تمرين في الهندسة الفضائية

في الفضاء المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس المباشر $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، نعتبر النقط $A(3;1;0), B(1;2;0), C(3;2;1)$ و $D(0;0;m)$ حيث m عدد حقيقي موجب .

1) أ) أحسب الجداء السلمي $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ ثم استنتج القيمتين المضبوطتين لكل من $\cos\widehat{ABC}$ و $\sin\widehat{ABC}$.

ب)أحسب مساحة المثلث ABC.

2) بين أن الشعاع $\vec{n}(1;2;-2)$ ناظمي للمستوي (ABC)ثم استنتج معادلة ديكارتية له .

3) بين أن $ABCD$ رباعي وجوه وأن حجمه $V_{ABCD}=\dfrac{2m+5}{6}$.

4) لتكن (S_m)مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء والتي تحقق: $x^2+y^2+z^2-2mz+m^2-9=0$.

أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب m فإن (S_m) سطح كرة يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها .

ب)عين قيمة m حتى يكون (ABC) مستوي مماس لسطح الكرة(S_m).

ج)أكتب معادلة للمستوي (P)الموازي تماما للمستوي (ABC)ويمس (S_m).

حل التمرين التدريبي 3

لدينا : $A(3;1;0), B(1;2;0), C(3;2;1)$ و $D(0;0;m)$ حيث m عدد حقيقي موجب

1) أ) حساب الجداء السلمي $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$:

لدينا : $\overrightarrow{BA}(2;-1;0)$ ، $\overrightarrow{BC}(2;0;1)$

إذن : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=2\times 2+(-1)\times 0+1\times 0=4$

$$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=4 \text{ أي}$$

استنتاج القيمتين المضبوطتين لكل من $\cos\widehat{ABC}$ و $\sin\widehat{ABC}$:

لدينا : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=BA\times BC\times\cos\widehat{ABC}$

و لدينا : $BA=\sqrt{(2)^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$ و $BC=\sqrt{(2)^2+(1)^2}=\sqrt{5}$

ومنه : $4=\sqrt{5}\times\sqrt{5}\times\cos\widehat{ABC}$ أي $\cos\widehat{ABC}=\frac{4}{5}$

ولدينا كذلك : $\cos^2\widehat{ABC}+\sin^2\widehat{ABC}=1$ أي $\frac{16}{25}+\sin^2\widehat{ABC}=1$

ومنه $\sin^2\widehat{ABC}=1-\frac{16}{25}=\frac{9}{25}$ وبالتالي $\sin\widehat{ABC}=\frac{3}{5}$

$$\text{إذن } \cos\widehat{ABC}=\frac{4}{5} \text{ و } \sin\widehat{ABC}=\frac{3}{5}$$

ب) حساب مساحة المثلث ABC:

لدينا : $S_{ABC}=\frac{1}{2}BA\times BC\times\sin\widehat{BAC}=\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times\sqrt{5}\times\frac{3}{5}=\frac{3}{2}$

$$\text{إذن } S_{ABC}=\frac{3}{2}us$$

2) تبيان أن الشعاع $\vec{n}(1;2;-2)$ ناظمي للمستوي (ABC):

لدينا : $\begin{cases}\vec{n}.\overrightarrow{BA}=1\times 2+2\times(-1)+(-2)\times 0=2-2=0\\ \vec{n}.\overrightarrow{BC}=1\times 2+2\times(0)+(-2)\times 1=2-2=0\end{cases}$

ومنه $\vec{n}(1;2;-2)$ ناظمي للمستوي (ABC)

■ **تعيين معادلة ديكارتية للمستوي (ABC):**

$\vec{n}(1;2;-2)$ ناظمي للمستوي (ABC) ومنه معادلة للمستوي (ABC) من الشكل :

$x+2y-2z+d=0$

لتعيين قيمة d نعوض باحداثيات النقطة $B(1;2;0)$ في المعادلة نجد :

$1+2\times 2-2\times 0+d=0$ أي $d=-5$

إذن معادلة للمستوي (ABC): $x+2y-2z-5=0$

3)تبيان أن $ABCD$ رباعي وجوه:

■ لدينا : $d\left(D;(ABC)\right)=\dfrac{|0+2(0)-2m-5|}{\sqrt{(1)^2+(2)^2+(-2)^2}}=\dfrac{|-2m-5|}{\sqrt{9}}=\dfrac{|2m+5|}{3}$

أي $d\left(D;(ABC)\right)=\dfrac{2m+5}{3}$ لان m عدد حقيقي موجب

ومنه $d\left(D;(ABC)\right)\neq 0$ أي أن $ABCD$ رباعي وجوه

■ **تبيان أن حجمه $V_{ABCD}=\dfrac{2m+5}{6}$:**

لدينا : $V_{ABCD}=\dfrac{1}{3}\times S_{ABC}\times h=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{3}{2}\times\dfrac{2m+5}{3}=\dfrac{2m+5}{6}$

أي $V_{ABCD}=\dfrac{2m+5}{6}\ uv$

4) لتكن (S_m) مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء والتي تحقق: $x^2+y^2+z^2-2mz+m^2-9=0$.

أ) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب m فإن (S_m) سطح كرة :

لدينا : $x^2+y^2+z^2-2mz+m^2-9=0$ يكافئ $x^2+y^2+(z-m)^2-m^2+m^2-9=0$

ومنه : $x^2+y^2+(z-m)^2=9$

ومنه (S_m) سطح كرة مركزها النقطة $D(0;0;m)$ ونصف قطرها $R=3$

ب)تعيين قيمة m حتى يكون (ABC) مستوي مماس لسطح الكرة (S_m):

(ABC) مماس لسطح الكرة (S_m) يعني $d(D,(ABC))=3$

ومنه $\frac{2m+5}{3}=3$ لان $d(D;(ABC))=\frac{2m+5}{3}$

أي $2m+5=9$ ومنه $2m=4$

وبالتالي $m=2$

قيمة m حتى يكون (ABC) مستوي مماس لسطح الكرة (S_m) هي $m=2$

ج)كتابة معادلة للمستوي (P)الموازي تماما للمستوي (ABC)ويمس (S_m):

(ABC) مستوي مماس لسطح الكرة (S_2) التي مركزها $D(0;0;2)$

معادلة للمستوي (P) من الشكل $x+2y-2z+d'=0$

(P)مستوي مماس لـ (S_2) يعني $\frac{|-4+d'|}{3}=3$

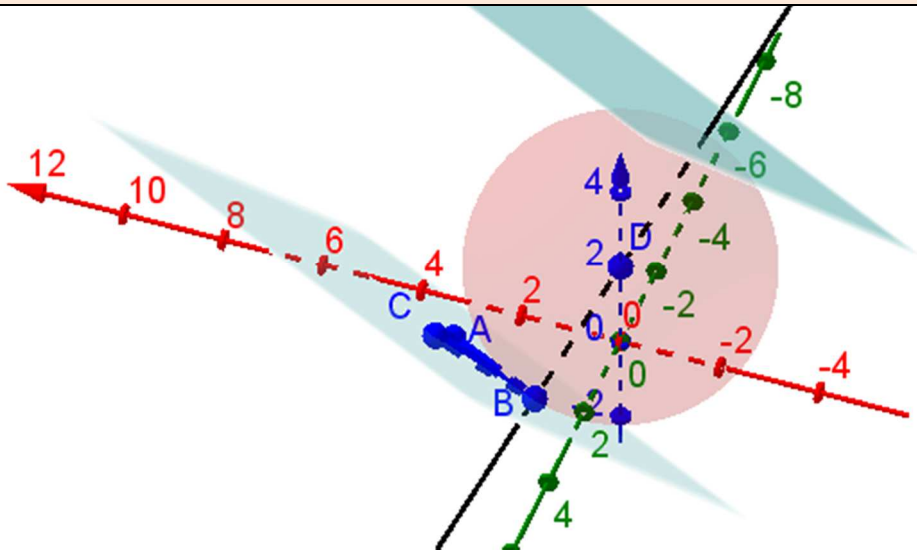
ومنه $|-4+d'|=9$

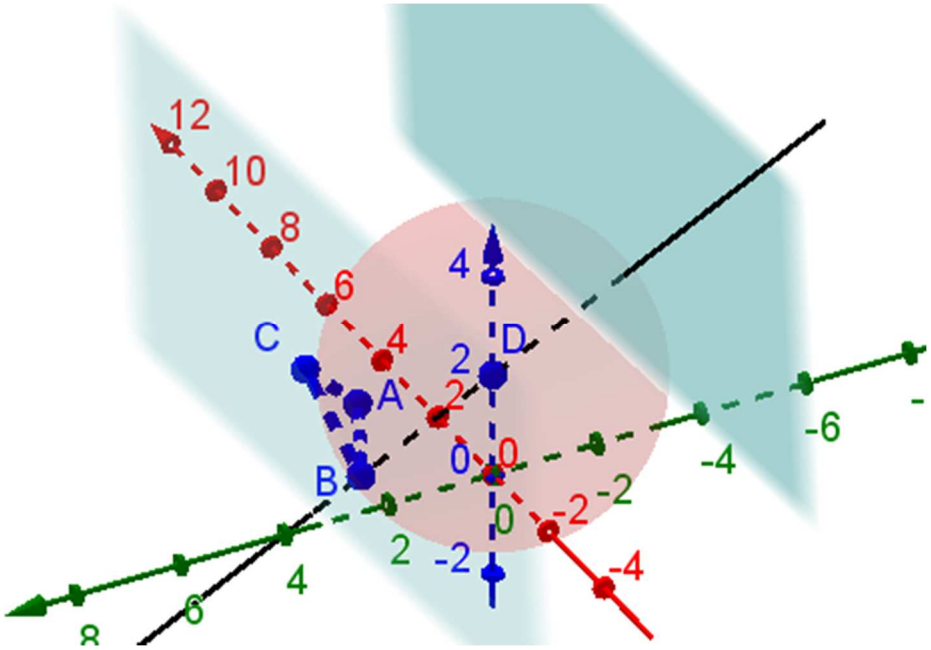
إما $d'-4=9$ ومنه $d'=13$

أو $d'-4=-9$ ومنه $d'=-5$

معادلة للمستوي (P) هي $x+2y-2z+13=0$

المستوي الآخر هو المستوي (ABC) معادلته هي $x+2y-2z-5=0$





إنتهى تصحيح التمرين التدريبي الثالث

بالتوفيق والنجاح في البكالوريا الأستاذ ثابت إبراهيم