نهائي علوم و رياضيات

المراجعة 01

الدالة الأسية - المتتاليات - الاحتمالات

2017-2018

التمرين 1

★★★☆☆ 50

الجزء الأول نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=1-(2x+1)\mathrm{e}^{x}$

1. احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$
2. ادرس اتجاه تغيّر الدالة g ثمّ شكل جدول تغيّراتها
3. احسب $g(0)$ و حدّد حسب قيم x، إشارة $g(x)$

الجزء الثاني نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]-\infty\,;1]$ بما يلي : $f(x)=x(\mathrm{e}^{x}-1)^{2}$

$(\mathcal{C}_f)$ هو تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$

1. احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$
2. (أ) بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x$ هو مقارب للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$
   (ب) ادرس وضعية المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ بالنسبة إلى المستقيم (Δ)
3. بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty\,;1]$ فإنّ : $f'(x)=(1-\mathrm{e}^{x})g(x)$
4. استنتج حسب قيم x إشارة $f'(x)$ ثمّ شكل جدول تغيّرات الدالة f. برّر أنّ المنحني $(\mathcal{C}_f)$ يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين إحداثياتها
5. أنشئ المستقيم (Δ) و المنحني $(\mathcal{C}_f)$
6. A هي النقطة من المنحني $(\mathcal{C}_f)$ ذات الفاصلة 1. اكتب معادلة للمستقيم (OA)
   ناقش بيانيا حسب قيم العدد الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة التالية ذات المجهول الحقيقي x : $f(x)=mx$

الجزء الثالث h هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $h(x)=x\,(\mathrm{e}^{-|x|}-1)^{2}$

1. ادرس قابلية اشتقاق الدالة h عند 0 ، ماذا تستنتج ؟
2. بيّن أنّ h هي دالة فردية ثمّ استنتج طريقة لانشاء منحناها دون دراسة تغيّراتها
3. أنشئ منحنى الدالة h في المعلم السابق

التمرين 2

★★★☆☆ 40

1. (w_n) متتالية هندسية متزايدة معرفة على $\mathbb{N}$ ، حدودها الثلاثة الأولى تحقق : $\begin{cases} w_0+w_1+w_2=26 \\ w_0\, w_1\, w_2=216 \end{cases}$

عيّن w_0 ، w_1 و w_2 ثمّ اكتب w_n بدلالة n

2. لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بحدّها الأول ، $u_0=\frac{1}{2}$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=\frac{2u_n}{u_n+1}$

(ا) برهن بالتراجع أنّه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $0<u_n<1$

(ب) ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n)

(ج) استنتج أنّ المتتالية (u_n) تتقارب نحو عددا حقيقيا ℓ هو حل للمعادلة $x^2-x=0$

3. (v_n) المتتالية المعرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n=1-\frac{\ell}{u_n}$

(ا) برهن أنّ (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها q و حدّها الأول v_0

(ب) اكتب v_n بدلالة n ثمّ بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n=\frac{2^n}{1+2^n}$

4. اكتب بدلالة n :

(ا) $S_1=v_0w_0+v_1w_1+\cdots+v_nw_n$

(ب) $S_2=\frac{1}{u_0}+\frac{2}{u_1}+\cdots+\frac{2^n}{u_n}$

(ج) $P_n=\left(5-\frac{5}{u_0}\right)\times\left(5-\frac{5}{u_1}\right)\times\cdots\times\left(5-\frac{5}{u_n}\right)$

التمرين 3

★★★☆☆ 40

صندوق A يحتوي على كرة حمراء و 3 كرات خضراء. صندوق B يحوي كرتين حمراوين و كرتين سوداوين. الكرات كلّها لا نميّز بينها باللمس

1. لدينا نرد مكعب غير مزيّف وجوهه مرقمة من 1 إلى 6. نرمي هذا النرد مرة واحدة ، إذا تحصلنا على مضاعف لـ 3، نسحب عشوائيا كرة من الصندوق A ، في الحالات الأخرى نسحب عشوائيا كرة من الصندوق B

(ا) احسب احتمال سحب كرة سوداء

(ب) احسب احتمال سحب كرة حمراء

(ج) ما احتمال أن تكون الكرة قد سُحبت من الصندوق B علما أنّها حمراء ؟

2. نقوم بظم كل الكرات في صندوق واحد ثمّ نسحب 3 كرات على التوالي و دون إرجاع

(ا) أثبت أنّ احتمال الحادثة " الكرة المسحوبة الثالثة هي سوداء " يساوي $\frac{1}{4}$

(ب) احسب احتمال كل من الحادثتين " الكرة المسحوبة الأولى سوداء " و " الكرة المسحوبة الثالثة سوداء "

حل التمرين 1

الجزء الأول $g(x)=1-(2x+1)\,\mathrm{e}^{x}$

.1 $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=1$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$

.2 $g'(x)=(-3-2x)\mathrm{e}^{x}$

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
g	0	$\nearrow$	$\frac{2}{\sqrt{\mathrm{e}^3}}+1$	$\searrow$	$-\infty$

.3 $g(0)=0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

الجزء الثاني $f(x)=x(\mathrm{e}^{x}-1)^2$

.1 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

.2 (أ) $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^{x}(\mathrm{e}^{x}-2)=0$

(ب) إشارة الفرق $f(x)-x$:

x	$-\infty$		0		$\ln(2)$		1
$f(x)-x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ يقع فوق المستقيم (Δ) في كل من المجالين $]-\infty;0[$ و $]\ln(2);+\infty[$ و $(\mathcal{C}_f)$ يقع تحت (Δ) في المجال $]0;\ln(2)[$

.3 $f'(x)=(1-\mathrm{e}^{x})g(x)$

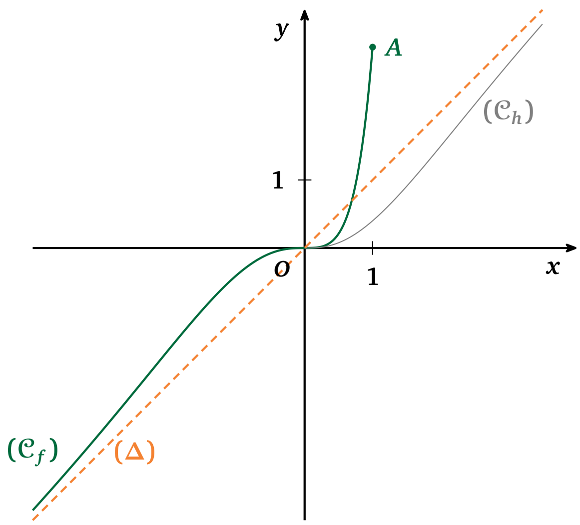
.4 إشارة $f'(x)$ و جدول تغيّرات الدالة f

x	$-\infty$		0		1
$1-\mathrm{e}^{x}$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$+$	

x	$-\infty$		0		1
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$f(1)$

النقطة O مبدأ المعلم هي نقطة انعطاف لأنّ المماس فيها (الموازي لمحور الفواصل) يقطع $(\mathcal{C}_f)$ في O

.5 إنشاء المستقيم (Δ) و المنحنى $(\mathcal{C}_f)$



.6 $y=(\mathrm{e}-1)^2x$ هي معادلة للمستقيم (OA)

مناقشة المعادلة $y=mx$

قيم m	عدد و إشارة الحلول
$m\leqslant 0$	حل معدوم
$0<m<1$	حل معدوم و حلان مختلفا الإشارة
$1\leqslant m\leqslant(\mathrm{e}-1)^2$	حل معدوم و حل موجب
$m\leqslant(\mathrm{e}-1)^2$	حل معدوم

الجزء الثالث $h(x)=x\,(\mathrm{e}^{-|x|}-1)^2$

.1 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\<}}\dfrac{h(x)-h(0)}{x-0}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}}\dfrac{h(x)-h(0)}{x-0}=0$

إذن الدالة h قابلة للاشتقاق عند 0 و $h'(0)=0$. و تمثيلها البياني يقبل في النقطة O مماسا موازيا لمحور الفواصل

.2 من أجل $x\in\mathbb{R}$: $-x\in\mathbb{R}$ و $h(-x)=-h(x)$.

إذن h دالة فردية.

.3 لدينا من أجل $x\in\,]-\infty;0]$: $h(x)=f(x)$.

إذن $(\mathcal{C}_h)$ ينطبق على $(\mathcal{C}_f)$ في المجال $]-\infty;0]$ و بما أنّ h فردية فإنّ تمثيلها البياني $(\mathcal{C}_h)$ متناظر بالنسبة للمبدأ O

.4 الإنشاء