المؤسسة:	المستوى: الثالثة رياضيات
السنة الدراسية:	ميدان التعلم: هندسة
التاريخ:	الوحدة التعلمية: الهندسة في الفضاء
توقيت الحصة :	موضوع الحصة : الاوضاع النسبية لمستوي وسطح كرة

المكتسبات المستهدفة: دراسة تقاطع ثلاث مستويات

الإنجاز (سير الحصة)

الدرس الاول

2/ الوضع النسبي لمستوي وسطح كرة في الفضاء

1: لا يوجد تقاطع

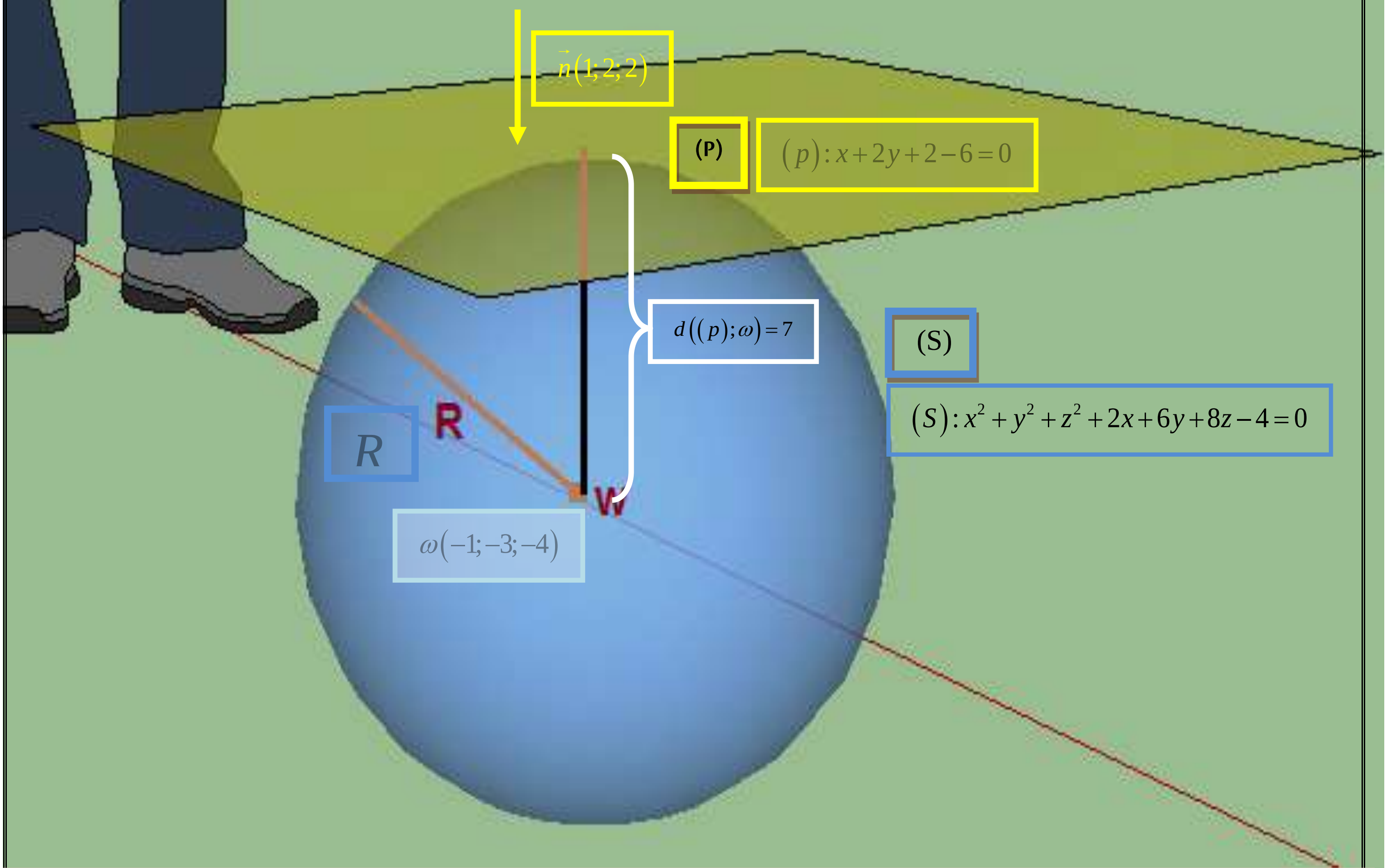
لاحظ المستوي (P) و سطح الكرة (S) لا يشتركان في اي نقطة فهما لا يتقاطعان

يمكن اثبات ذلك فقط بمقارنة R نصف قطر سطح الكرة (S) والبعد بين المركز ω و المستوي (P)

استنتاج نصف قطر سطح الكرة لدينا $(S): x^2+y^2+z^2+2x+6y+8z-4=0$

ومنه $(S):(x^2+2x)+(y^2+6y)+(z^2+8z)-4=0$ ومنه $(S):(x+1)^2+(y+3)^2+(z+4)^2-1-4-16-4=0$

اذن $(S):(x+1)^2+(y+3)^2+(z+4)^2=5^2$ نجد $R=5$



حساب البعد بين ω و المستوي (P) لدينا $d((p);\omega)=\frac{|x_\omega+2y_\omega+2z_\omega-6|}{\sqrt{(1)^2+(2)^2+(2)^2}}$ ومنه $d((p);\omega)=\frac{|1(-1)+2(-3)+2(-4)-6|}{\sqrt{(1)^2+(2)^2+(2)^2}}=\frac{21}{\sqrt{9}}=7$

لاحظ $d((p);\omega)=7$ و $R=5$ يعني ان $d((p);\omega)>R$ المستوي (P) و سطح الكرة (S) لا يشتركان في اي نقطة فهما لا يتقاطعان

نتيجة : $(P)\cap(S)=\Phi$

الدرس الثاني

2: التقاطع نقطة

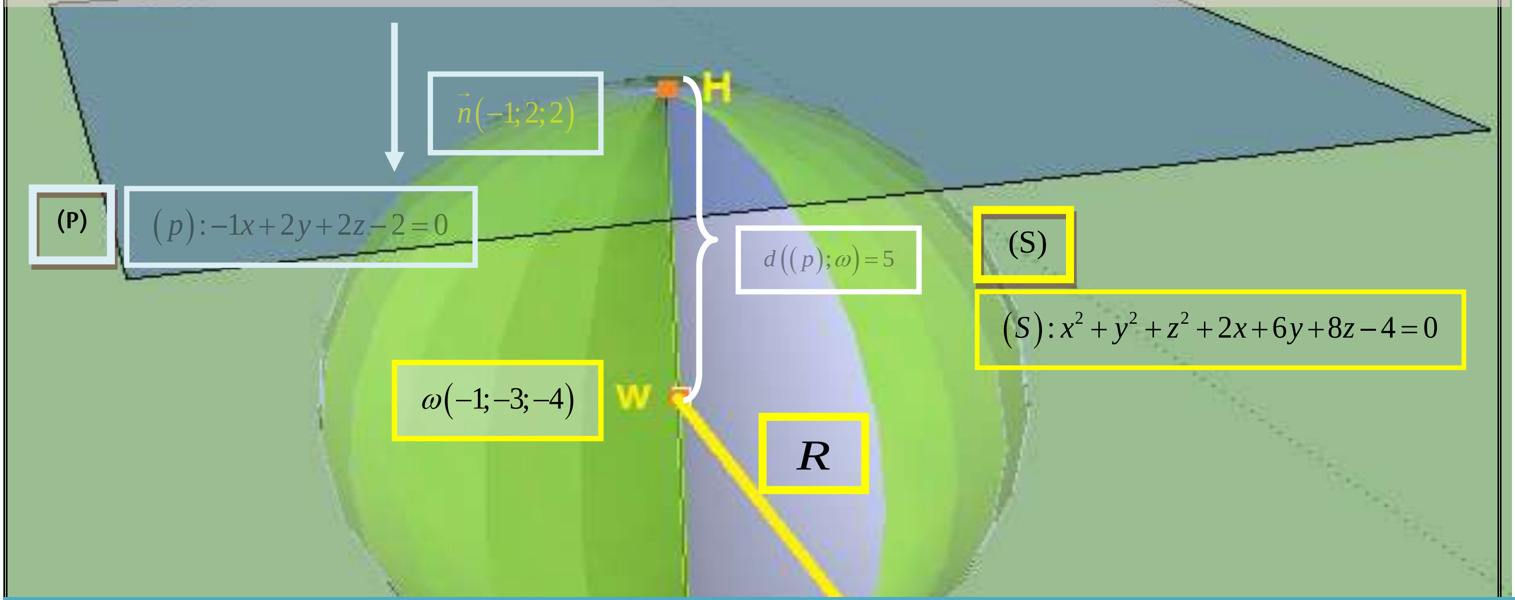
لاحظ المستوي (P) و سطح الكرة (S) يتماسان في نقطة فهما يتقاطعان

يمكن اثبات ذلك فقط بمقارنة R نصف قطر سطح الكرة (S) والبعد بين المركز ω و المستوي (P)

استنتاج نصف قطر سطح الكرة لدينا $(S): x^2+y^2+z^2+2x+6y+8z-4=0$

ومنه $(S):(x^2+2x)+(y^2+6y)+(z^2+8z)-4=0$ ومنه $(S):(x+1)^2+(y+3)^2+(z+4)^2-1-4-16-4=0$

اذن $(S):(x+1)^2+(y+3)^2+(z+4)^2=5^2$ نجد $R=5$



حساب البعد بين ω و المستوي (P) لدينا $d((p);\omega)=\dfrac{|-x_\omega+2y_\omega+2z_\omega-2|}{\sqrt{(1)^2+(2)^2+(2)^2}}$ ومنه $d((p);\omega)=\dfrac{|-1(-1)+2(-3)+2(-4)-2|}{\sqrt{(-1)^2+(2)^2+(2)^2}}=\dfrac{15}{\sqrt{9}}=5$

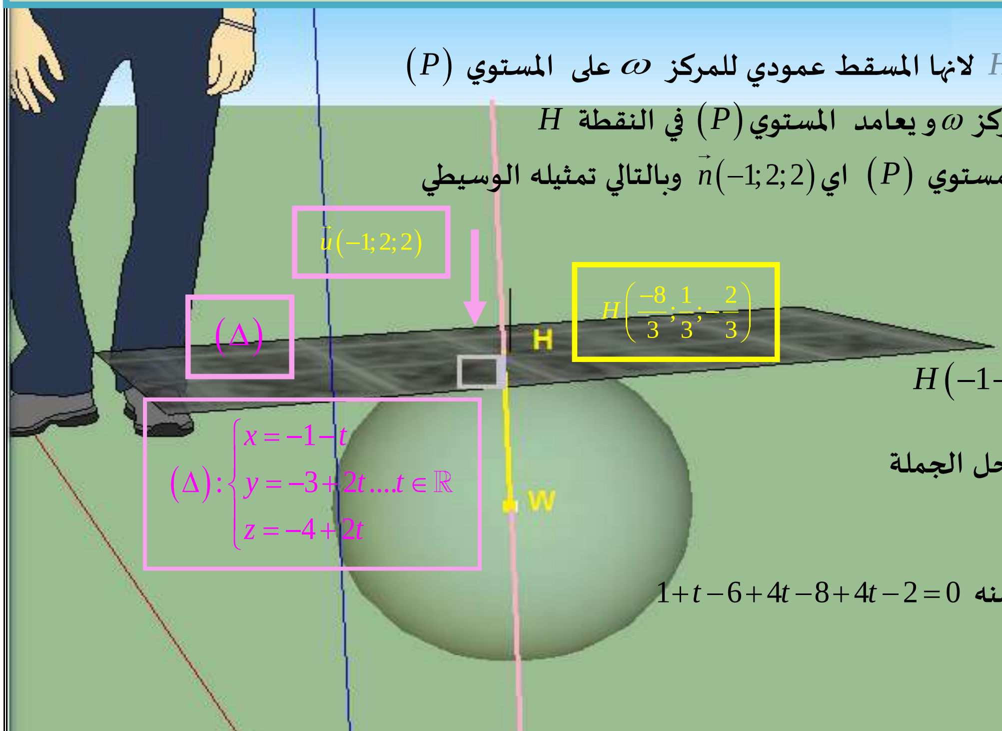
لاحظ $d((p);\omega)=5$ و $R=5$ يعني ان $d((p);\omega)=R$ المستوي (P) و سطح الكرة (S) يشتركان في نقطة H

يمكن ايجاد احداثيات النقطة $H(x;y;z)$ لانها المسقط عمودي للمركز ω على المستوي (P)

ولذلك نحتاج الى مستقيم (Δ) يشمل المركز ω و يعامد المستوي (P) في النقطة H

فيصبح شعاع توجيهه هو شعاع الناظم للمستوي (P) اي $\vec{n}(-1;2;2)$ وبالتالي تمثيله الوسيط

وبالتالي $(\Delta):\begin{cases} x=-1-t \\ y=-3+2t \ ....t\in\mathbb{R} \\ z=-4+2t \end{cases}$



$H\in(\Delta)$ يعني ان $H(-1-t;-3+2t;-4+2t)$

لإيجاد t وبالتالي احداثيات النقطة H نحل الجملة

$(\Delta):\begin{cases} x=-1-t \\ y=-3+2t \\ z=-4+2t \\ (p):-1x+2y+2z-2=0 \end{cases} ....t\in\mathbb{R}$ ومنه $1+t-6+4t-8+4t-2=0$

نجد $t=\dfrac{5}{3}$ ومنه اذن $H\left(\dfrac{-8}{3};\dfrac{1}{3};-\dfrac{2}{3}\right)$

نتيجة : $(P)\cap(S)=H$

الدرس الثالث

3 : التقاطع دائرة

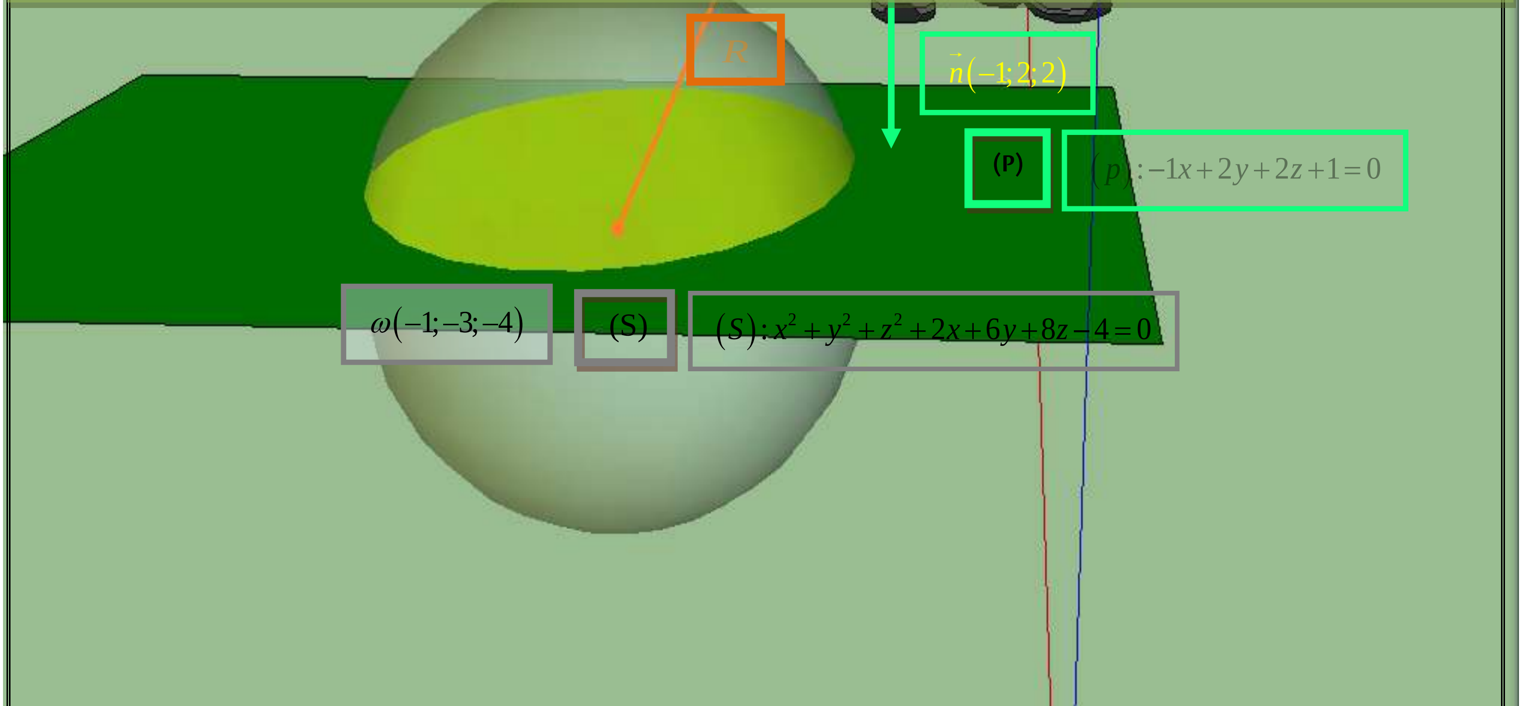
لاحظ المستوي (P) و سطح الكرة (S) يشتركان في دائرة فهما يتقاطعان

يمكن اثبات ذلك فقط بمقارنة R نصف قطر سطح الكرة (S) والبعد بين المركز ω و المستوي (P)

استنتاج نصف قطر سطح الكرة لدينا $(S): x^2+y^2+z^2+2x+6y+8z-4=0$

ومنه $(S):(x^2+2x)+(y^2+6y)+(z^2+8z)-4=0$ ومنه $(S):(x+1)^2+(y+3)^2+(z+4)^2-1-4-16-4=0$

اذن $(S):(x+1)^2+(y+3)^2+(z+4)^2=5^2$ نجد $R=5$



حساب البعد بين ω و المستوي (P) لدينا

$$d((p);\omega)=\frac{|-x_\omega+2y_\omega+2z_\omega+1|}{\sqrt{(1)^2+(2)^2+(2)^2}}$$

ومنه $d((p);\omega)=\dfrac{|-1(-1)+2(-3)+2(-4)+1|}{\sqrt{(-1)^2+(2)^2+(2)^2}}=\dfrac{12}{\sqrt{9}}=4$

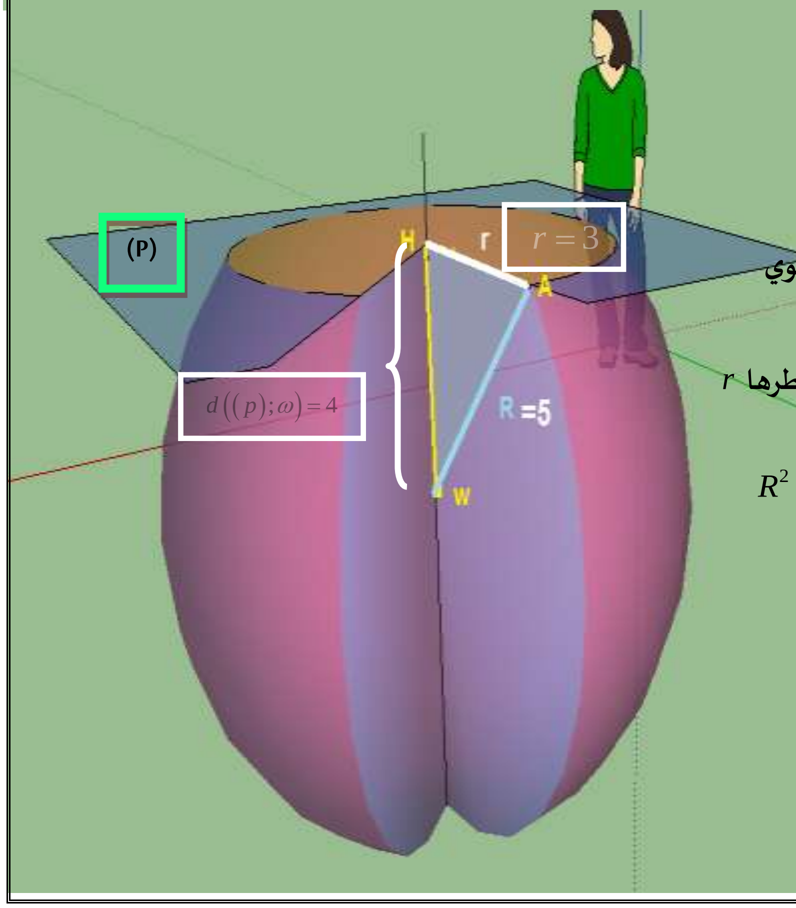
لاحظ $d((p);\omega)=4$ و $R=5$ يعني ان $d((p);\omega)<R$ المستوي (P) و سطح الكرة (S) يشتركان في دائرة نسميها (C)

معادلتها $(C):(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$ نصف قطرها r

ومركزها H يمكن ايجاد نصف القطر انطلاق من تطبيق نظرية

فيثاغورث في المثلث القائم في H وهو ωHA اي ان $R^2=r^2+d^2$

ومنه $r=\sqrt{R^2-d^2}$ نجد $r=\sqrt{25-16}=3$



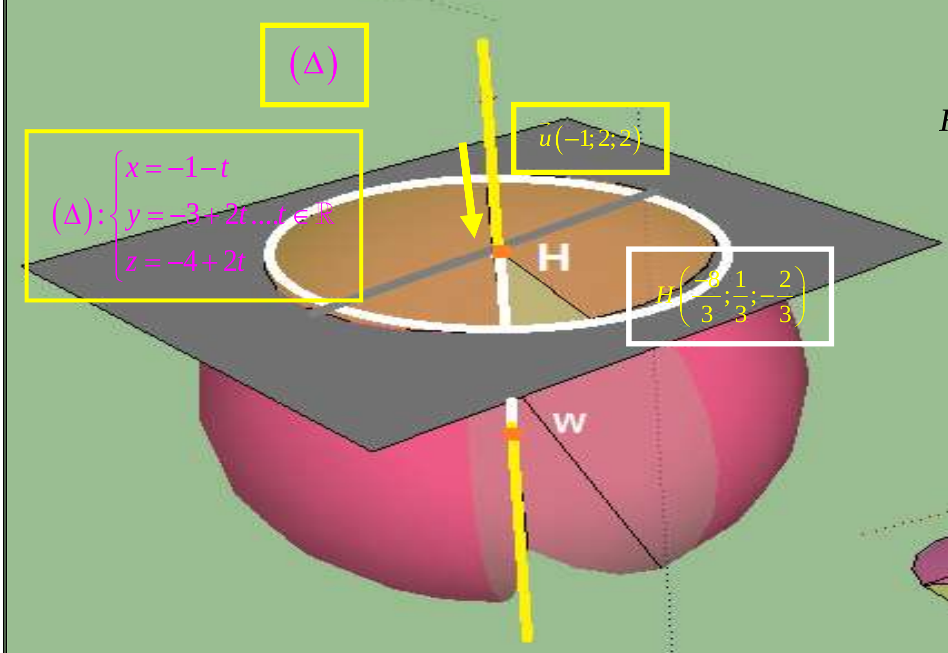
يمكن ايجاد احداثيات النقطة $H(a;b;c)$ لأنها المسقط العمودي للمركز ω على المستوي (P)

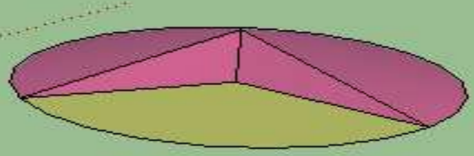
ولذلك نحتاج الى مستقيم (Δ) يشمل المركز ω و يعامد المستوي (P) في النقطة H

فيصبح شعاع توجيهه هو شعاع الناظم للمستوي (P) اي $\vec{n}(-1;2;2)$ وبالتالي تمثيله الوسيطي

$$(\Delta):\begin{cases} x=-1-t \\ y=-3+2t \ldots t\in\mathbb{R} \\ z=-4+2t \end{cases}$$ وبالتالي

$H\in(\Delta)$ يعني ان $H(-1-t;-3+2t;-4+2t)$

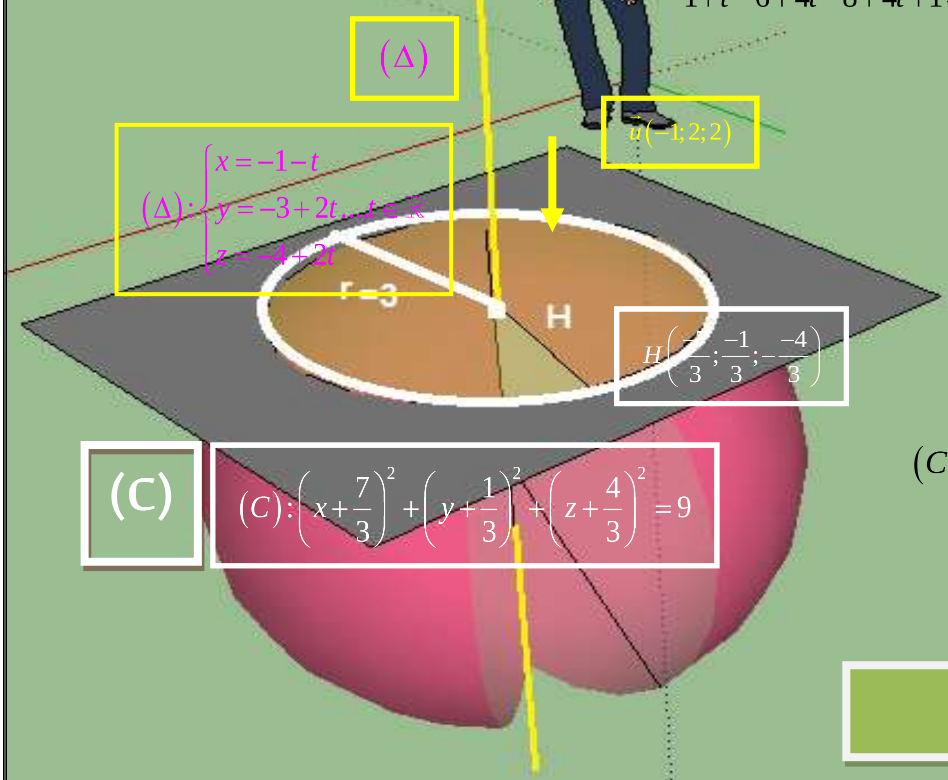




لإيجاد t وبالتالي احداثيات النقطة H نحل الجملة

$$(\Delta):\begin{cases} x=-1-t \\ y=-3+2t \\ z=-4+2t \\ (p):-1x+2y+2z+1=0 \end{cases} \quad \ldots t\in\mathbb{R}$$ ومنه $1+t-6+4t-8+4t+1=0$

نجد $t=\frac{4}{3}$ ومنه اذن $H\left(\frac{-7}{3};\frac{-1}{3};-\frac{-4}{3}\right)$



وفي الاخير بما ان $H\left(\frac{-7}{3};\frac{-1}{3};-\frac{-4}{3}\right)$ و $r=3$

فان $(C):\left(x+\frac{7}{3}\right)^2+\left(y+\frac{1}{3}\right)^2+\left(z+\frac{4}{3}\right)^2=9$

نتيجة : $(P)\cap(S)=(C)$