تمرين في المتتاليات العددية

(u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_0 و أساسها r غير معدوم .

الحدود u_7 ,u_4 و u_2 بهذا الترتيب هي حدود متتابعة من متتالية هندسية أساسها α.

1) برهن أنَّ : $u_0 = 2r$ و $\alpha = \frac{2}{3}$.

2) نضع $u_2 = 2$.

أ) أحسب الأساس r للمتتالية الحسابية (u_n) وحدُّها الأَول.

ب) أكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n .

ج) أحسب بدلالة n المجموع : $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$.

3) نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة على المجموعة $\mathbb{N}$ بما يلي : $v_n = \frac{9}{2}\left(\frac{4}{9}\right)^n$

بيِّن أنَّ المتتالية (v_n) هندسية ، تحقق من انَّ أساسها α وحدها الأول u_7.

حل التمرين التدريبي 06

لدينا : (u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_0 و أساسها r غير معدوم .

الحدود u_7 ، u_4 و u_2 بهذا الترتيب هي حدود متتابعة من متتالية هندسية أساسها α.

1) البرهان أنّ : $u_0 = 2r$ و $\alpha = \frac{2}{3}$:

u_7 ، u_4 و u_2 بهذا الترتيب هي حدود متتابعة من متتالية هندسية يعني $u_4^2 = u_7 \times u_2$

ولدينا : $\begin{cases} u_7 = u_0 + 7r \\ u_4 = u_0 + 4r \\ u_2 = u_0 + 2r \end{cases}$

لأن الحدود u_7 ، u_4 و u_2 هي حدود من متتالية حسابية حدها الأول u_0 و أساسها r.

$u_4^2 = u_7 \times u_2$ يكافئ $(u_0 + 4r)^2 = (u_0 + 7r) \times (u_0 + 2r)$

يكافئ $u_0^2 + 8r \times u_0 + 16r^2 = u_0^2 + 9r \times u_0 + 14r^2$

يكافئ $8r \times u_0 + 16r^2 - 9r \times u_0 - 14r^2 = 0$

ومنه $2r^2 - r \times u_0 = 0$ أي $r(2r - u_0) = 0$

وبما أنّ $r \neq 0$ فإنّ $2r - u_0 = 0$

وبالتالي $u_0 = 2r$

البرهان أنّ $\alpha = \frac{2}{3}$:

لدينا : u_7 ، u_4 و u_2 بهذا الترتيب هي حدود متتابعة من متتالية هندسية أساسها α

يعني $\alpha = \frac{u_4}{u_7} = \frac{u_0 + 4r}{u_0 + 7r} = \frac{2r + 4r}{2r + 7r} = \frac{6r}{9r}$

ومنه : $\alpha = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

إذن $\alpha = \frac{2}{3}$

2) لدينا : $u_2 = 2$

أ) تعيين الأساس r :

لدينا : $u_2 = \underbrace{u_0}_{=2r} + 2r = 2r + 2r = 4r$

ولدينا : $u_2 = 2$ يعني $4r = 2$ ومنه $r = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

إذن أساس المتتالية الحسابية $r = \frac{1}{2}$

حساب حدها الأول u_0:

لدينا : $u_0 = 2r = 2 \times \frac{1}{2} = 1$

الحد الأول $u_0 = 1$

ب) التعبير عن الحد العام u_n بدلالة n :

$$u_n = u_0 + nr = 1 + \frac{1}{2}n$$

عبارة الحد العام $u_n = \frac{1}{2}n + 1$

ج) حساب بدلالة n المجموع : $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$:

$$S_n = \frac{n+1}{2}(u_0 + u_n) = \frac{1}{2}(n+1)\left(1 + 1 + \frac{1}{2}n\right)$$

$$S_n = \frac{1}{2}(n+1)\left(\frac{n+4}{2}\right) = \frac{1}{4}(n+1)(n+4)$$

أي $S_n = \frac{1}{4}(n+1)(n+4)$

3) نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة على المجموعة $\mathbb{N}$ بما يلي : $v_n = \frac{9}{2}\left(\frac{4}{9}\right)^n$

تبيان أنَّ المتتالية (v_n) هندسية :

$$v_{n+1} = \frac{9}{2}\left(\frac{4}{9}\right)^{n+1} = \frac{9}{2} \times \frac{4}{9}\left(\frac{4}{9}\right)^n$$

أي $v_{n+1} = \frac{4}{9}\left[\frac{9}{2} \times \left(\frac{4}{9}\right)^n\right] = \frac{2}{3}v_n$

إذن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = \alpha = \frac{2}{3}$

وحدها الأول $v_0 = \frac{9}{2}\left(\frac{4}{9}\right)^0 = \frac{9}{2}$

التحقق من انَّ أساسها α:

لدينا : $q=\alpha=\frac{2}{3}$

التحقق من أنَّ حدُها الأول u_7:

$$u_7=u_0+7r=2r+7r=9r=9\times\frac{1}{2}=\frac{9}{2}$$

إذن المتتالية الهندسية (v_n) أساسها $\alpha=\frac{2}{3}$ وحدها الأول $u_7=\frac{9}{2}$

مع تمنياتي الخالصة بالنجاح بإمتياز لبناتنا وأبنائنا

في البكالوريا 2017

الأستاذ ثابت إبراهيم