👍 آخر التدريبات ☹☺ لبدا الوريا 2017 ❀❀

👍 تمرين في الحساب

α_n عدد طبيعي معرف من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $\alpha_n = 2^{n+1} + 1$

1) تحقق من أنَ : $\alpha_{n+1} = 2\alpha_n - 1$ ثمَ أستنتج أنَ العددين α_n و α_{n+1}أوليان فيما بيهما .

2) نعتبر العدد β_n المعرف كما يلي : $\beta_n - 2\alpha_n = 3$

أ) عين القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين α_n و β_n.

ب) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على العدد 3 .

ج) عين قيم العدد الطبيعي n التي تحقق : $\beta_n \equiv 0[3]$.

د) إستنتج قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون α_n و β_n أوليين فيما بينهما .

حل التمرين التدريبي رقم 01 :

1) التحقق من أنَ : $\alpha_{n+1}=2\alpha_n-1$ ثمَ أستنتاج أنَ العددين α_n و α_{n+1} أوليان فيما بينهما :

لدينا : $\alpha_{n+1}=2^{n+1+1}+1=2^{n+2}+1$

ولدينا $2\alpha_n-1=2\left(2^{n+1}+1\right)-1=2\times 2^{n+1}+2-1=2^{n+2}+1=\alpha_{n+1}$ أي $\alpha_{n+1}=2\alpha_n-1$

إستنتاج أنَ العددين α_n و α_{n+1} أوليان فيما بينهما:

لدينا : $\alpha_{n+1}=2\alpha_n-1$ ومنه $2\alpha_n-\alpha_{n+1}=1$

إذن $-\alpha_{n+1}+2\alpha_n=1$ وبالتالي توجد ثنائية صحيحة $(-1;2)$ تحقق $(-1)\alpha_{n+1}+2\alpha_n=1$

حسب مبرهنة بيزو فإنَ : α_n و α_{n+1} أوليان فيما بينهما

2) لدينا : $\beta_n-2\alpha_n=3$

أ) تعيين القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين α_n و β_n:

نضع : $d=PGCD\left(\alpha_n;\beta_n\right)$

لدينا : d/α_n و d/β_n ومنه $d/\left(\beta_n-2\alpha_n\right)$

ومنه $d/3$ أي $d\in D_3=\{1;3\}$

ب) دراسة بواقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على العدد 3 حسب قيم العدد الطبيعي n:

لدينا: $2^0\equiv 1[3]$ $2^1\equiv 2[3]$ $2^2\equiv 1[3]$

بواقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على العدد 3 تشكل متتالية دورية دورها p=2

من أجل كل عدد طبيعي k لدينا :

قيم العدد الطبيعي n	n=2k	n=2k+1
باقي قسمة 2^n على 3	1	2

ج) تعيين قيم العدد الطبيعي n التي تحقق : $\beta_n\equiv 0[3]$:

$\beta_n\equiv 0[3]$ يعني $2\alpha_n+3\equiv 0[3]$ لأنَ $\beta_n=2\alpha_n+3$

ومنه $2\left(2^{n+1}+1\right)+3\equiv 0[3]$ أي $2\times 2^{n+1}+2\equiv 0[3]$

ومنه : $4\times 2^n\equiv -2[3]$ وبالتالي $2^n\equiv 1[3]$

ومنه : $n=2k\quad;(k\in\mathbb{N})$

د) إستنتاج قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون α_n و β_n أوليين فيما بينهما :

α_n أولي مع β_n يعني $PGCD(\alpha_n;\beta_n)=1$

وبالتالي $n=2k+1 \quad ;(k\in\mathbb{N})$

لأنَ $PGCD(\alpha_n;\beta_n)=3$ إذا كان $n=2k \quad ;(k\in\mathbb{N})$

✌ بالتوفيق والنجاح في البكالوريا 2017 ☺ الأستاذ ثابت إبراهيم