4(15)-4(17) = 0 \text{ و } \vec{AC}.\vec{n} = -4(8)+1(15)-1(17) = 0$$

الشعاع $\vec{n}(8,15,17)$ عمودي على الشعاعين $\vec{AB};\vec{AC}$ فهو شعاع ناظمي للمستوي (ABC)

لدينا $\vec{n}(8,15,17)$ و $A(1,-1,0)$ و $M(x,y,z)$

ومنه نبحث اولا عن مركبات الشعاع $\vec{AM}$ ومنه $\vec{AM}\begin{pmatrix} x-1 \\ y+1 \\ z \end{pmatrix}$

$M \in (p)$ يعني ان $\vec{AM}.\vec{n} = 0$ ومنه $\left(8(x-1)+15(y+1)+17(z-0)\right) = 0$

ومنه نجد $8x+15y+17z+7=0$ وهي معادلة ديكارتية للمستوي (ABC)

3) معادلة ديكارتية للمستوي (P) الذي يوازي المستوي (ABC) و يمر من النقطة $D(-2,2,-1)$

يعني ان (P) له معادلة من الشكل $8x+15y+17z+c=0$ و c عدد حقيقي ثابت

$D \in (p)$ يعني ان $D(-2,2,-1)$ تحقق المعادلة $8x+15y+17z+c=0$ ومنه نجد

$-16+30-17+c=0$ أي ان $c=3$ ومنه معادلة ديكارتية للمستوي (P) الذي يوازي المستوي (ABC) و يمر من النقطة $D(-2,2,-1)$ هي $8x+15y+17z+3=0$

تمرين 24 ص 210 نعتبر النقط $A(-1,2,0)$ ، $B(-3,4,2)$ و $C(1,-2,-1)$

1. بين أن: $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا.
2. بين أن شعاعاً $\vec{r}(a,b,c)$ يكون ناظميا للمستوي (ABC) إذا و فقط إذا كان:
$$\begin{cases} -2a+2b+2c=0 \\ 2a-4b-c=0 \end{cases}$$
3) استنتج شعاعاً ناظميا للمستوي (ABC) بمركبات صحيحة ثم أكتب معادلة للمستوي (ABC).

الحل: نبحث عن مركبات الشعاعين $\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}$

1) ومنه $\overrightarrow{AB}(-2;2;2)$ و $\overrightarrow{AC}(2;-4;-1)$

كل شعاعان غير مرتبطان خطيان يشكلان مستويا وبما ان $\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطان خطيا لان

$\frac{2}{-4} \neq \frac{2}{-2}$ فهما يشكلان مستويا أي ان النقط (ABC) تشكل مستوي

2) الشعاع $\vec{r}(a,b,c)$ يكون ناظميا للمستوي (ABC) إذا و فقط إذا كان $\begin{cases} -2a+2b+2c=0 \\ 2a-4b-c=0 \end{cases}$

أي ان $\vec{r}.\overrightarrow{AB}=0$ يكافئ $-2a+2b+2c=0$

و ان $\vec{r}.\overrightarrow{AC}=0$ يكافئ $2a-4b-c=0$ وهذا محقق

3) شعاعاً ناظميا للمستوي (ABC) بمركبات صحيحة ثم أكتب معادلة للمستوي (ABC).

حل الجملة $\begin{cases} -2a+2b+2c=0 \\ 2a-4b-c=0 \end{cases}$ هو $b=\frac{c}{2}$ و $a=\frac{3c}{2}$ ومنه $\vec{r}.2c(3,1,2)$ ومنه بوضع

$\vec{u}(3,1,2)$ نجد $\vec{r}.2c=\vec{u}$ أي انهما متوازيان ومنه $\vec{u}(3,1,2)$

لدينا $\vec{u}(3,1,2)$ و $A(-1,2,0)$ و $M(x,y,z)$

ومنه نبحث اولا عن مركبات الشعاع $\overrightarrow{AM}$ ومنه $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x+1 \\ y-2 \\ z \end{pmatrix}$

$M\in(p)$ يعني ان $\overrightarrow{AM}.\vec{u}=0$ ومنه $\left(3(x+1)+(y-2)+2z\right)=0$

ومنه نجد $3x+y+2z+1=0$ وهي معادلة ديكارتية للمستوي (ABC)

المؤسســـــــة:	المستـــــــوى: الثالثة رياضيات
السنة الدراسية:	ميـــدان التعلم: هندسة
التاريــــــخ:	الوحدة التعلمية: الجداء السلمي في الفضاء
توقيت الحصة :	موضوع الحصة : المسافة بين نقطة ومستو

المكتسبات المستهدفة: توظيف الجداء السلمي لحساب المسافة بين نقطة ومستو

الأنشطة المقترحة وطبيعتها

النشاط5: المسافة بين نقطة و مستو

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}$

المستويين: و

$P_2\ :3x+4y=0$

M نقطة كيفية في الفضاء.

$d(M;P_1)$ هي المسافة بين M و P_1

$d(M;P_2)$ هي المسافة بين M و P_2.

عين المجموعة Ψ للنقط M حيث $d(M;P_1)=d(M;P_2)$

إرشادات حول الحل

يهدف هذا النشاط إلى تفعيل مفهوم المسافة بين نقطة و مستو في الفضاء. نقطة $M\ x;y;z$ من الفضاء تنتمي إلى Ψ إذا و فقط إذا كان $d(M;P_1)=d(M;P_2)$

الإنجاز (سير الحصة)

3/ المسافة بين نقطة ومستوي

تذكير المسافة بين مستقيم ونقطة

في معلم متعامد و متجانس المسافة بين نقطة $A(x_0,y_0)$ و مستقيم (Δ) معادلته : $ax+by+c=0$ هي :
$$d(A,D)=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

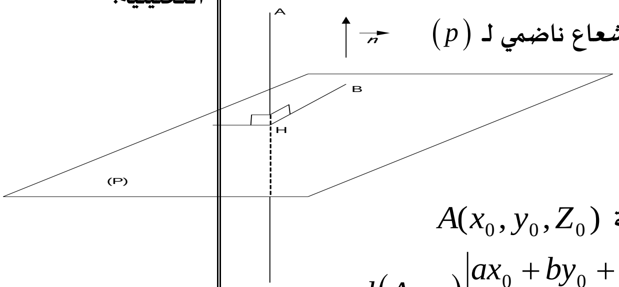
1.3 خواص وتعاريف

1 خاصية وتعريف

الفضاء منسوب الي معلم متعامد و متجانس $(0,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

بعد النقطة A عن المستوى (p) هي المسافة AH حيث H المسقط العمودي لـ A علي (p)

ونكتب: $d(A,(P))=\frac{|\overrightarrow{AH}.\vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$ حيث $B\in(P)$ و $\vec{n}$ شعاع ناضمي لـ (p)



2 خاصية

في معلم متعامد و متجانس نعتبر المستوى (P) ذو المعادلة $ax+by+cz+d=0$ ، $(a,b,c)\neq(0,0,0)$ و النقطة $A(x_0,y_0,Z_0)$

البعد بين A و (p) هو العدد الحقيقي الموجب $d(A:p)\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

مثال ليكن المستوى (p) يشمل نقطة $B(2,1,3)$ و $\vec{n}(1,-1,\sqrt{2})$ شعاع ناضمي له لتكن $A(1,2,0)$ أحسب $d(A,(p))$

الحل لنوجد معادلة المستوى (p) الذي يشمل نقطة $B(2,1,3)$ و $\vec{n}(1,-1,\sqrt{2})$ شعاع ناضمي له ومنه $1x-y+\sqrt{2}z+d=0$

ومن $B\in(P)$ $1(2)-1+\sqrt{2}(3)+d=0$ ه $d=-1-3\sqrt{2}$

معادلة (p) هي $1x-y+\sqrt{2}z-1-3\sqrt{2}=0$

ومنه $d(A,(P))=\frac{|1(1)-(2)+2(0)-1-3\sqrt{2}|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+(\sqrt{2})^2}}=\frac{2+3\sqrt{2}}{2}$

تمرين1 الفضاء منسوب الي معلم متعامد و متجانس $(0,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

نعتبر النقطتين $A(1,-1,1)$ و $B(3,1,-1)$ ، (p) مستوى معادلته $2x-3y+2z=0$

و (D) مستقيم تمثيله الوسيطي $\begin{cases}x=3t\\y=-2-3t\\z=2+4t\end{cases}$ $t\in R$

1- أوجد المعادلة الديكارتية للمستوى (Q) الذي يشمل A و العمودي علي المستقيم (D)

2- أوجد المعادلة الديكارتية للمستوى (Q') الذي يشمل A و B و العمودي علي المستوى (p)

3- أحسب $d(A,(p))$ و $d(A,(D))$

4- أوجد المعادلة الديكارتية للمستوى (P') الذي يشمل B و الموازي للمستوى (p)

التعليمات والتوجيهات

- نعمم تعريف الجداء السلمي في المستوى إلى الفضاء. نراجع بهذه المناسبة الجداء السلمي في المستوي. ونستعمل التعبير "شعاع يعامد مستو".
- تعالج مسائل يتطلب حلها استعمال الجداء السلّمي و/أو عبارته التحليلية.

الحل

1) المعادلة الديكارتية للمستوي (Q) هي مجموعة النقط $M(x,y,z)$ من الفضاء حيث

$\overrightarrow{AM}.\vec{u}=0$ حيث $\longrightarrow$ شعاع توجيه المستقيم (D) $\vec{u}(3,-3,4)$ و

$\overrightarrow{AM}(x-1,y+1,z-1)$ ومنه $3(x-1)-3(y+1)+4(z-1)=0$

$(Q):-3x-3y+4z-10=0$

2) ايجاد المعادلة الديكارتية للمستوي (Q') الذي يشمل A وB عمودي علي (p)

ليكن $\overrightarrow{n'}(a,b,c)$ شعاع ناظمي لـ (Q')

$(Q')\perp(P)$ يكافئ $\vec{n}.\overrightarrow{n'}=0$ ومنه $\begin{cases}3a-3b+4c=0\\ a-b+c+d=0\\ 3a+b-c+d=0\end{cases}$ ومنه نجد

$d=-2a, b=4a, c=5a$ ناخذ a=1 نجد b=4,c=5,d=-2 ومنه

$(Q'): x+4y+5z-2=0$

3) $d(A,(P))=\dfrac{|2(1)-3(-1)+2(1)|}{\sqrt{2^2+(-3)^2+(2)^2}}$ ومنه $d(A,(P))=\dfrac{7}{\sqrt{17}}$

لتكن H المسقط العمودي لـ A علي (D) اذن $\overrightarrow{AH}\perp\vec{u}$ / $\vec{u}(3,-3,4)$

$H(3t,-2-3t,2+4t)$ ومنه $\overrightarrow{AH}(3t-1,-1-3t,1+4t)$

$\overrightarrow{AH}.\vec{u}=0$ ومنه $t=\frac{-2}{17}$ ومنه $H(\frac{-6}{17},\frac{-28}{17},\frac{26}{17})$ ومنه $d(A,(P))=AH$

$d(A,(P))=\sqrt{\left(\frac{-6}{17}-1\right)^2+\left(\frac{-28}{17}+1\right)^2+\left(\frac{26}{17}-1\right)^2}=\frac{\sqrt{731}}{17}$

4) (P') الذي يشمل B و الموازي للمستوي (P) معناه عمودي علي $\vec{n}(2,-3,2)$ أي

$\overrightarrow{BM}.\vec{n}=0$ حيث $\overrightarrow{}(x-3,y-1,z+1)$ ومنه

$(P'): 2x-3y+2z-1=0$

تمرين2 الفضاء منسوب الي معلم متعامد و متجانس $(0,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

نعتبر المستوي (p) ذو المعادلة $3x+2y-z-5=0$ المستقيم (D) المعرف بـ $\begin{cases}x-2y+z-3=0\\ x-y-z+2=0\end{cases}$

-1 أعطي تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D)

-2 أوجد المعادلة الديكارتية للمستوي (Q) الذي يشمل (D) و العمودي علي المستوي (p)

الحل

1) التمثيل الوسيطي للمستقيم (D)

$\begin{cases}x-2y+z-3=0\\ -2x+2y+2z-4=0\end{cases}$ بالجمع نجد $x=3z-7$ و $y=2z-5$ نأخذ z=t نجد

$\begin{cases}x=3t-7\\ y=2t-5\\ z=t\end{cases}$ (D) شعاع توجيه $\vec{u}(3,2,1)$

2) المعادلة الديكارتية للمستوي (Q) الذي يشمل (D) و العمودي علي المستوي (p)

$\vec{n}(3,2,-1)$ شعاع نظمي لـ (p)

ليكن $\overrightarrow{n'}(a,b,c)$ شعاع نظمي لـ (Q)

$(P)\perp(Q)$ معناه $\vec{.}\overrightarrow{n'}=0$ ومنه $3a+2b-c=0$

و $\vec{u}\perp\overrightarrow{}$ معناه $3a+2b+c=0$

نحل الجملة نجد $b=\frac{-3}{2}a, c=0$ بأخذ a=2 نجد $\vec{n}(2,-3,0)$

$(Q): 2x-3y+d=0$

بمأن $A\in(Q)$ لأن (Q) يشمل (D) فان

$2(-7)-3(-5)+d=0$ ومنه d=-1

$(Q): 2x-3y-1=0$

تمرين 28 ص 210 نعتبر المستوي (P) الذي معادلته: 2x-y-1=0 و النقطة $M\left(3,0,2\right)$.

1. عين بعد M عن (P) .
2. استنتج بعد M عن المستقيم (D) ذي المعادلة y=2x-1 في المستوي (xoy) ،

(يمكن الاستعانة بشكل هندسي)

الحل: لدينا $y=2x-1$ أي ان $2x-y-1=0$ شعاعه $\vec{u}\left(2,-1,0\right)$

ومنه $\ell=\frac{\left|2\left(3\right)-\left(0\right)+0\left(2\right)-1\right|}{\sqrt{4+1+0}}=\sqrt{5}$

بعد M عن (D) ذو المعادلة $y=2x-1$

لتكن H المسقط العمودي للنقطة M على المستوي ذو المعادلة $y=2x-1$ اذن:

$MH=\ell=\sqrt{5}$

لتكن K المسقط العمودي للنقطة M على المستقيم ذو المعادلة $y=2x-1$ اذن: $KH=Z=2$

المثلث HKM القائم في H لدينا $HK^2+HM^2=KM^2$ أي $\ell^2+2^2=KM^2$

ومنه $KM=\sqrt{5+4}=3$

بعد M عن (D) ذو المعادلة $y=2x-1$ هو3

تمرين 29 ص 210 نعتبر النقط $A\left(1,0,-1\right)$ ، $B\left(2,2,3\right)$ ، $C\left(3,1,-2\right)$ و $D\left(-4,2,1\right)$

1. اثبت أن المثلث ABC قائم ثم أحسب مساحته.
2. أ) بين أن الشعاع $\vec{n}\left(2,-3,1\right)$ ناظمي للمستوي(ABC)

ب) استنتج معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

3. عين بعد النقطة D عن المستوي(ABC)، ثم أحسب حجم رباعي الوجوه DABC .

الحل: لدينا $A\left(1,0,-1\right)$ ، $B\left(2,2,3\right)$ ، $C\left(3,1,-2\right)$

ومنه $\overrightarrow{AB}\left(1;2;4\right)$.$\overrightarrow{AC}\left(2;1;-1\right)$.$\overrightarrow{BC}\left(1;-1;-5\right)$

ومنه $AB=\sqrt{21}$.$AC=\sqrt{6}$.$BC=\sqrt{27}$ اذن نلاحظ ان $AB^2+AC^2=21+6=27=BC^2$

حسب نظرية فيثاغورث المثلث قائم في A

مساحة المثلث هي S حيث $S=\frac{1}{2}AB\times AC=\frac{1}{2}\sqrt{21}\times\sqrt{6}=\frac{3\sqrt{14}}{2}$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=\left(-1+1\right)=0$ ومنه $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AE}=0$ ومنه $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AE}$

و $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AE}=0$ ومنه $\overrightarrow{AD}.\perp\overrightarrow{AE}$

الشعاع $\vec{n}\left(2,-3,1\right)$ ناظمي للمستوي(ABC) يعني ان

$\overrightarrow{AB}.\vec{n}=1\left(2\right)+2\left(-3\right)+4\left(1\right)=0$ و $\overrightarrow{AC}.\vec{n}=2\left(2\right)+1\left(-3\right)-1\left(1\right)=0$

الشعاع $\vec{n}\left(2,-3,1\right)$ عمودي على الشعاعين $\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}$ فهو شعاع ناظمي للمستوي $\left(ABC\right)$

لدينا $\vec{n}\left(2,-3,1\right)$ و $A\left(1,0,-1\right)$ و $M\left(x,y,z\right)$

ومنه نبحث اولا عن مركبات الشعاع $\overrightarrow{AM}$ ومنه $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-1\\y\\z+1\end{pmatrix}$

$M\in\left(p\right)$ يعني ان $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$ ومنه $\left(2\left(x-1\right)-3\left(y\right)+1\left(z+1\right)\right)=0$

ومنه نجد $2x-3y+z-1=0$ وهي معادلة ديكارتية للمستوى $\left(ABC\right)$

او بطريقة اخرى $\vec{n}\left(2,-3,1\right)$ ناظمي لـ$\left(ABC\right)$ معادلته $2x-3y+z+\alpha=0$

من اجل $A\left(1,0,-1\right)$ نجد $2\left(1\right)-1+\alpha=0$ أي ان $\alpha=-1$ ومنه نجد

$2x-3y+z-1=0$ وهي معادلة ديكارتية للمستوي (ABC)

3. بعد النقطة $D(-4,2,1)$ عن المستوي(ABC).

$$d(D)=\frac{|2(-4)-3(2)+(1)-1|}{\sqrt{4+1+9}}=\sqrt{14}$$

حجم رباعي الوجوه DABC . $V=\frac{1}{3}S.d$

d يمثل الارتفاع $d=\sqrt{14}$ و S مساحة القاعدة وهي $S=\frac{1}{2}\sqrt{6}\sqrt{21}=\frac{1}{2}3\sqrt{14}$

ومنه $V=\sqrt{14}\frac{1}{2}3\sqrt{14}=7$

تمرين 30 ص 210 نعتبر المستويين (P) و (Q) المعرفين بالمعادلتين:

$2x+y-z=0$ و $x-y+2z=0$

1. تحقق أن $A(1,0,-3)$ متساوية البعد عن (P) و (Q)

2. عين مجموعة النقط M من الفضاء المتساوية البعد عن (P) و (Q).

الحل: 1)
$$d(A,(P))=\frac{|2(1)+1(0)-1(-3)|}{\sqrt{2^2+(1)^2+(-1)^2}}=\frac{5}{\sqrt{6}}$$
$$d(A,(P))=\frac{|1(1)-1(0)-2(-3)|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+(2)^2}}=\frac{5}{\sqrt{6}}$$

تمرين

في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ من الفضاء ، نعتبر المستوي (P) الذي معادلته $3x-2y+5z-4=0$.

1) عين بعد النقطة A(1 ; -2 ; 7) عن المستوى (P) .

2) عين بعد النقطة B(2 ; 1 ; 0) عن المستوي (P) . ماذا تستنتج ؟

الحل: 1)
$$d_1=\frac{|3(1)-2(-2)+5(7)-4|}{\sqrt{3^2+(-2)^2+5^2}}=\sqrt{38}$$

2) $d_1=\frac{|3(2)-2(1)+5(0)-4|}{\sqrt{3^2+(-2)^2+5^2}}=0$ نستنتج أن النقطة B هي نقطة من المستوي (P)

المؤسسة:	المستوى: الثالثة رياضيات
السنة الدراسية:	ميدان التعلم: هندسة
التاريخ:	الوحدة التعلمية: الجداء السلمي في الفضاء
توقيت الحصة :	موضوع الحصة : تعيين مجموعات نقط في الفضاء.

المكتسبات المستهدفة: توظيف الجداء السلمي لتعيين مجموعات نقط.

الأنشطة المقترحة وطبيعتها

A ، B نقطتان متمايزتان من المستوى حيث AB = 2 E.

مجموعة النقط M من المستوى حيث $\frac{MA}{MB}=3$.

1) بين أن M نقطة من (E) إذا وفقط إذا $MA^2-9MB^2=0$

2) ليكن G مرجح {(B,3),(A,1)} و K مرجح الجملة {(A,-1),(B,-3)}

- بين أن G و K نقطتان من (E)

3) عبر عن MA^2-9MB^2 بدلالة M G $\vec{MK}$ ثم استنتج طبيعة المحل الهندسي (E)

الإنجاز (سير الحصة)

4/ المرجح

تذكير تعيين مجموعة نقط باستعمال المرجح في المستوى

لتكن A_1 ، A_2 ، A_3 ، .....، A_n n نقطة مرفقة بالمعاملات α_1 ، α_2 ، α_3 ،....، α_n على الترتيب حيث. $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+....+\alpha_n\neq 0$ نسمي مرجح النقط A_1 ، A_2 ، A_3 ، .....، A_n مرفقة بالمعاملات α_1 ، α_2 ، α_3 ،..، α_n على الترتيب النقطة G حيث:

$$\alpha_1\overrightarrow{GA_1}+\alpha_2\overrightarrow{GA_2}+\alpha_3\overrightarrow{GA_3}+....+\alpha_n\overrightarrow{GA_n}=\vec{0}$$

ملاحظات

1- مرجح الجملة $\{(A_1,\alpha_1),(A_2,\alpha_2),.........,(A_n,\alpha_n)\}$ موجود شرط أن يكون المجموع $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n\neq 0$

2- ترتيب النقاط المثقلة $(A_i;\alpha_i)/1\le i\le n$ غير مهم

3- إذا كان أحد المعاملات α_i معدوم يمكن حذف النقطة المثقلة ذات المعامل المعدوم والنقطة G هي مرجح جملة النقاط المتبقية

4- إذا كانت جميع المعاملات α_i متساوية وغير معدومة فإن G يسمى مركز المسافات المتساوية ويمكن أخذ $\alpha_i=1$

تبسيط العلاقة الشعاعية $\alpha_1\overrightarrow{MA_1}+\alpha_2\overrightarrow{MA_2}+\cdots\cdots+\alpha_n\overrightarrow{MA_n}$ حيث $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\neq 0$.

مثال

ABC مثلث من المستوي. α ، β و γ ثلاثة أعداد حقيقية حيث $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$.

ليكن G مرجح النقط A ، B و C المرفقة بالمعاملات α ، β و γ على الترتيب.

الهدف هو تعيين حسب قيم العدد الحقيقي k المجموعة (Γ_k) مجموعة النقط M من المستوى التي تحقق $\|\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}\|=k$

1 المرجح في الفضاء

مبرهنة : لتكن $\{(A_1,\alpha_1),(A_2,x_2).....(A_n,\alpha_n)\}$ جملة مثقلة حيث $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\neq 0$ توجد نقطة وحيدة G تحقق $\alpha_1\overrightarrow{GA_1}+\alpha_2\overrightarrow{GA_2}+...+\alpha_n\overrightarrow{GA_n}=\vec{0}$ تسمى G مرجح الجملة المثقلة

عندما تتساوي المعاملات غير المعدومة فإن G تسمى مركز ثقل الجملة.

مبرهنة : من أجل كل M نقطة من الفضاء يكون

$$\alpha_1\overrightarrow{MA_1}+\alpha_2\overrightarrow{MA_2}+....+\alpha_n\overrightarrow{MA_n}=(\alpha_1+\alpha_2+....+\alpha_n)\overrightarrow{MG}$$

2 التمميز بالمرجح

A ، B ، C ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة

❶ المستقيم (AB) هو مجموعة مراجيح للنقطتين A ، B

❷ القطعة [AB] هي مجموعة مراجيح للنقطتين A ، B مرفقتين بمعاملين من نفس الإشارة

❸ المستوي (ABC) هو مجموعة مراجيح للنقط A ، B ، C

التعليمات والتوجيهات

مجموعات النقط المقصودة هنا هي تلك المعرفة كما يلي: مجموعة النقط M حيث $\overrightarrow{AM}.\vec{u}=k$ أو بصفة عامة k) $\alpha MA^2+\beta MB^2=k$ عدد حقيقي).

- نعني بالتمييز بالمرجح، تعريف مستقيم، قطعة مستقيم ومستو، كمجموعة مراجح نقطتين، نقطتين مرفقتين بمعاملين من نفس الإشارة، 3 نقط ليست على استقامة واحدة، على الترتيب.

- استعمال التمثيلات الوسيطية أو التمييز بالمرجع لحل مسائل الاستقامية، التلاقي، انتماء 4 نقط إلى نفس المستوي.

برهان :

1) A ، B نقطتان متمايزتان . M مرجح $\{(A;a),(B;b)\}$ مع $a+b\neq 0$ إذن

$$\overrightarrow{AM}=\frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}$$

أي أن النقطة M نقطة من (AB) . و بالعكس M نقطة من (AB) فالشعاعان $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{AB}$ مرتبطان خطيا وبالتالي يوجد عدد k حيث $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AB}$ أو $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AM}+k\overrightarrow{MB}$ أي

$$(k-1)\overrightarrow{MA}+k\overrightarrow{MB}=\vec{0}$$

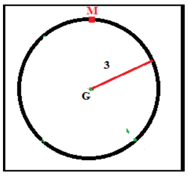
M مرجح الجملة $\{(A;1-k),(B;k)\}$

2) نفس البرهان بأخذ k عدد حقيقي من المجال [0 ; 1]

مثال

$A.B,C$ نقط متمايزة من الفضاء. بين أن مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق :

$\left\|\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right\|=6$ هي سطح كرة يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها .



الحل 1) $\left\|\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right\|=6$

بما أن $\vec{u}=(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}=2\overrightarrow{MG}$ مجموعة النقط M حيث

$\vec{u}=2\overrightarrow{MG}=6$ أي ان $\vec{u}=\overrightarrow{MG}=3$

(C) هي سطح الكرة التي مركزها G مرجح الجملة $\{(A;1)(B;-2)(C;3)\}$

و نصف قطرها 3

مثال

$A.B,C$ نقط متمايزة من الفضاء. بين أن مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق :

$\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=2\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right\|$ هي مستوي (p) محور القطعة $[HG]$.

الحل

$$\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=2\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right\|$$

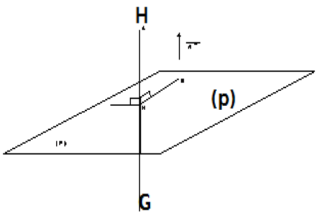
Gمرجح الجملة $\{(A;1)(B;1)(C;2)\}$ لان $1+1+2=4\neq 0$

من أجل كل M نقطة من الفضاء يكون

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=4\overrightarrow{MG}$ ومنه $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=4\left\|\overrightarrow{MG}\right\|$

Hمرجح الجملة $\{(A;1)(C;1)\}$ لان $1+1=2\neq 0$

من أجل كل M نقطة من الفضاء يكون



$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MH}$ ومنه $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right\|=2\left\|\overrightarrow{MH}\right\|$

وبالتالي $4\left\|\overrightarrow{MH}\right\|=4\left\|\overrightarrow{MG}\right\|$ أي ان $MH=MG$

اذن مجموع النقط هي مستوي (p) محور القطعة $[HG]$.

مثال 1 :

A ، B ، C ثلاث نقط من الفضاء . نريد تعيين (E) مجموعة النقط من الفضاء حيث

$\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=3$ ، نفرض أن G مرجح الجملة $\{(A;1),(B;1);(C;1)\}$ ، G هي مركز ثقل المثلث ABC

لدينا $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$ و بالتالي فإن المجموعة (E) هي مجموعة النقط M التي تحقق MG = 1

فهي سطح الكرة التي مركزها G و نصف قطرها 1.

مثال 2 :

(F) مجموعة النقط M حيث $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right\|$ ، ليكن H مرجحا للجملة

$\{(A;1),(B;2)\}$. $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}=3\overrightarrow{MH}$ و بالتالي (F) تحقق $\left\|3\overrightarrow{MG}\right\|=\left\|3\overrightarrow{MH}\right\|$ أي

MG = MH

(F) هو المستوى محور [GH]

تمارين

A ، *B* ، *C* ثلاث نقط من الفضاء ، ليست على استقامة واحدة . *k* عدد حقيقي من المجال [*-1; 1*]

G_k مرجح الجملة $\{(A;k^2+1),(B;k);(C;-k)\}$.

1) مثل النقط *A* ، *B* ، *C* و *I* منتصف [*BC*] ثم أنشئ النقطتين G_1 و G_2

2) *a*) بين أنه من أجل كل *k* من المجال [*-1; 1*] لدينا : $\overrightarrow{AG_k}=\dfrac{-k}{k^2+1}\overrightarrow{BC}$

b) شكل جدول تغيرات الدالة f المعرفة على المجال [*-1; 1*] كما يلي : $f(x)=\dfrac{-x}{x^2+1}$

c) استنتج مجموعة النقط G_k لما *k* يمسح المجال [*-1; 1*]

3) عين (*E*) مجموعة النقط *M* من الفضاء حيث : $\left\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|$

4) عين (*F*) مجموعة النقط *M* من الفضاء حيث $\left\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|$

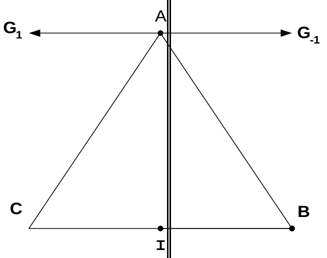
5) الفضاء منسوب الآن إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ ، النقط *A* ، *B* ، *C* تأخذ الإحداثيات *(0; 0; 2)* ،

(-1; 2; 1) و *(-1; 2; 5)* على الترتيب .

a) عين إحداثيات G_1 و G_2 ، تحقق أن (*E*) و (*F*) يتقاطعان.

b) أحسب نصف قطر الدائرة (*C*) تقاطع (*E*) و (*F*) .

الحل



1) G_1 مرجح الجمل $\{(A,2),(B,1),(C,-1)\}$ ومنه

$\overrightarrow{AG_1}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{-1}{2}\overrightarrow{AC}$ ومنه $\overrightarrow{AG_1}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})$. $\overrightarrow{AG_1}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$

G_{-1} مرجح الجمل $\{(A,2),(B,1),(C,-1)\}$ ومنه

$\overrightarrow{AG_{-1}}=\frac{-1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ ومنه $\overrightarrow{AG_1}=\frac{-1}{2}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})$. $\overrightarrow{AG_{-1}}=\frac{-1}{2}\overrightarrow{CB}$

2) لدينا مجموع المعاملات $k^2+1+k-k=k^2+1\neq 0$ ومنه

$\overrightarrow{AG_k}=\frac{k}{k^2+1}\overrightarrow{AB}+\frac{-k}{k^2+1}\overrightarrow{AC}$ اذن $\overrightarrow{AG_k}=\frac{-k}{k^2+1}(-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$ ومنه

$\overrightarrow{AG_k}=\frac{-k}{k^2+1}\overrightarrow{BC}$

جدول تغيرات الدالة المعرفة على $[-,1]$ لدينا $f'(x)=\dfrac{(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$ ومنه

x	-1		+1
f'	0	-	0
f		↘	1/2

ج) يمكن أن نكتب $\overrightarrow{AG_k} = f(k).\overrightarrow{BC}$ مع $k \in [-1,1]$

من جدول التغيرات نلاحظ أنه اذا كان $k \in [-1,1]$ فان $f(k) \in \left[\frac{-1}{2},\frac{1}{2}\right]$

ومنه المجموعة G_k ترسم القطعة $[G_1G_{-1}]$ لما k يمسح المجال $[-1,1]$

3) المجموعة E مجموعة النقط M من الفضاء حيث

$\left\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right\| = \left\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\|$ ومنه

$\left\|2\overrightarrow{MG_1}\right\| = \left\|2\overrightarrow{MG_{-1}}\right\|$ ومنه $MG_1 = MG_{-1}$

أي المجموعة E هو المستوي المحوري للقطعة $[G_1G_{-1}]$

4) المجموعة E مجموعة النقط M من الفضاء حيث

$\left\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right\| = \left\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right\|$ ومنه

$\left\|2\overrightarrow{MG_1}\right\| = \left\|-\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right\|$ ومنه $\left\|2\overrightarrow{MG_1}\right\| = \left\|-2\overrightarrow{AI}\right\|$

أي $MG_1 = AI$ المجموعة F هي كرة مركزها G_1 ونصف قطرها AI و I منتصف $[BC]$

5) ا) احداثيات

$$\begin{cases} x_{G1} = \frac{2.0+1.(-1)-1.(-1)}{2} = 0 \\ y_{G1} = \frac{2.0+1.2-1.2}{2} = 0 \\ z_{G1} = \frac{2.2+1.1-1.5}{2} = 0 \end{cases}$$ وبنفس الطريقة نجد $$\begin{cases} x_{G-1} = 0 \\ y_{G-1} = 0 \\ z_{G-1} = 4 \end{cases}$$ اذن

$G_{-1}(0,0,4)\,,\, G_1(0,0,0)$

ب) من خلال احداثيات G_1 و G_{-1} المجموعة E هي المستوي الذي يشمل $A(0,0,2)$

والمجموعة F هي كرة تشمل $A(0,0,2)$ اذن E و F متقاطعتان

لنبحث عن المجموعة المشتركة بينهما

لدينا معادلة المستوي المحوري للقطعة $[G_1G_{-1}]$ هي $z = 2$

نوجد معادلة كرة مركزها G_1 ونصف قطرها AI

$I\left(\frac{x_B+x_C}{2}, \frac{y_B+y_C}{2}, \frac{z_B+z_C}{2}\right)$ ومنه $I(-1,2,3)$

$IA = \sqrt{(x_A-x_I)^2+(y_A-y_I)^2+(z_A-z_I)^2} = \sqrt{6}$

ومنه معادلة الكرة $(x-x_{G1})^2+(y_A-y_{G1})^2+(z_A-z_{G1})^2 = IA^2$

$x^2+y^2+z^2=6$ نحل الجملة

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=6 \\ z=2 \end{cases}$$ ومنه $$\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ z=2 \end{cases}$$ المجموعة المشتركة بين هي دائرة مركزها

$A(0,0,2)$ ونصف قطرها $r = \sqrt{2}$

تمرين 31 ص 210

ABCD رباعي وجوه .

1. بين أن المستقيمان (AB) و(CD) متعامدان إذا و فقط إذا $AC^2+BD^2=AD^2+BC^2$
2. استنتج أنه إذا كان (AB) عموديا على (CD) و(BC) عموديا على (AD) فإنه يكون (BD) عموديا على (AC).
3. نفرض أن الرباعي ABCD منتظم .

أ). ماذا يمكن القول عن أحرفه المتقابلة ؟.

ب). بين أنه من أجل كل نقطة M من الفضاء يكون: $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{AB}=0$

ج). عين (E) مجموعة النقط M حيث $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{AB}$

الحل

تمارين

نعتبر المكعب $OABCO'A'B'C'$ و لتكن J منتصف $[OA]$ و G مرجح الجملة $\{(O;1),(A;1),(C;3)\}$.

حرف المكعب يؤخذ كوحدة .

I)

1) تحقق أن الشعاعين $\overrightarrow{CG}$ و $\overrightarrow{CJ}$ مرتبطان خطيا ثم عين G على الشكل

2) ما هي إحداثيات G في المعلم $(O;\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OO'})$ ؟

II) 1) M نقطة كيفية من الفضاء ، عبّر عن $\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MC}$ بدلالة $\overrightarrow{MG}$.

2) عيّن طبيعة (E) مجموعة النقط M من الفضاء حيث : $(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MC}).\overrightarrow{MB}=0$

III) 1) عيّن (F) مجموعة النقط M من الفضاء حيث :

$$(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MC}).(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MC})=0$$

2) تحقق أن الشعاعين $\overrightarrow{BG}$ و $\overrightarrow{CJ}$ متعامدان و استنتج أن B نقطة من (F) و B' هي أيضا نقطة من (F)

3) - أنشئ تقاطعات (F) مع أوجه المكعب .

- K و K' نقطتا تقاطع (F) مع المستقيمين (OC) و ($O'C'$) على الترتيب ، ما طبيعة الرباعي $BKK'B'$ ؟

IV) عين (H)مجموعة النقط M من الفضاء حيث $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{B'G}=2$

V) 1) باستعمال الإحداثيات في المعلم المذكور أعلاه ، أحسب GO^2 و GA^2 و GC^2 ثم العدد $GC^2+GA^2+GO^2$

2) M نقطة من الفضاء ، عبّر عن $MO^2+MA^2+3MC^2$ بدلالة MG^2 (باستعمال الشعاع $\overrightarrow{MG}$ وعلاقة شال).

3) نسمي (L) مجموعة النقط M من الفضاء و التي تحقق $MO^2+MA^2+3MC^2=4$.

a) بين أن O تنتمي لـ (L)

b) تحقق أن M نقطة من (L) إذا وفقط إذا $MG^2=k^2$ حيث k عدد حقيقي يطلب تعيينه .

c) استنتج طبيعة (L) ثم أنشئ تقاطع (L) مع الوجه $OABC$ (أي أثر (L) على الوجه $OABC$ للمكعب).

تمرين 32 ص 210

A، B، C ثلاث نقط من الفضاء حيث ABC مثلث قائم في C و متساوي الساقين .(P) مجموعة النقط M من الفضاء و التي تحقق: $\|3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\|=2\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|$

تحقق أن (P) مستو عمودي على المستوى (ABC) يطلب تعيين تقاطعه معه.

الحل

$$\|3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\|=2\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|$$

Gمرجح الجملة $\{(A;3)(B;1)\}$ لان $1+3=4\neq 0$

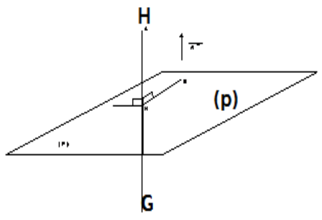
من أجل كل M نقطة من الفضاء يكون

$3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=4\overrightarrow{MG}$ ومنه $\|3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\|=4\|\overrightarrow{MG}\|$

Hمرجح الجملة $\{(B;1)(C;1)\}$ لان $1+1=2\neq 0$

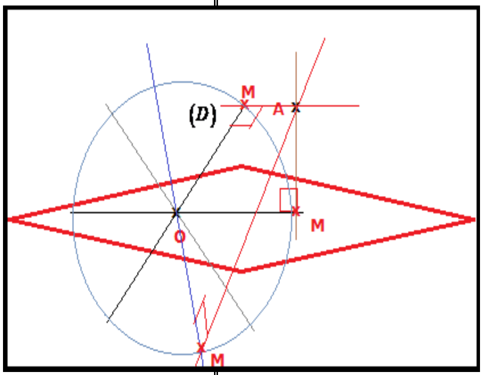
من أجل كل M نقطة من الفضاء يكون

$\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MH}$ ومنه $\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|=2\|\overrightarrow{MH}\|$



وبالتالي $4\|\overrightarrow{MH}\|=4\|\overrightarrow{MG}\|$ أي ان $MH=MG$

اذن مجموع النقط هي مستوي (p) محور القطعة $[HG]$.



تمرين 33 ص 210

نعتبر المستوي (P) و O نقطة منه لتكن A نقطة لا تنتمي إلى (P) بكل مستقيم (D) يمر من O و محتواً في (P) نرفق M المسقط العمودي لـ A على (D).

1. ماهي مجموعة النقط M لما يأخذ (D) كل الوضعيات المكنة؟
2. (يمكن الاستعانة ببرمجية)

الحل:

اذا كانت H المسقط العمودي ل A على المستوي (p) وكان مستقيم (D) يمر من O ومحتوى في (p) وكانت A لاتنتمي الى (p) و O نقطة من (p) فان مجموعة النقط M الناتجة عندما ياخذ (D) كل الوضعيات مع المستوي (p) هي دائرة مركزها O ونصف قطرها OH

اذا كانت H المسقط العمودي ل A على المستوي (p) وكانت H تنطبق على O فان مجموعة النقط M الناتجة عندما ياخذ (D) كل الوضعيات مع المستوي (p) هي النقطة O فقط

تمارين

تمرين 35 ص 211 G مرجح الجملة $\{(A;a),(B;b)\}$ 'G مرجح الجملة $\{(A;1/a),(B;1/b)\}$

حيث $(A\neq B)$ ، $a+b\neq 0$ ، $a\neq 0$ و $b\neq 0$

نضع I منتصف $[AB]$

1) برر وجود النقطة 'G
2) بين أن I منتصف $[GG']$
3) أحسب طول 'GG بدلالة طول AB
4) ماذا يحقق العددان a و b حتى يكون $GG'>AB$ ؟

الحل: 'G مرجح الجملة $\{(A;1/a),(B;1/b)\}$ يعني ان $1/a+1/b\neq 0$

لدينا $1/a+1/b=(a+b)/ab$;$(a+b\neq 0)$;$(ab\neq 0)$ ومنه G' موجودة

2) .I منتصف $[GG']$ يعني I مرجح الجملة $\{(G;(a+b)),(G';(a+b/ab))\}$

ومنه $a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}=(a+b)\overrightarrow{MG}$ لان G مرجح الجملة $\{(A;a),(B;b)\}$

و $\frac{1}{a}\overrightarrow{MA}+\frac{1}{b}\overrightarrow{MB}=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\overrightarrow{MG'}$ لان 'G مرجح الجملة $\{(A;1/a),(B;1/b)\}$

I منتصف $[AB]$ يعني ان $\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{AI}$ نعوض $I=M$ يكون $\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AM}$

ومنه $(a-b)\overrightarrow{MA}=(a+b)\overrightarrow{MG}$ و $\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\overrightarrow{MB}=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\overrightarrow{MG'}$

أي ان $\overrightarrow{MB}=\frac{a+b}{a-b}\overrightarrow{MG}$ و $\overrightarrow{MB}=\frac{a+b}{b-a}\overrightarrow{MG'}$ اذن $\overrightarrow{MG}=-\overrightarrow{MG'}$ ومنه $\overrightarrow{MG}=\overrightarrow{G'M}$

يعني ان $\overrightarrow{IG}=\overrightarrow{G'I}$ ومنه I منتصف $[GG']$

3. نعلم ان: $(a-b)\overrightarrow{MA}=(a+b)\overrightarrow{MG}$ نعوض $I=M$ نجد $(a-b)\overrightarrow{IA}=(a+b)\overrightarrow{IG}$

و $\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\overrightarrow{MB}=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\overrightarrow{MG'}$ نعوض $I=M$ نجد $(a-b)\overrightarrow{IB}=(a+b)\overrightarrow{IG'}$

$\overrightarrow{IA}=\frac{(a+b)}{(a-b)}\overrightarrow{IG}$ و $\overrightarrow{IB}=\frac{(a+b)}{(a-b)}\overrightarrow{IG'}....(1)$ أي $\overrightarrow{AI}=\frac{(a+b)}{(a-b)}\overrightarrow{GI}....(2)$

جمع (2) و (1) نجد $\overrightarrow{AB}=\frac{(a+b)}{(a-b)}\overrightarrow{GG'}$ ومنه $GG'=\left|\frac{(a-b)}{(a+b)}\right|AB$

لكي يكون $GG'\succ AB$ يجب ان يكون فقط $\frac{(a-b)}{(a+b)}\succ 1$ أي $(a-b)\succ(a+b)$

تمرين 36 ص 211

نعتبر المثلث ABC القائم في A و المتساوي الساقين

(AB = AC = a) ، m وسيط حقيقي

1) ما هو الشرط اللازم و الكافي حتى تقبل الجملة

$\{(A;-1);(B;2);(C;m)\}$ مرجحا G_m ؟

2) أنشئ G_0 و G_2 ، تحقق أن $G_0G_1 = \frac{2a\sqrt{5}}{3}$

3) عين وأنشئ المجموعة (Γ_1) مجموعة النقط M حيث

$$\left\{M \in (P) / \left\|-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\right\| = \left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\|\right\}$$

4) عين وأنشئ المجموعة (Γ_2) مجموعة النقط M حيث

$$\left\{M \in (P) / \left\|-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\right\| = AB\right\}$$

5) نفس السؤال (Γ_3)

$$\left\{M \in (P) / \left\|-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\right\| = \left\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right\|\right\}$$

(P) هو المستوي

تمرين 45 ص 211

A ، B و C ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة من الفضاء ζ . H مركز المثلث ABC

1) G مرجح الجملة $\{(A;1);(B;2);(C;1)\}$ ، بين أن

B ، G و H على استقامة واحدة

2) عين ζ_1 مجموعة النقط M حيث $\zeta_1 = \left\{M \in \zeta / 3\left\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = 4\left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}\right\|\right\}$

3) لكل نقطة M من المستوي نرفق الشعاعين

$\vec{u} = \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ و $\vec{v} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}$

a) بين أن $\vec{v}$ مستقل عن M

b) بين أن C تحقق $\left\|\vec{u}\right\| = \left\|\vec{v}\right\|$

c) عين ζ_2 مجموعة النقط M من ζ التي تحقق :

$$\left\|\vec{u}\right\| = \left\|\vec{v}\right\|$$

تمرين 46 ص 211

ABC مثلث قائم في A نسمي O منتصف [BC] و (φ) الدائرة الداخلية للمثلث ABC و I منتصف

[AO] ، بكل نقطة من المستوي نرفق النقتين P وQ حيث: $\overrightarrow{MP} = 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ و

$$\overrightarrow{MQ} = 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$$

1. بين أن I مرجح الجملة $\{(A;2);(B;1);(C;1)\}$.
2. بين أن P و Q هما صورتا M بتحويلين نقطيين يطلب تحديدهما.
3. نأخذ الآن M كنقطة من (φ)

أ).عين مجموعة النقط P وQ عندما يتغير M على (φ).

ب).لتكن O' نظيرة O بالنسبة لـ A ، ماهي طبيعة الرباعي $OMQO'$ ؟

ج).بين أن القطعة [PQ] تحافظ على طول ثابت و تشمل O'.

مجموعات النقط

1 مجموعة النقط من الفضاء التي تحقق $k \in IR ; \overrightarrow{AM}.\vec{u} = k$

ليكن $\vec{u}$ شعاع و A نقطة من الفضاء و k عدد حقيقي

ولتكن (E) مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق $\overrightarrow{AM}.\vec{u} = k$ ....(I)

<u>1/ اذا كان</u> $\vec{u} = \vec{0}$ فإننا نميز حالتين

<u>الحالة الأولى</u>: إذا كان $k = 0$ فإن (I) تكافئ $\overrightarrow{AM}.\vec{0} = 0$ ومنه (E) هي مجموعة نقط الفضاء

<u>الحالة الثانية</u>: إذا كان $k \neq 0$ فإن (E) هي المجموعة الخالية

<u>2/ اذا كان</u> $\vec{u} \neq \vec{0}$

ليكن (d) المستقيم الذي يشمل A و $\vec{u}$ شعاع توجيه له, ولتكن H النقطة من (d) التي تحقق

$\overrightarrow{AH}.\vec{u} = k$ إذن $\overrightarrow{AM}.\vec{u} = \overrightarrow{AH}.\vec{u}$

ومنه $\overrightarrow{AM}.\vec{u} - \overrightarrow{AH}.\vec{u} = 0$ إذن $\vec{u}.\left(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AH}\right) = 0$ ومنه $\vec{u}.\overrightarrow{HM} = 0$

إذن (E) هي المستوي الذي يشمل H و $\vec{u}$ ناظمي له

<u>تطبيق</u>

$[AB]$ قطعة مستقيمة طولها 4

1/عين المجموعة (E) للنقط M من الفضاء التي تحقق $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM} = 24$

2/ عين المجموعة (E') للنقط M من الفضاء التي تحقق $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM} = 24$

2 مجموعة النقط من الفضاء التي تحقق $k \in IR / aMA^2 + bMB^2 = k$

لتكن A و B نقطتان من الفضاء و a و b عددان حقيقيان لا ينعدمان معا و k عدد حقيقي ,

ولتكن (E) مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق $aMA^2 + bMB^2 = k$

<u>1* اذا كان</u> $a + b = 0$ لدينا

$$aMA^2 + bMB^2 = a\overrightarrow{MA}^2 + b\overrightarrow{MB}^2$$
$$= a\overrightarrow{MA}^2 + b\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}\right)^2$$
$$= a\overrightarrow{MA}^2 + b\overrightarrow{MA}^2 + 2b\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AB}^2$$
$$= (a+b)\overrightarrow{MA}^2 + 2b\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AB}^2$$
$$= 2b\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AB}^2$$

ومنه $aMA^2 + bMB^2 = k$ تكافئ $2b\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AB}^2 = k$

أي أن $2b\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AB} = k - b\overrightarrow{AB}^2$ ومنه $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AB} = \dfrac{k - b\overrightarrow{AB}^2}{2b}$ (لأن $b \neq 0$)

وهي من الشكل $\overrightarrow{MA}.\vec{u} = k'$　$k' \in IR /$

<u>2* اذا كان</u> $a + b \neq 0$

فإن الجملة $\{(A;a),(B;b)\}$ لها مرجح وليكن G إذن $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \vec{0}$ ومنه

$$aMA^2+bMB^2=a\overrightarrow{MA}^2+b\overrightarrow{MB}^2$$
$$=a\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}\right)^2+b\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}\right)^2$$
$$=(a+b)\overrightarrow{MG}^2+2\overrightarrow{MG}.\left(a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}\right)+a\overrightarrow{GA}^2+b\overrightarrow{AB}^2$$
$$=(a+b)\overrightarrow{MG}^2+a\overrightarrow{GA}^2+b\overrightarrow{AB}^2$$

ومنه $aMA^2+bMB^2=k$ تكافئ $(a+b)\overrightarrow{MG}^2+a\overrightarrow{GA}^2+b\overrightarrow{AB}^2=k$

أي أن $(a+b)\overrightarrow{MG}^2=k-a\overrightarrow{GA}^2+b\overrightarrow{AB}^2$ و هذا يكافئ $MG^2=\dfrac{k-a.GA^2+b.AB^2}{(a+b)}$

ومنه نميز ثلاث حالات

الحالة الأولى: إذا كان $\dfrac{k-a.GA^2+b.AB^2}{(a+b)}<0$ فإن $(E)=\varnothing$

الحالة الثانية: إذا كان $\dfrac{k-a.GA^2+b.AB^2}{(a+b)}=0$ فإن $(E)=\{G\}$

الحالة الثالثة: إذا كان $\dfrac{k-a.GA^2+b.AB^2}{(a+b)}>0$ فإن المجموعة (E) هي مجموعة نقط سطح الكرة التي مركزها G و نصف قطرها $\sqrt{\dfrac{k-a.GA^2+b.AB^2}{(a+b)}}$

تطبيق

في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ من الفضاء ، نعتبر النقط $A(0;1;-4)$ $B(2;1;0)$

1/عين المجموعة (E) للنقط $M(x;y;z)$ من الفضاء التي تحقق $MA^2-3MB^2=1$

2/ عين المجموعة (E') للنقط $M(x;y;z)$ من الفضاء التي تحقق $-2MA^2+2MB^2=3$

تطبيق2: 36 صفحة 211

نشاطي رياضيات وعلوم

2015 المستقيمات والمستويات في الفضاء

المحور الثاني

الكفاءة المستهدفة

- استعمال التمثيلات الوسيطية لحل مسائل الاستقامية ، التلاقي ، انتماء أربع نقط إلى نفس مستو.
- الانتقال من جملة معادلتين ديكارتيتين لمستقيم أو معادلة ديكارتية لمستوي إلى تمثيل وسيطي و العكس .
- تحديد الوضع النسبي لمستويين ، لمستقيم ومستوي ، لمستقيمين .
- تعيين تقاطع مستويين ، لمستقيم ومستوي ، لمستقيمين .

المكتسبات القبلية

- الجداء السلمي في المستوي
- التمثيل الوسيطي لمستقيم
- كتابة معادلة مستقيم علم شعاع ناظمي له و نقطة منه.
- الهندسة في الفضاء

- نعمم تعريف الجداء السلمي في المستوي إلى الفضاء، نراجع بهذه المناسبة الجداء السلمي في المستوي. ونستعمل التعبير " شعاع يعامد مستو".
- تعالج مسائل يتطلب حلها استعمال الجداء السلّمي و/أو عبارته التحليلية.
- مجموعات النقط المقصودة هنا هي تلك المعرّفة كما يلي: مجموعة النقط M حيث $\overrightarrow{AM}\times\overrightarrow{U}=k$ أو بصفة عامة $\alpha MA^2+\beta MB^2=k$ ($k\in$).
- نبركيف أنّ دراسة الوضع النسبي لمستويين أو لمستقيم ومستو أو لمستقيمين يؤول إلى حل جملة معادلات خطية.
- نتطرق إلى تقاطع 3 مستويات الذي يؤدي إلى حل جملة ثلاث معادلات خطية بثلاثة مجاهيل.

التوقيت	ســـــــــــــير الدرس
	نشاط 1: التمثيل الوسيطي لمستقيم 2: تمثيل مستقيم بمعادلتين في الفضاء 3: تقاطع المستقيمات والمستويات في الفضاء 4: تقاطع مستقيم ومستوي 5: تقاطع مستوين 6:تقاطع ثلاث مستويات

نقد ذاتي	الوسائل البيداغوجية	وثائق التحضير
	• السبورة •	• دليل الأستاذ • الكتاب المدرسي • المنهاج • الهباج في الرياضيات • مذكرات شايبي امين

المؤسســــــة:	المستـــــــوى: الثالثة رياضيات
السنة الدراسية:	ميــدان التعلم: هندسة
التاريـــــــــخ:	الوحدة التعلمية: المستقيمات والمستويات في الفضاء
توقيت الحصة :	موضوع الحصة : تمثيل المستقيم في الفضاء

المكتسبات المستهدفة: الإنتقال من جملة معادلتين ديكارتيتين لمستقيم أو معادلة ديكارتية لمستو إلى تمثيل وسيطي، والعكس.

الأنشطة المقترحة و طبيعتها	الإنجاز (ســـــــير الحصة)	التعليمات

الأنشطة المقترحة و طبيعتها

نشاط مقترح

نشاط6 : حساب أقصر مسافة بين مستقيمين

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ النقط

A(3 ;-2 ;-1) و B(-1 ;-1 ;0) و C(0 ;1 ;2) و D(-6 ;2 ;4)

بين تقاطع المستقيمين (AB) و (CD) . هل (CD)//(AB)؟

عين أقصر مسافة بين (AB) و (CD) .

إرشادات حول الحل

يهدف هذا النشاط إلى :

- تعيين تمثيلا وسيطيا لمستقيم .

- حل جملة خطية .

- $\Delta \cap \Delta' = \varnothing$ لا يعني حتما ان $\Delta \,//\, \Delta'$.

- توظيف الجداء السلمي في الفضاء .

- كيفية حساب أقصر مسافة بين مستقيمين في الفضاء.

يمكن ان نساعد التلميذ بطريقة غير مباشرة في السؤال الثاني(نطلب مثلا قبل هذا السؤال إيجاد المستقيم الذي يعامد (AB) و (CD)).

نبحث عن $AB \cap CD$:

الإنجاز (ســـــــير الحصة)

1 النشاط

نعتبر مستويين : $(P): x-4y+7=0$ و $(Q): x+2y-z+1=0$

1) بين أن المستويين (P) و (Q) متقاطعان و تقاطعهما المستقيم (d) يطلب تعينه

2) عين الشعاع التوجيه $\vec{v}$ للمستقيم (d)

2 الحـــل

1) ليكن : $\vec{n}(1;-4;0)$ ناظمي لـ : (P) و $\vec{n}'(1;2;-1)$ ناظمي لـ : (Q)

يكفي أن نثبت أن الشعاعان $\vec{n}'$ و $\vec{n}$ غير مرتبطان خطيا

نفرض أن : $\vec{n}//\vec{n}'$ إذن يوجد عدد حقيقي k يحقق : $\vec{n}=k\,\vec{n}'$

يوجد تناقض : لأن k ليس حل للمعادلات الثلاثة $\begin{cases}1=k\times 1\\-4=k\times 2\\0=k\times(-1)\end{cases}$ ينتج أن $\vec{n}'$ و $\vec{n}$ غير مرتبطان خطيا

و باتالي : أن المستويين (P) و (Q) متقاطعان

لتكن النقطة $M(x;y;z)$ من المستقيم (d) حيث احداتياتها حل للجملة : $\begin{cases}x+2y-z+1=0\\x-4y+7=0\end{cases}$

نضع : $y=t$ ، $x=4t-7$ و $z=4t-7+2t+1=6t-6$

أين التمثيل الوسيطي للمستقيم (d) : $\begin{cases}x=4t-7\\y=t\\z=6t-6\end{cases}$

لتكن النقطة $A(-7;0;-6)$ تنتمي إلى (d) من أجل $t=0$ و الشعاع $\vec{u}(4;1;6)$

ومنه الجملة السابقة تكتب على شكل : $\overrightarrow{AM}=t\,\vec{u}$ معادلة وسيطية للمستقيم (d) و موجهة بالشعاع $\vec{v}=\vec{u}$

1 النشاط 1 ص 216

نشرح في هذه المرحلة طريقة غوص (GAUSS) لحل جملة معادلات خطية من خلال هذا المثال .

نعتبر الجملة (S) حيث $(S):\begin{cases}a-2b+2c-2d+e=1 & (L_1)\\2a-b+c-d-e=2 & .(L_2)\\a-b+2c-d+e=4 & (L_3)\end{cases}$

المرحلة الأولى : $L_2 \leftarrow L_2-2L_1$: $L_3 \leftarrow L_3-L_1$ نحصل على (S_1):

$$(S_1):\begin{cases}a+2b+2c-2d+e=1\\3b-3c+3d-3e=0\\b+d=3\end{cases}$$

2 الحـــل

المرحلة الاولى : $L_3 \leftarrow L_3-2L_1$ ، $L_3 \leftarrow L_3-2L_1$

نحصل على (S_1): $(S_2)\begin{cases}2x+3y-3z=a\\7y-8z=a-2b\\-7y+8z=c-2a\end{cases}$

التعليمات

- نسجل أنه يمكن تمثيل مستقيم بمعادلتين خطيتين.

- نبرر كيف أنّ دراسة الوضع النسبي لمستويين أو لمستقيم ومستو أو لمستقيمين يؤول إلى حل جملة معادلات خطية.

نتطرق إلى تقاطع 3 مستويات الذي يؤدي إلى حل جملة ثلاث معادلات خطية بثلاثة مجاهيل.

إدا كان a-2b=2a-c أي a+2b-c=0 فان الجملة لا تقبل حلول.

إدا كان a-2b+c=0 عندئذ تصبح لدينا الجملة :

$$(S_3)\begin{cases}2x+3y-2z=a\\7y-8z=a-2b\\0z=0\end{cases}$$ نضع $z=k$

فنحصل على حلول الجملة و هي الثلاثية (x,y,z) حيث $x=\dfrac{4a+2b+6k}{14}$, $y=\dfrac{a-2b+8k}{7}$, .

1/التمثيل الوسيطي لمستقيم

تمرين يوضح مفهوم التمثيل الوسيطي

ليكن (D) المستقيم الذي يشمل النقطة $A(2\,;-1\,;1)$ ويوازي الشعاع $\vec{u}(2\,;3\,;-1)$.

مجموعة النقط $M(x\,;y\,;z)$ من الفضاء التي تحقق $\overrightarrow{AM}=k\vec{u}$ ، حيث k عدد يتغير على $\Re$ ، هو المستقيم (D) .

أ) أكتب إحداثيات M بدلالة k . هذه الجملة لإحداثيات M بدلالة k تسمى تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D) .

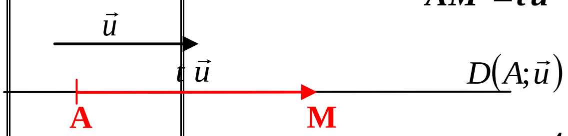
ب) جد معادلتين ، تربط بين إحداثيات النقطة M ، مستقلتين عن العدد الحقيقي k .
هذه الجملة تسمى جملة معادلتي المستقيم (D) .

تعريف

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس . (D) مستقيم من الفضاء يشمل النقطة $A(x_A;y_A;z_A)$ و $\vec{u}(a;b;c)$ شعاع ناظمي له .

M(x; y ; z) نقطة من (D) إذا و فقط إذا وجد عدد حقيقي t حيث $\overrightarrow{AM}=t\vec{u}$

وهذا يعني باستعمال الإحداثيات الديكارتية



$$\begin{cases}x-x_A=at\\y-y_A=bt\\z-z_A=ct\end{cases}$$ مع $t\in\Re$ أو $$\begin{cases}x=x_A+at\\y=y_A+bt\\z=z_A+ct\end{cases}$$ مع $t\in\Re$

نسمي الجملة السابقة تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D).

مثال: الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

. أعط تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AB) حيث A(+2 ; 2 ; - 3) و B(1 ; - 1 ; 0)

. هل النقطة C(1 ; 3 ; 2) تنتمي إلى المستقيم (AB) ؟

2/تمثيل مستقيم بمعادلتين في الفضاء

نتيجة: بما ان مستويين في الفضاء يمكن ان يتقاطعا في مستقيم.وكل منهما معرف بمعادلة ديكارتية: فيمكن تمثيل المستقيم بمعادلتين ديكارتيتين

مثال: تحقق من المستويين $(p):x+y-z-1=0,(p'):x+2y-2z=0$

يتقاطعان في مستقيم, ثم اكتب تمثيلا وسيطيا له

الحل: المستويين $(p):x+y-z-1=0,(p'):x+2y-2z=0$

يتقاطعان في مستقيم لدينا $\vec{u}(1;1;-1)$ شعاع توجيه (p) و $\vec{u'}(1;2;-2)$ شعاع توجيه (p')

الشعاعان غير مرتبطان خطيا فهما غير متوازيان اي ان (p) و (p') متقاطعان في مستقيم

تمثيلا وسيطيا له

$$\begin{cases}x+y-z-1=0\\x+2y-2z=0\end{cases}$$ بعد الحساب نجد $$t\in\Re;\begin{cases}x=t+1\\y=1\\z=t\end{cases}$$

أولا : لنعين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AB)، نجد :

$$\begin{cases}x=3-4\lambda\\y=-2+\lambda\\z=-1+\lambda\end{cases}$$ و $\lambda\in IR$

و تمثيلا وسيطيا للمستقيم (CD) ونجد :

$$\begin{cases}x=-6\alpha\\y=1+\alpha\\z=2+2\alpha\end{cases}$$ و $\alpha\in IR$

ثانيا : لنعين : $AB\cap CD$

نحل الجملة

$$\begin{cases}\begin{cases}x=3-\lambda\\y=-2+\lambda\\z=-1+\lambda\end{cases}\\ \begin{cases}x=-6\alpha\\y=1+\alpha\\z=2+2\alpha\end{cases}\end{cases}$$ و

نلاحظ انها لاتقبل أي حل و

منه

. $AB\cap CD=\varnothing$

هل (CD)//(AB)؟

لا يوجد أي عدد حقيقي k حيث $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{CD}$ ،

إذن (AB) لا يوازي(CD).

نبحث عن أقصر مسافة بين (AB) و (CD) :

$M(3-4\lambda;-2+\lambda;-1+\lambda)$

نقطة كيفية من (AB) و

$N(-6\alpha;1+\alpha;2+2\alpha)$

نقطة كيفية من (CD) .

تكون MN أقصر مسافه بين (AB) و (CD) إذا و فقط إذا كان :

$$\begin{cases}MN\ //\ AB\\MN\ //\ CD\end{cases}$$ أي

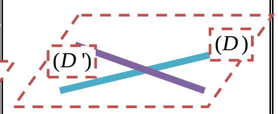
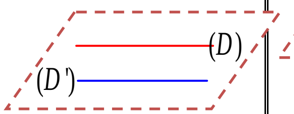
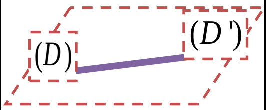
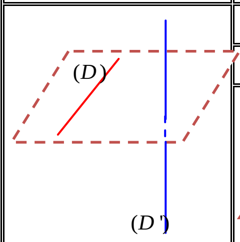
$$\begin{cases}\overrightarrow{MN}\bullet\overrightarrow{AB}=0\\\overrightarrow{MN}\bullet\overrightarrow{CD}=0\end{cases}$$ أي

3/تقاطع المستقيمات والمستويات في الفضاء

(P) و (P') مستويان ، n و n' ناظميان لهما على الترتيب . (D) و (D') مستقيمان موجهان بالشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{u'}$ على الترتيب

1 تقاطع مستقيمين

يمكن للمستقيمين (D) و (D') أن يكونا

من نفس المستوي			من مستويين مختلفين
متقاطعين	متوازيين		
	متوازيين و مختلفين	منطبقين	
			
التقاطع نقطة	التقاطع خال	التقاطع مستقيم	التقاطع خال

يعطى في هذه الحالة المستقيمان $(D):\begin{cases} x = at + x_0 \\ y = bt + y_0 \\ z = ct + z_0 \end{cases} \quad t \in \Re$ و $(D'):\begin{cases} x = \alpha t' + x_1 \\ y = \beta t' + y_0 \\ z = \gamma t' + z_0 \end{cases} \quad t' \in \Re$

تقاطع المستقيمان حل للجملة $\begin{cases} \alpha t' + x_1 = at + x_0 \\ \beta t' + y_1 = bt + y_0 \\ \gamma t' + z_1 = ct + z_0 \end{cases}$

مثال

ليكن $A(1;-1;0)$ ، $B(0;-1;1)$ ، $C(3;-2;0)$ ، $D(2;-3;3)$

عين تقاطع مستقيمين (AB) و (CD)

الحل

لنا $(AB):\begin{cases} x = -t+1 \\ y = -1 \\ z = t \end{cases} \quad t \in \Re$ و $(CD):\begin{cases} x = -t'+3 \\ y = -t'-2 \\ z = 3t' \end{cases}$ و منه نجد $H(4;-1;-3)$ تقاطع المستقيمان

من أجل $(t;t') = (-3;-1)$

تمرين محلول1:

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

. أعط تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AB) حيث A(+2 ; 2 ; - 3) و B(1 ; - 1 ; 0)

. هل النقطة C(1 ; 3 ; 2) تنتمي إلى المستقيم (AB) ؟

الحل: شعاع توجيه لـ (AB) هو

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ +3 \end{pmatrix}$ و بالتالي $\begin{cases} x = 2-t \\ y = 2-3t \\ z = -3+3t \end{cases}$ مع $t \in \mathbb{R}$ هذه الجملة هي التمثيل الوسيط

تنتمي C إلى (AB) إذا وفقط وجد t يحقق $\begin{cases} 2-t = 1 \\ 2-3t = 3 \\ -3+3t = 2 \end{cases}$ أي $\begin{cases} t = 1 \\ t = -\dfrac{1}{3} \\ t = \dfrac{5}{3} \end{cases}$ ومنه C لا تنتمي إلى (AB)

أي $\begin{cases} 2\lambda - 3\alpha = 2 \\ 27\lambda - 41\alpha = 27 \end{cases}$

$\begin{cases} \lambda = 1 \\ \alpha = 0 \end{cases}$

أقصر مسافة بين (AB) و (CD) هي MN في الحالة $\begin{cases} \lambda = 1 \\ \alpha = 0 \end{cases}$ أي 3 .

نشاط: الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$. (L) مستقيم من الفضاء و $A(2,1,-1)$ نقطة منه و $\vec{u}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ شعاع توجيه له. نعتبر $M(x,y,z)$ من (L)

- أحسب مركبات $\overrightarrow{AM}$.
- ماذا يحقق الشعاعان $\vec{u}$ ، $\overrightarrow{AM}$.

تمرين محلول2:

نعتبر المستقيمات d_1 ، d_2 ، d_3 ممثلة وسيطيا على الترتيب $t\in\Re$ $t''\in\Re$ $t'\in\Re$

$$d_1:\begin{cases}x=-2+5t\\ y=-1-t\\ z=3+4t\end{cases} \quad ، \quad d_2:\begin{cases}x=1-t'\\ y=4+3t'\\ z=5-t'\end{cases} \quad ، \quad d_3:\begin{cases}x=-7+7t''\\ y=-3t''\\ z=2t''\end{cases}$$

- أدرس تقاطع d_1 و d_2 ثم d_1 و d_3

الحل : $\vec{u_1}\begin{pmatrix}5\\-1\\4\end{pmatrix}$ ، $\vec{u_2}\begin{pmatrix}-1\\3\\-1\end{pmatrix}$ ، $\vec{u_3}\begin{pmatrix}7\\-3\\2\end{pmatrix}$ أشعة توجيه لـ d_1 ، d_2 ، d_3 على الترتيب

➢ نلاحظ أن $\vec{u_1}$ و $\vec{u_2}$ غير مرتبطين خطيا و بالتالي d_1 و d_2 غير متوازيين ، فهما إما متقاطعان أو لا ينتميان لنفس المستوى . و عليه نحل الجملة $\begin{cases}-2+5t=1-t'\\ -1-t=4+3t'\end{cases}$ نجد $\begin{cases}t=1\\ t'=-2\end{cases}$

النقطة من d_1 من أجل t = 1 هي (3 ; -2 ; 7) و النقطة من d_2 من أجل t' = -2 هي (3 ; -2 ; 7)

و بالتالي فالمستقيمان d_1 و d_2 يتقاطعان في (3 ; -2 ; 7).

➢ $\vec{u_1}$ و $\vec{u_3}$ غير مرتبطين خطيا نستخلص نفس الملاحظة

لحل الجملة $\begin{cases}-2+5t=-7+7t''\\ -1-t=-3t''\end{cases}$ نجد $\begin{cases}t=-1\\ t''=0\end{cases}$ النقطة من d_1 من أجل t = -1 هي (-7 ; 0 ; -1) و

النقطة من d_2 من أجل t'' = 0 هي (-7 ; 0 ; 0) إذن المستقيمان d_1 و d_2 ليسا من نفس المستوى

تمرين 18 ص 227

ليكن رباعي الوجوه ABCD و لتكن 'D' ، B' و C نظائر A بالنسبة لمنتصفات القطع [BC] ، [CD] و [DB] على الترتيب

1) تحقق أن $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD})$ معلم للفضاء

2) عين تمثيلا وسيطيا لكل من المستقيمات ('BB) ، ('CC) و ('DD)

3) بين أنّ هذه المستقيمات تتقاطع في نقطة واحدة J يطلب تحديد احداثياتها

تمرين 19.20.21.22 ص 227

بين أن (D) و ('D) مستقيمان منطبقان

$$(D'):\begin{cases}x=9+5t'\\ y=-5-t'\\ z=-8-4t'\end{cases} t'\in\Re \quad (D):\begin{cases}x=-1+5t\\ y=-3-t\\ z=-4t\end{cases} t\in\Re$$

بين أن (D) و ('D) مستقيمان متوازيان

$$(D'):\begin{cases}x=-2t'\\ y=1+4t'\\ z=t'\end{cases} t'\in\Re \quad (D):\begin{cases}x=4-2t\\ y=2+4t\\ z=t\end{cases} t\in\Re$$

بين أن (D) و ('D) لا ينتميان لنفس المستوي

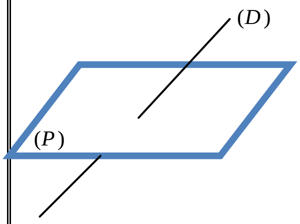
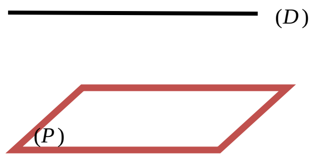
$$(D'):\begin{cases}x=-1+t'\\ y=2-2t'\\ z=5+3t'\end{cases} t'\in\Re \quad (D):\begin{cases}x=-3+t\\ y=t\\ z=1+3t\end{cases} t\in\Re$$

بين أن (D) و ('D) متقاطعان

$$(D'):\begin{cases}x=t'\\ y=1-t'\\ z=-1+4t'\end{cases} t'\in\Re \quad (D):\begin{cases}x=-3+2t\\ y=2-t\\ z=1+t\end{cases} t\in\Re$$

- الإنتقال من جملة معادلتين ديكارتيتين لمستقيم أو معادلة ديكارتية لمستو إلى تمثيل وسيطي، والعكس.
- تحديد الوضع النسبي لمستويين، لمستقيم ومستو، لمستقيمين.
- تعيين تقاطع مستويين، مستقيم ومستو، مستقيمين.

2 تقاطع مستقيم ومستو

<table>
<tr><th colspan="2">(D) يوازي (P)</th><th>(D) يقطع (P)</th></tr>
<tr><td>(D) يوازي (P) " تقاطع خال "</td><td>(D) محتوا في (P)</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
</table>

يعطى في هذه الحالة المستوي : $(P): ax+by+cz+d=0$ و المستقيم الوسيطي $D(A;\vec{u})$ الممثل

بـ : $\begin{cases} x=\alpha\, t+x_A \\ y=\beta\, t+y_A \\ z=\gamma\, t+z_A \end{cases}$ $t\in\Re$ ليكن : $\vec{n}(a;b;c)$ ناظمي لـ (P) و $\vec{v}(\alpha;\beta;\gamma)$ موجه لـ $D(A;\vec{u})$

نفرض أن الشعاعان : $\vec{n}(a;b;c)$ و $\vec{v}(\alpha;\beta;\gamma)$ غير متعامدان و (P) و $D(A;\vec{u})$ يتقاطعان في B

بحث عن إحداثيات B نرجع إلى حل المعادلة لمجهول t حيث :

$$a(\alpha\, t+x_A)+b(\beta\, t+y_A)+c(\gamma\, t+z_A)+d=0 \Leftrightarrow$$

$$(a\,\alpha+b\,\beta+c\,\gamma)t+a\,x_A+b\,y_A+cz_A+d=0$$

بما أن : $\vec{n}(a;b;c)$ و $\vec{v}(\alpha;\beta;\gamma)$ غير متعامدان حسب الفرضية لنا : $a\,\alpha+b\,\beta+c\,\gamma\neq 0$

المعادلة لها حل وحيد : $t=-\dfrac{a\,x_A+b\,y_A+cz_A+d}{a\,\alpha+b\,\beta+c\,\gamma}$

مثال

ليكن $(D):\begin{cases} x=t-1 \\ y=-3t \\ z=2 \end{cases}$ و $(P):2x-z=0$ عين تقاطع (P) و (D)

تمرين 27 ص 228

نعتبر النقطتين $W(1;1;1)$ ، $A(3;3;0)$

1) أكتب معادلة لـ (S) سطح الكرة الذي مركزه W ويشمل A.

2) أكتب معادلة لِـ (P) المستوي المماس لِـ (S) في A

3) لتكن النقط $B(-1;2;-1)$ ، $C(0;0;-3)$

و $D(1;2;-3)$

a) تحقق أن النقط B ، C و D ليست على استقامة واحدة

b) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (BCD)

4) بين أن (BCD) و (P) متعامدان

5) أكتب تمثيلا وسيطيا لتقاطع (P) و (BCD)

تمرين 41 ص 229

نعتبر المستوي (P) الذي معادلته

$$2x+y-2z+5=0$$

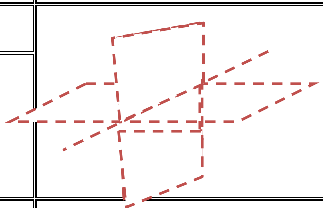
1) عين شعاعا $\vec{n}$ ناظميا لـ (P)

2) بين أنّ الشعاع $\vec{u}(1;0;1)$ شعاع توجيه لـ (P)

3) عين أساسا متجانسا $(\vec{u};\vec{v};\vec{w})$ حيث $\vec{u}$ $\vec{v}$ مرتبطان خطيا مع $\vec{n}$ و $\vec{u}$ على الترتيب

3 تقاطع مستويين

الوضعيات الممكنة

متقاطعان	متوازيان	
	منطبقان	تقاطع خالي
		
التقاطع مستقيم	التقاطع مستو	التقاطع خال

خاصية: مستقيم في الفضاء معرّف بجملة معادلتين ديكارتيتين لمستويين متقاطعين

تمرين 48 ص 229

1) عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم d تقاطع المستويين (P) و (p') اللذين معادلتاهما $x+y+z=0$ و $x-y+z-4=0$

2) عين معادلة ديكارتية للمستوي (P'') الذي يشمل $A(1;1;2)$ و العمودي على d .

تمرين 51 ص 229

نعتبر الجملة التالية
$$\begin{cases} x+y=-1 \\ 2x+y+2z=0 \\ 4x+4y+z+3=0 \end{cases}$$

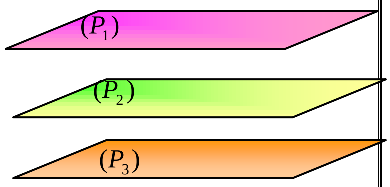
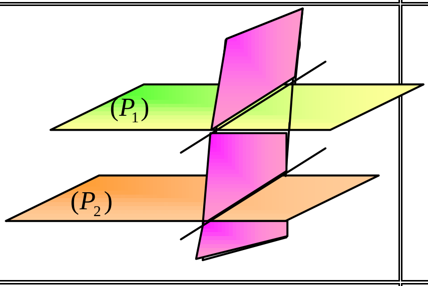
1) باعتبار أن المعادلتين الأوليتين هما معادلتا مستويين (P) و (P') يتقاطعان في مستقيم (D) يشمل النقطة $A(1;-2;0)$ و موجه ب $\vec{u}(-2;2;1)$

2) تحقق أن (D) و المستوي (P'') الذي معادلته الثالثة في الجملة يتقاطعان واستنتج أن الجملة تقبل حلا وحيدا يطلب تعيينه

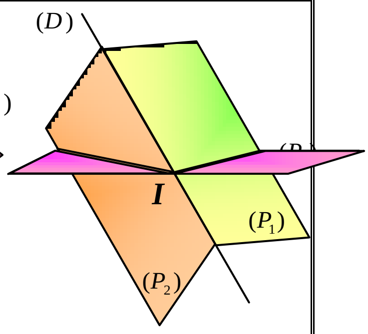
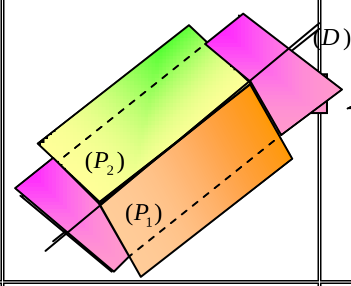
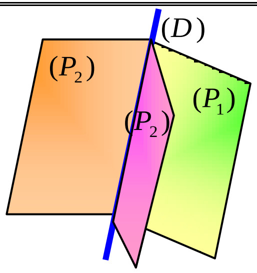
4 تقاطع 3 مستويات

(P_1) ، (P_2) ، (P_3) ثلاث مستويات $\vec{n_1}$ ، $\vec{n_2}$ ، $\vec{n_3}$ أشعة ناظمية لها .

(P_1) ، (P_2) متوازيان

(P_1) ، (P_3) متوازيان	(P_1) ، (P_3) متقاطعان
	
$(P_1)\cap(P_2)\cap(P_3)=\varnothing$	$(P_1)\cap(P_2)\cap(P_3)=\varnothing$

(P_1) ، (P_2) يتقاطعان و تقاطعهما المستقيم (D)

(D) لا يقطع (P_3)	(D) يوازي (P_3)	
	(D) يوازي (P_3) بتقاطع خال	(D) محتوى في (P_3)
		
$(P_1)\cap(P_2)\cap(P_3)=\{I\}$	$(P_1)\cap(P_2)\cap(P_3)=\varnothing$	$(P_1)\cap(P_2)\cap(P_3)=(D)$

تمرين 49 ص 229

بين أن المستويات الثلاثة (P) ، (P') و (P")

تشترك في نقطة وحيدة يطلب تعيينها

$(P) : 2x + 3y - z = -2$

$(P') : 5y - 4z = 1$

$(P") : z = 1$

تطبيق: (P_1) ، (P_2) ، (P_3) ثلاث مستويات معادلاتها الديكارتية على الترتيب :

$2x - y - 2z - 1 = 0$ ، $-x + 4y + z - 3 = 0$ ، $4x - 2y - 4z - 5 = 0$

أدرس الوضعية النسبية لـ :a) (P_1) ، (P_2) b) (P_1) ، (P_3)

الحل: $\vec{n_1}(2;-1;-2)$ ، $\vec{n_2}(-1;4;1)$ ، $\vec{n_3}(4;-2;-4)$

أشعة ناظمية لـ (P_1) ، (P_2) ، (P_3) على الترتيب

a) $\vec{n_1}$ و $\vec{n_2}$ غير مرتبطين خطيا ، إذن (P_1) و (P_2) ليسا متوازيين فهما يتقاطعان على المستقيم (D) .

للحصول على تمثيله الوسيطي نكتب مثلا x و y بدلالة z (z وسيط) $\begin{cases} 2x - y - 2z - 1 = 0 \\ -x + 4y + z - 3 = 0 \end{cases}$ بعد

الحساب نجد $\begin{cases} x = t + 1 \\ y = 1 \\ z = t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$

b) $\vec{n_3} = 2\vec{n_1}$ أي $\vec{n_1}$ و $\vec{n_3}$ مرتبطان خطيا ، إذن (P_1) ، (P_3) متوازيان . نختار نقطة من (P_1) و لتكن

A(0 ; - 1 ; 0) (0+2-0-5=-3 ≠0) ، A ليست نقطة من (P_3) و بالتالي تقاطع (P_1) ، (P_3) خال

تطبيق (2) ت 30ص 228

نعتبر النقط A(2 ; 1 ; 1) ، B(3 ; 0 ; 1) ، C(0 ; 1 ; 5) ، D(-1 ; 0 ; 1) و E(6 ; 2 ; 3)

1) تحقق أن النقط A ، B و C تعرّف مستويا (ABC) يطلب إعطاء معادلة ديكارتية له .

2) عين التمثيل الوسيطي للمستقيم (DE)

3) عين احداثيات النقطة I تقاطع (DE) مع (ABC)

نعتبر النقط A(2 ; 1 ; 1) ، B(3 ; 0 ; 1) ، C(0 ; 1 ; 5) ، D(-1 ; 0 ; 1) و E(6 ; 2 ; 3)

الحل 1. المعادلة الديكارتية للمستوي (ABC)

لدينا $\overrightarrow{AB}(1;-1;0)$ و $\overrightarrow{AC}(-2;0;4)$ و منه الشعاعان غير مرتبطين خطيا فهما يشكلان مستو

ليكن $\vec{n}(a;b;c)$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC) و منه $\begin{cases} a-b=0 \\ -2a+4c=0 \end{cases}$ أي : $a=b=2c$

نضع $c=1$ ومنه $\vec{n}(2;2;1)$

أي معادلة المستوي هي: $2x+2y+z+d=0$

نعوض باحداثيات A نجد: $d=-7$ و منه معادلة المستوي (ABC) هي: $2x+2y+z-7=0$

2. التمثيل الوسيطي للمستقيم (DE):

لدينا: $\overrightarrow{DE}(7;2;2)$ و بالتالي التمثيل الوسيطي للمستقيم (DE) هو:

$$\left(\begin{cases} x=-1+7t \\ y=2t \\ z=1+t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R} \right)$$

3. تعيين احداثيات النقطة I تقاطع (DE) مع (ABC):

بتعويض x,y,z في معادلة (ABC) نجد: $20t-8=0$

أي : $t=\frac{2}{5}$ و منه: $t=\left(9/5;4/5;9/5\right)$

تما رين منزلية: تمرين صفحة 230 رقم 54

تمرين صفحة 231 رقم 57

تمرين محلول 4 :

(P_1) ، (P_2) ، (P_3) ثلاث مستويات التي معادلات ديكارتية لها على الترتيب

$2x-y-2z-1=0$ ، $-x+4y+z-3=0$ ، $4x-2y-4z-5=0$

أدرس الوضعية النسبية لـ

a) (P_1) ، (P_2) b) (P_1) ، (P_3)

الحل:

$\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix}$ ، $\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix}-1\\4\\1\end{pmatrix}$ ، $\overrightarrow{n_3}\begin{pmatrix}4\\-2\\-4\end{pmatrix}$ أشعة ناظمية لـ (P_1) ، (P_2) ، (P_3) على الترتيب

a) $\overrightarrow{n_1}$ و $\overrightarrow{n_2}$ غير مرتبطين خطيا ، إذن (P_1) و (P_2) ليسا متوازين فهما يتقاطعان على المستقيم (D)

.

للحصول على تمثيله الوسيطي نكتب مثلا x و y بدلالة z (وسيط)

$\begin{cases} 2x-y-2z-1=0 \\ -x+4y+z-3=0 \end{cases}$ بعد الحساب نجد $t\in\mathbb{R};\begin{cases} x=t+1 \\ y=1 \\ z=t \end{cases}$

b) $\overrightarrow{n_3}=2\overrightarrow{n_1}$ أي $\overrightarrow{n_1}$ و $\overrightarrow{n_3}$ مرتبطان خطيا ، إذن (P_1) ، (P_3) متوازيان . نختار نقطة من (P_1) و لتكن

$A(0;-1;0)$ ، $(0+2-0-5=-3\neq 0)$ ، A ليست نقطة من (P_3) و بالتالي تقاطع (P_1) ، (P_3) خال

تمرين محلول 5 :

نعتبر المستويات (P_1) ، (P_2) ، (P_3) بالمعادلات ديكارتية على الترتيب

$4x+y+z+10=0$ ، $2x+y+3=0$ ، $2x-y+2z-1=0$

أدرس تقاطع (P_1) ، (P_2) و (P_3)

الحل: $\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix}4\\1\\1\end{pmatrix}$ ، $\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ ، $\overrightarrow{n_3}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$ أشعة ناظمية لـ (P_1) ، (P_2) ، (P_3) على الترتيب

ليست مرتبطة خطيا مثنى مثنى و بالتالي فالمستويات متقاطعة مثنى مثنى وفق مستقيم

تقاطع (P_1) ، (P_2) ، ليكن (D) مستقيم تقاطعهما $\begin{cases}4x+y+z+10=0\\2x+y+3=0\end{cases}$

نضع z = t لنحصل على تمثيلا وسيطيا لـ (D) و هو $\begin{cases}x=t\\y=-3-2t\\z=-7-2t\end{cases};t\in\mathbb{R}$

$\vec{u}(1;-2;-2)$ شعاع توجيه لـ (D) $(\vec{u}.\overrightarrow{n_3}=0)$ إذن (D) يوازي (P_3) . A(0 ; -3 ; -7) نقطة من (D)

$(A\notin(P_3))$ و بالتالي $(P_1)\cap(P_2)\cap(P_3)=\varnothing$

تطبيق:

في الفضاء السابق نعتبر النقط $A(2.1.1)$ ، $B(3,0,1)$ ، $C(1,3,3)$ ، والمستويين

$(p):x-2y+2z-1=0$ و $(Q):x-3y+2z+2=0$

1). اعط تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AB) ,هل يمكن ان نعين مستويا (ABC) من $A;B;C$ ؟

2). بين ان المستوين (p) و (Q) متقاطعان في مستقيم (Δ) يطلب تمثيله الوسيط

3). بين ان النقطة $C(1,3,3)$ تنتمي الى المستقيم (Δ) وان $\vec{u}(2,0,-1)$ شعاع توجيه له

4). استنتج تمثيلا وسيطيا اخرا لـ (Δ)

5). اوجد A' المسقط العمودي لـ $A(2.1.1)$ على (Δ)

6). احسب المسافة A بين و (Δ)

الحل

تمرين 54 ص 230

نعرف في $\mathfrak{R}$ مجموعة الأعداد المركبة ، المعادلة ذات المجهول z :

$(E):z^3-12z^2+48z-128=0$

1) تحقق أن 8 حل للمعادلة ، استنتج الحلين الآخرين

2) $(o;\vec{u};\vec{v})$ معلم متعامد و متجانس في المستوي الموجه

(الوحدة 1cm) . نعتبر النقط A ، B و C ذات اللواحق

$a=2-2i\sqrt{3}$ ، $b=2+2i\sqrt{3}$ و $c=8$ على الترتيب .

a) أحسب طويلة و عمدة لـ a و علّم النقط A ، B و C

b) أحسب العدد المركب $q=\dfrac{a-c}{b-c}$ و عين طويلته وعمدة له . استنتج طبيعة المثلث ABC

c) عين D مرجح الجملة $\{(A;|a|);(B;|b|);(C;|c|)\}$

علّم D .

d) عين (T) مجموعة النقط M حيث

$\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\right\|$

أنشئ (T) .

تمرين 54 ص 230

الفضاء منسوب الى معلم $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$

نعتبر النقط A(3 ; -2 ; 2) ، B(6 ; 1 ; 5)

C(6 ; -2 ; - 1)

I) 1) بين أن المثلث ABC قائم

2) ليكن (P) المستوي الذي معادلته $x+y+z-3=0$

بين أن (P) عمودي على المستقيم (AB) و يمر من النقطة A .

3) ليكن (P') المستوي العمودي على المستقيم (AC) و الذي يشمل A . أكتب معادلة ديكارتية لـ (P')

4) عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (d) مستقيم تقاطع (P) و (P') .

II) 1) لتكن D النقطة ذات الاحداثيات (0 و 4 و 1-) . بين أن المستقيم (AD) عمودي على المستقيم (ABC)

2) أحسب حجم رباعي الوجوه ABDC

3) بين أن قيس الزاوية $\widehat{BDA}$ هو $\frac{\pi}{4}$ راديان

4) أ) أحسب مساحة المثلث BDC

ب) استنتج بعد النقطة A عن المستوي (BDC)