

العلامة	التصحيح
	التمرين الأول :
	(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} المعادلة ذات المجهول المركب z التالية : $z^2 - 8z + 17 = 0$
0.5 + 2 × 0.25	<ul style="list-style-type: none"> • حل المعادلة : $z^2 - 8z + 17 = 0$ - حساب المميز Δ : $\Delta = (-8)^2 - 4(1) \times (17) = -4$ أي $\Delta = (2i)^2$ - المعادلة تقبل حلين هما : $z_2 = \frac{8+2i}{2} = 4+i$ ، $z_1 = \frac{8-2i}{2} = 4-i$ مجموعة الحلول : $S = \{4-i; 4+i\}$
	(2) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس المباشر (O, \vec{u}, \vec{v}) نعتبر النقط D, B, A التي لواحقها على الترتيب $a = 4-i$ و $b = 4+i$ و $d = -i$. و ليكن R الدوران الذي مركزه النقطة Ω ذات اللاحقة $\omega = 2$ و زاويته $\frac{\pi}{2}$ (أ) بين أن العبارة المركبة للدوران R من الشكل : $z' = iz + 2 - 2i$.
0.75	<ul style="list-style-type: none"> • تبيان أن العبارة المركبة للدوران R من الشكل : $z' = iz + 2 - 2i$ - العبارة المركبة للدوران R من الشكل : $z' - \omega = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - \omega)$ أي $z' - 2 = i(z - 2)$ ومنه $z' = i(z - 2) + 2 = iz + 2 - 2i$ إذن $z' = iz + 2 - 2i$
	(ب) تحقق أن لاحقة النقطة C صورة النقطة B بالدوران R هي $c = 1 + 2i$
0.25	<ul style="list-style-type: none"> • التحقق أن لاحقة النقطة C صورة النقطة B بالدوران R هي $c = 1 + 2i$ • لدينا : $R(B) = C$ يعني $c = i \times b + 2 - 2i = i(4+i) + 2 - 2i = 4i - 1 + 2 - 2i = 1 + 2i$ $c = 1 + 2i$
	(ج) بين أن : $\frac{c-d}{c-b} = -i$ ثم أستنتج طبيعة المثلث BCD .
0.5	<ul style="list-style-type: none"> • تبيان أن $\frac{c-d}{c-b} = -i$ - لدينا : $\frac{c-d}{c-b} = \frac{1+2i - (-i)}{1+2i - (4+i)} = \frac{1+3i}{-3+i} = \frac{(1+3i)(-3-i)}{(-3+i)(-3-i)}$ ومنه $\frac{c-d}{c-b} = \frac{-3-i-9i+3}{9+1} = \frac{-10i}{10} = -i$

• استنتاج طبيعة المثلث BCD :

0.25 + 0.25

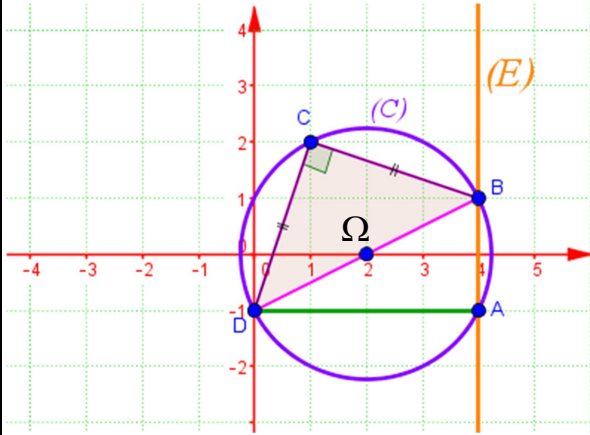
- لدينا : $\left| \frac{c-d}{c-b} \right| = |-i| = 1$ ولدينا $\arg\left(\frac{c-d}{c-b}\right) = \arg(-i) = -\frac{\pi}{2}$

- يعني $\frac{DC}{BC} = 1$ أي $DC = BC$ و $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{DC}) = -\frac{\pi}{2}$ أي $\overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{DC}$

إذن المثلث BCD قائم في C ومتساوي الساقين

(د) بين أن النقط A, B, C و D تنتمي الى نفس الدائرة يطلب تعيين مركزها نصف قطرها

0.5



• تبيان أن النقط A, B, C و D تنتمي الى نفس الدائرة :

المثلث BCD قائم في C وبالتالي النقط D, C, B تنتمي الى دائرة مركزها منتصف الوتر أي Ω .
ولدينا :

$$\Omega A = |z_A - z_\Omega| = |4 - i - 2| = |2 - i|$$

$$\Omega A = \sqrt{5}$$

0.5

إذن : $\Omega A = \Omega B = \Omega C = \Omega D = \sqrt{5}$

ومنه النقط A, B, C و D تنتمي الى نفس الدائرة

مركزها $\Omega(2; 0)$ ونصف قطرها $R = \sqrt{5}$.

(ه) عين مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z بحيث يكون ،

$$|-i - z|^2 - |4 - i - z|^2 = 16$$

• تعيين مجموعة النقط (E) من المستوي والتي تحقق : $|-i - z|^2 - |4 - i - z|^2 = 16$:

$$MD^2 - MA^2 = 16 \text{ يعني } |-i - z|^2 - |4 - i - z|^2 = 16$$

ولتكن النقطة I منتصف القطعة [DA]

$$\text{إذن لدينا : } (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{ID})^2 - (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 = 16$$

$$\text{أي } \overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{ID}^2 - \overrightarrow{MI}^2 - 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IA}^2 = 16$$

$$\text{ومنه } 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{ID} - 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA} = 16 \text{ لأن } \overrightarrow{ID} = \overrightarrow{IA} \text{ (I منتصف القطعة [DA])}$$

$$\text{وبالتالي : } 2\overrightarrow{MI} \cdot (\overrightarrow{ID} - \overrightarrow{IA}) = 16 \text{ أي } 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{AD} = 16$$

$$\text{إذن : } \overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{DA} = 8$$

لتكن H المسقط العمودي للنقطة M على (DA) حيث $\overrightarrow{IH} \cdot \overrightarrow{DA} = 8$

$$\text{أي } \overrightarrow{IH} \times \overrightarrow{DA} = 8$$

- ولدينا : $DA = |z_A - z_D| = |4 - i + i| = |4| = 4$ وبالتالي $IH = 2$

- وبالتالي H منطبقة على النقطة A.

$$\text{إذن } \overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{DA} = 8 \text{ يعني } (\overrightarrow{IH} + \overrightarrow{HM}) \cdot \overrightarrow{DA} = 8$$

$$\text{ومنه } \overrightarrow{IH} \cdot \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{HM} \cdot \overrightarrow{DA} = 8 \text{ أي } 8 + \overrightarrow{HM} \cdot \overrightarrow{DA} = 8$$

$$\text{وبالتالي } \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{DA} = 0 \text{ (لأن } H = A \text{)}$$

المجموعة (E) هي المستقيم العمودي على (DA) و المار من A أي

01

$$(E) = (AB)$$

أوبطريقة أخرى :

$$|-i-x-iy|^2 - |4-i-x-iy|^2 = 16 \text{ يعني } |-i-z|^2 - |4-i-z|^2 = 16$$

$$|-x+i(-1-y)|^2 - |4-x+(-1-y)|^2 = 16 \text{ ومنه :}$$

$$\text{أي } (-x)^2 + (-1-y)^2 - (4-x)^2 - (-1-y)^2 = 16 \text{ ومنه}$$

$$x^2 - 16 + 8x - x^2 = 16$$

$$8x = 32 \text{ ومنه :}$$

وبالتالي : $x = 4$ المجموعة (E) هي المستقيم ذي المعادلة $x = 4$ العمودي على

$(x'x)$ والمار من النقطة A

التمرين الثاني :

في الفضاء المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نعتبر النقطتين $I(3, -1, 0), A(2, 1, 1)$ و مجموعة النقط $M(x, y, z)$ من الفضاء التي تحقق،

$$MA^2 - \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MI} = 0$$

(1) أ) بين أن النقطة A تنتمي الى المجموعة (P).

• تبيان أن النقطة A تنتمي الى المجموعة (P) :

$$- \text{ لدينا : } AA^2 - \overrightarrow{AA} \cdot \overrightarrow{AI} = 0 \text{ ومنه } A \in (P)$$

0.5

(ب) بين أن المجموعة (P) هي مستو $x - 2y - z + 1 = 0$ معادلة ديكارتية له.

• تبيان أن المجموعة (P) هي مستو $x - 2y - z + 1 = 0$ معادلة ديكارتية له:

$$- \text{ لدينا : } MA^2 - \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MI} = 0 \text{ يعني } \overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MI} = 0$$

$$\text{ومنه } \overrightarrow{MA} \cdot (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MI}) = 0 \text{ أي } \overrightarrow{MA} \cdot (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{IM}) = 0$$

$$\text{وبالتالي } \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{IA} = 0 \text{ أي } \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AI} = 0$$

المجموعة (P) هي مستو \overrightarrow{IA} شعاع ناظمي له و يمر من النقطة A

- تعيين معادلة ديكارتية للمستوي (P) :

$$\text{لدينا : } \overrightarrow{AI}(1; -2; -1)$$

$$\text{معادلة (P) من الشكل } x - 2y - z + d = 0$$

- تعيين قيمة d : نعوض بإحداثيات النقطة A نجد : $2 - 2(1) - 1 + d = 0$

$$\text{ومنه } d = 1 \text{ أي معادلة (P) هي } x - 2y - z + 1 = 0$$

0.5

(2) لتكن (S) سطح كرة مركزها النقطة I وتمر من النقطة A .

تحقق أن نصف قطر سطح الكرة (S) هو $R = \sqrt{6}$ ثم عين معادلة ديكارتية لسطح الكرة (S)

0.5

• التحقق أن نصف قطر (S) هو $R = \sqrt{6}$:

- لدينا : $R = AI = \sqrt{(1)^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$.

- تعيين معادلة ديكارتية لسطح الكرة (S) :

0.5

$$(x-3)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 6$$

(3) ليكن (P') المستوي ذي المعادلة $2x - y + z - 4 = 0$.

أ) بين أن (P') يقطع (S) وفق دائرة (C) يطلب تعيين مركزها H ونصف قطرها r .

0.25

• تبين أن (P') قطع (S) وفق دائرة (C) :

- لدينا : $d(I, (P')) = \frac{|2(3) - (-1) + 0 - 4|}{\sqrt{(2)^2 + (-1)^2 + (1)^2}} = \frac{|3|}{\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

أي لدينا : $d(I, (P')) < R$ ومنه (P') قطع (S) وفق دائرة (C)

• تعيين مركز الدائرة (C) ونصف قطرها :

- تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ) المار من I مركز سطح الكرة (S) والعمودي على (P') :

$$(\Delta): \begin{cases} x = 2t + 3 \\ y = -t - 1; (t \in \mathbb{R}) \\ z = t \end{cases}$$

0.75

- تعيين نقطة تقاطع المستقيم (Δ) مع المستوي (P') :

$$\begin{cases} x = 2t + 3 \\ y = -t - 1 \\ z = t \end{cases} \quad \text{نحل لجملة :} \quad \begin{cases} 2x - y + z - 4 = 0 \end{cases}$$

إذن : $6t + 3 = 0$ ومنه $2(2t + 3) - (-t - 1) + t - 4 = 0$

$$H\left(2; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right) \text{ أي } \begin{cases} x=2 \\ y=-\frac{1}{2} \\ z=-\frac{1}{2} \end{cases} \text{ وبالتالي } t = -\frac{1}{2}$$

$$r = \frac{3\sqrt{2}}{2} \quad r = \sqrt{R^2 - d^2(I, (P'))} = \sqrt{6 - \frac{6}{4}} : (C) \text{ حساب نصف قطر دائرة التقاطع}$$

ب) لتكن $B(2; -2; -2)$ نقطة من الفضاء تحقق من أن القطعة $[AB]$ أحد أقطار الدائرة (C)

0.5

التحقق من أن القطعة $[AB]$ أحد أقطار الدائرة (C) :

$$AB = \sqrt{(2-2)^2 + (-2-1)^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} = 2r \quad \text{لدينا :}$$

وبالتالي $[AB]$ أحد أقطار الدائرة (C)

ج) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (Q) المماس لسطح الكرة (S) في النقطة B .

0.5

كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (Q) :

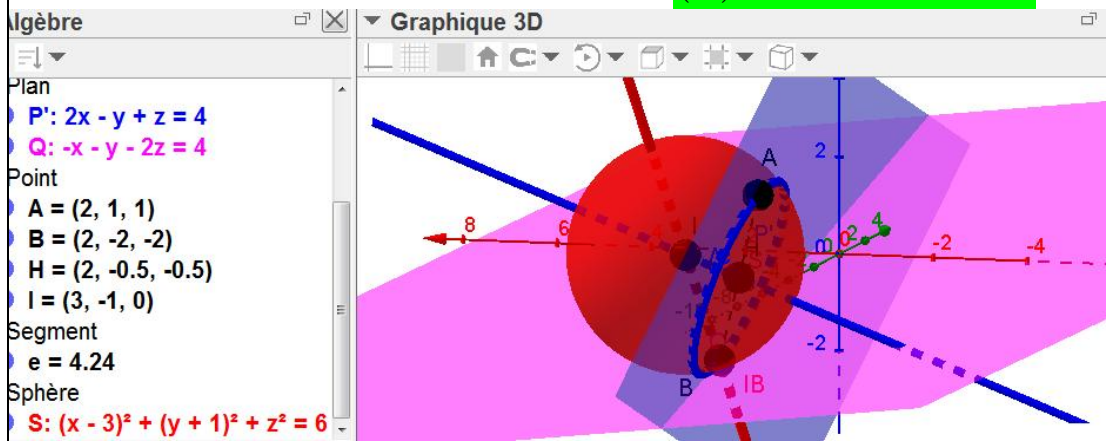
- شعاع ناظمي للمستوي (Q) : $\vec{IB}(-1; -1; -2)$

- معادلة (Q) من الشكل $-x - y - 2z + d = 0$

- لتعيين قيمة d نعوض بإحداثيات النقطة B نجد : $-(2) - (-2) - 2(-2) + d = 0$

$$d = -4$$

$$\text{إذن : } (Q) : -x - y - 2z - 4 = 0$$



التمرين الثالث :

1) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الاقليدية للعدد 5^n على العدد 7.

0.75

دراسة بواقي القسمة الاقليدية للعدد 5^n على العدد 7 :

لدينا :

$$5^5 \equiv 3[7] \quad 5^4 \equiv 2[7] \quad 5^3 \equiv 6[7] \quad 5^2 \equiv 4[7] \quad 5^1 \equiv 5[7] \quad 5^0 \equiv 1[7]$$

$$5^6 \equiv 1[7]$$

0.75	<p>- بواقي القسمة الاقليدية للعدد 5^n على العدد 7 تشكل متتالية دورية دورها $p = 6$</p> <p>- من أجل كل عدد طبيعي k لدينا :</p> <table border="1" data-bbox="331 197 1423 300"> <tr> <td>n</td> <td>$6k$</td> <td>$6k+1$</td> <td>$6k+2$</td> <td>$6k+3$</td> <td>$6k+4$</td> <td>$6k+5$</td> </tr> <tr> <td>$5^n \equiv \dots [7]$</td> <td>1</td> <td>5</td> <td>4</td> <td>6</td> <td>2</td> <td>3</td> </tr> </table>	n	$6k$	$6k+1$	$6k+2$	$6k+3$	$6k+4$	$6k+5$	$5^n \equiv \dots [7]$	1	5	4	6	2	3		
n	$6k$	$6k+1$	$6k+2$	$6k+3$	$6k+4$	$6k+5$											
$5^n \equiv \dots [7]$	1	5	4	6	2	3											
	<p>(2) عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون العدد $19^{6n+3} - 5^{6n+4} + 4n^2 + 1$ قابلا للقسمة على العدد 7</p>																
01	<p>• تعيين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون : $19^{6n+3} - 5^{6n+4} + 4n^2 + 1 \equiv 0 [7]$:</p> <p>- لدينا : $19 \equiv 5 [7]$ ومنه $19^{6n+3} \equiv 5^{6n+3} [7]$ أي $19^{6n+3} \equiv 6 [7]$</p> <p>- ولدنا : $5^{6n+4} \equiv 2 [7]$</p> <p>- إذن : $19^{6n+3} - 5^{6n+4} + 4n^2 + 1 \equiv 0 [7]$ يكافئ $6 - 2 + 4n^2 + 1 \equiv 0 [7]$ أي $4n^2 + 5 \equiv 0 [7]$</p> <p>ومنه : $4n^2 \equiv -5 [7]$ إذن $4n^2 \equiv 2 [7]$</p> <p>وبالتالي : $n^2 \equiv 4 [7]$</p> <table border="1" data-bbox="331 846 1423 967"> <tr> <td>$n \equiv \dots [7]$</td> <td>0</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>4</td> <td>5</td> <td>6</td> </tr> <tr> <td>$n^2 \equiv \dots [7]$</td> <td>0</td> <td>1</td> <td>4</td> <td>2</td> <td>1</td> <td>4</td> <td>1</td> </tr> </table> <p>- ومنه : $n^2 \equiv 4 [7]$ يعني $n \equiv 2 [7]$ أو $n \equiv 5 [7]$</p> <p>أي $n = 7\alpha + 2$ أو $n = 7\alpha + 5$ مع $\alpha \in \mathbb{N}$</p> <p>(3) N عدد طبيعي يكتب $1xx0$ في نظام التعداد ذي الأساس 5. حيث x عدد طبيعي . أ) عين قيم العدد الطبيعي x حتى يكون العدد N قابلا للقسمة على 35.</p>	$n \equiv \dots [7]$	0	1	2	3	4	5	6	$n^2 \equiv \dots [7]$	0	1	4	2	1	4	1
$n \equiv \dots [7]$	0	1	2	3	4	5	6										
$n^2 \equiv \dots [7]$	0	1	4	2	1	4	1										
01	<p>• تعيين قيم العدد الطبيعي x حتى يكون العدد N قابلا للقسمة على 35 :</p> <p>- لدينا : $N = 1 \times 5^3 + x \times 5^2 + x \times 5^1 + 0 \times 5^0 = 125 + 30x$ مع $x < 5$</p> <p>وبالتالي N يقبل القسمة على 35 يعني $N \equiv 0 [35]$</p> <p>أي أن $N \equiv 0 [7]$ لان $N \equiv 0 [5]$ و 5 أولي مع 7</p> <p>وبالتالي $N \equiv 0 [7]$ يعني $125 + 30x \equiv 0 [7]$</p> <p>ومنه : $6 + 2x \equiv 0 [7]$</p> <p>يعني $2x \equiv -6 [7]$ أي $2x \equiv 1 [7]$</p> <p>وبالتالي : $x \equiv 4 [7]$</p> <p>أي $x = 7k + 4$ مع $x < 5$ إذن من أجل $k = 0$ نجد $x = 4$</p>																
	<p>ب) أكتب العدد N في النظام العشري .</p>																
0.5	<p>• كتابة العدد N في النظام العشري :</p> <p>$N = 125 + 30(4) = 245$ $N = 245$</p>																
التمرين الرابع :																	
	<p>نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $f(x) = x + 3 \ln \left(\frac{x^2 + 2}{3x} \right)$</p> <p>نسمي (C_f) المنحني الممثل لها في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس (O, \vec{i}, \vec{j}).</p>																

I. 1) أحسب نهايتي الدالة f عند 0 وعند $+\infty$.

• حساب نهايتي الدالة f :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x^2 + 2}{3x} \right) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln \left(\frac{x^2 + 2}{3x} \right) = +\infty \end{array} \right. \quad \text{لان} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x + 3 \ln \left(\frac{x^2 + 2}{3x} \right) \right) = +\infty -$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 2}{3x} \right) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{x^2 + 2}{3x} \right) = +\infty \end{array} \right. \quad \text{لان} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + 3 \ln \left(\frac{x^2 + 2}{3x} \right) \right) = +\infty -$$

0.25 + 0.25

2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x ، $f'(x) = \frac{(x-1)(x^2+4x+6)}{x(x^2+2)}$ ثم

استنتج اتجاه تغير الدالة f

• حساب $f'(x)$:

$$f'(x) = 1 + 3 \times \frac{2x(3x) - 3(x^2 + 2)}{(3x)^2} = 1 + 3 \times \frac{6x^2 - 3x^2 - 6}{9x^2} \times \frac{3x}{x^2 + 2}$$

$$f'(x) = 1 + \frac{6x^2 - 3x^2 - 6}{9x^2} \times \frac{9x}{x^2 + 2} = 1 + \frac{3x^2 - 6}{x(x^2 + 2)} = \frac{x^3 + 3x^2 + 2x - 6}{x(x^2 + 2)}$$

0.75

وبالتالي: $f'(x) = \frac{(x-1)(x^2+4x+6)}{x(x^2+2)}$ من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x

• استنتاج اتجاه تغير الدالة f :

$$\frac{(x-1)(x^2+4x+6)}{x(x^2+2)} = 0 \quad \text{يعني} \quad f'(x) = 0$$

ومنه $x-1=0$ أو $x^2+4x+6=0$ (ليس لها حل لان $\Delta = 16 - 24 = -8 < 0$) مع $x \in]0; +\infty[$

ومنه $x=1$

0.5

إشارة $f'(x)$ من إشارة $(x-1)(x^2+4x+6)$ لان $x(x^2+2) > 0$

x	0	1	$+\infty$
$x-1$	-	0	+
x^2+4x+6	+		+
$f'(x)$	-	0	+

- الدالة f متناقصة على المجال $]0;1]$ و متزايدة على المجال $[1;+\infty[$.

(3) شكل جدول تغيرات الدالة f .

• جدول تغيرات الدالة f :

0.5

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	1	$+\infty$

(4) أدرس الوضع النسبي للمنحني (C_f) بالنسبة الى المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = x$.

• دراسة الوضع النسبي للمنحني (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = x$:

- ندرس إشارة الفرق $f(x) - y$

- لدينا: $f(x) - y = x + 3 \ln\left(\frac{x^2+2}{3x}\right) - x = 3 \ln\left(\frac{x^2+2}{3x}\right)$

- $3 \ln\left(\frac{x^2+2}{3x}\right) = 0$ يعني $f(x) - y = 0$

ومنه $\ln\left(\frac{x^2+2}{3x}\right) = 0$ أي $\frac{x^2+2}{3x} = 1$

- وبالتالي $x^2 + 2 = 3x$

إذن: $x^2 - 3x + 2 = 0$

- حساب المميز: $\Delta = (-3)^2 - 4(1)(2) = 9 - 8 = 1$

المعادلة تقبل حلين متميزين هما: $x_1 = \frac{3-1}{2} = 1$ ، $x_2 = \frac{3+1}{2} = 2$

01

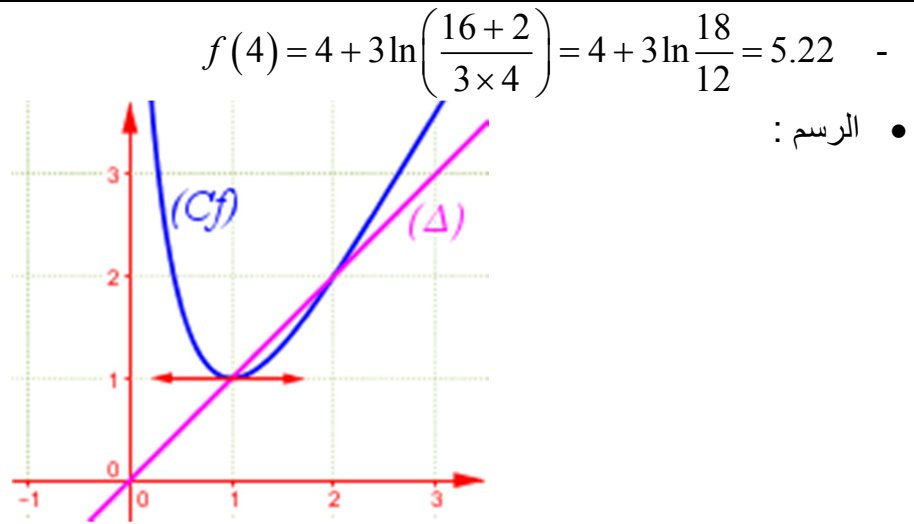
x	0	1	2	$+\infty$	
$f(x) - y$	+	0	-	0	+
		(C_f) يقع فوق (Δ)	(C_f) يقع تحت (Δ)	(C_f) يقع فوق (Δ)	
		(Δ) يقطع (C_f)	(Δ) يقطع (C_f)	(Δ) يقطع (C_f)	

(5) أحسب $f(4)$ ثم أرسم (Δ) و (C_f) .

• حساب $f(4)$:

0.25

01



II. نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بـ: $u_0 = \frac{3}{2}$ و من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

(1) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $1 < u_n < 2$.

• البرهان بالتراجع على أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $1 < u_n < 2$:

- نسمي $P(n)$ هذه الخاصية .

-1 من أجل $n = 0$ لدينا :

$$u_0 = \frac{3}{2} \quad \text{إذن} \quad 1 < u_0 < 2 \quad \text{ومنه} \quad P(0) \text{ صحيحة .}$$

-2 نفرض صحة $P(n)$ أي نفرض أن $1 < u_n < 2$.

ونبرهن على صحة $P(n+1)$ أي نبرهن أن $1 < u_{n+1} < 2$

0.75

لدينا : $1 < u_n < 2$ ومنه $f(1) < f(u_n) < f(2)$ لان الدالة f متزايدة تماما على المجال $]1; 2[$

- ومنه $1 < u_{n+1} < 2$ لان $u_{n+1} = f(u_n)$ ، $f(1) = 1$ و $f(2) = 2$ أي $P(n+1)$ صحيحة .

- حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإن $P(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

من أجل كل عدد طبيعي n ، $1 < u_n < 2$

(2) أدرس رتبة المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ثم استنتج أنها متقاربة .

• دراسة رتبة المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ أي دراسة تغيرات المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

- ندرس إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$

$$u_{n+1} - u_n = u_n + 3 \ln\left(\frac{u_n^2 + 2}{3u_n}\right) - u_n = 3 \ln\left(\frac{u_n^2 + 2}{3u_n}\right)$$

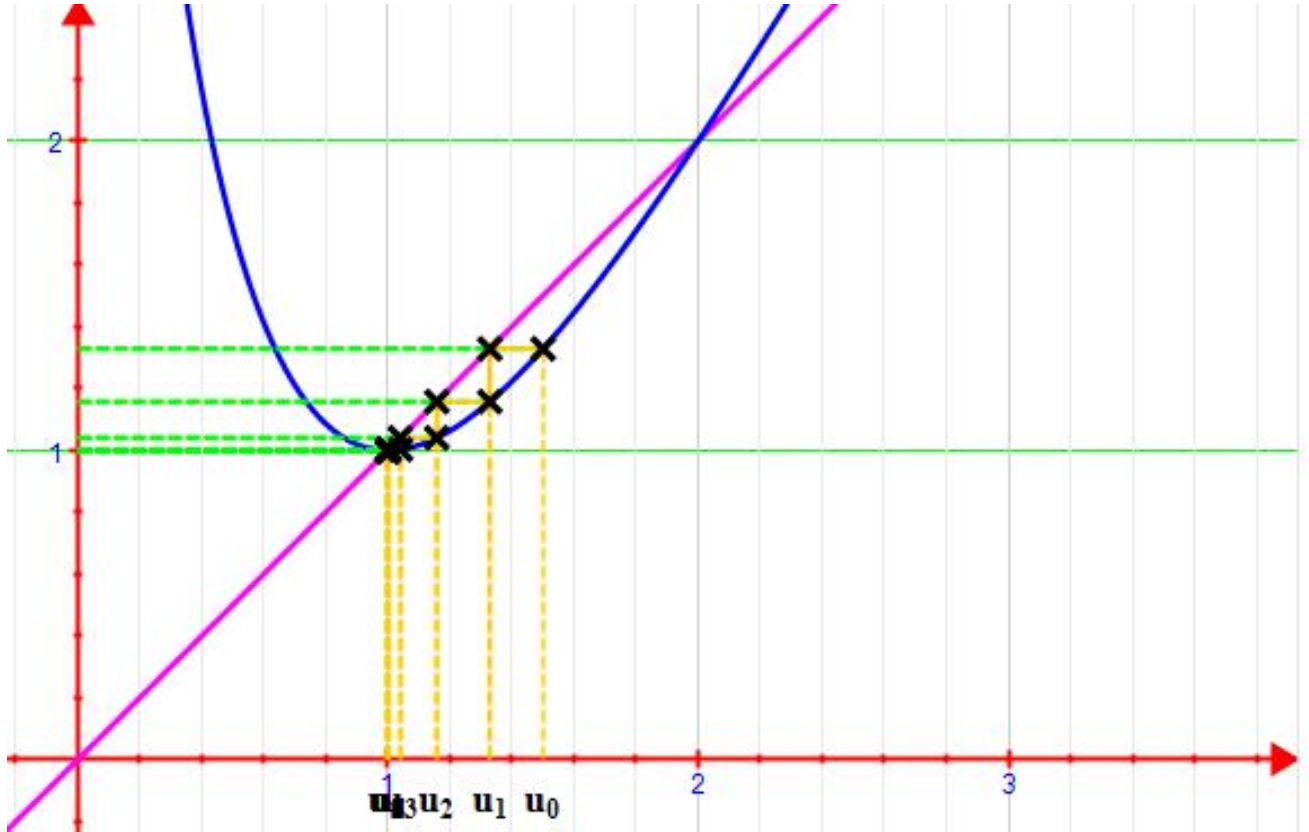
لدينا :

- بما أن $u_n \in]1; 2[$ فإن $3 \ln\left(\frac{u_n^2 + 2}{3u_n}\right) < 0$

من أجل $x \in]1; 2[$ فإن $f(x) - x < 0$ (السؤال (4))

0.5

	وبالتالي $u_{n+1} - u_n < 0$ ومنه المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متناقصة تماما .
0.5	• استنتاج أن المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متقاربة : - المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ محدودة من الأسفل بالعدد 1 وهي متناقصة تماما فهي متقاربة وتتقارب من العدد 1 .
	(3) عين نهاية المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
0.25	• تعيين نهاية المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$



بالتوفيق و النجاح ☺ في البكالوريا 2015 ©