نهائي علوم و رياضيات

المراجعة 03

الدالة اللوغارتمية - المتتاليات - الاحتمالات

2017-2018

التمرين 1

★★★☆☆ 45

الجزء الأول نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بالعبارة : $g(x)=2-x+x\ln x$

1. ادرس اتجاه تغيّر الدالة ثمّ شكل جدول تغيّراتها
2. احسب $g(1)$ و استنتج أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x>0$: $g(x)\geqslant 1$

الجزء الثاني لتكن الدالة f المعرفة على $D_f=]0;1[\cup]1;+\infty[$ بما يلي :

$$f(x)=\frac{\ln x}{x-1}$$

$(\mathcal{C}_f)$ هو تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$

1. بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من D_f: $f'(x)=\dfrac{1-g(x)}{x(x-1)^2}$
ثمّ استنتج اتجاه تغيّر الدالة f على كل مجال من مجموعة تعريفها
2. احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}f(x)$. فسر النتائج بيانيا
3. باستعمال تعريف العدد المشتق للدالة $x\mapsto \ln x$ عند 1 ، بيّن أنّ $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=1$
4. شكل جدول تغيّرات الدالة f
5. بيّن أنّ المنحني $(\mathcal{C}_f)$ يقطع المستقيم ذي المعادلة $2y-1=0$ في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث $3{,}5\leqslant\alpha\leqslant 3{,}6$
6. أنشئ المنحنى $(\mathcal{C}_f)$
7. لتكن الدالة h المعرفة على $D_h=]-a;0[\cup]0;+\infty[$ بالعبارة $h(x)=\dfrac{\ln(x+a)}{x}+b$ حيث a و b عددان حقيقيان
   (أ) عيّن العددين a و b بحيث المنحني $(\mathcal{C}_h)$ الممثل للدالة h يشمل النقطة $A(1;0)$ و يقبل عند $+\infty$ مستقيما مقاربا معادلة له $y=-\ln 2$
   (ب) تحقق عندئذ أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من D_h : $h(x)=f(x+1)-\ln 2$ ثمّ استنتج طريقة لإنشاء المنحنى $(\mathcal{C}_h)$ انطلاقا من المنحني $(\mathcal{C}_f)$
   (ج) أنشئ المنحني $(\mathcal{C}_h)$ في المعلم السابق

التمرين 2

★★★☆☆ 40

1. f هي الدالة المعرفة على $[2;+\infty[$ بما يلي : $f(x)=\dfrac{x^3+2}{x^2+1}$

احسب $f'(x)$ ثمّ استنتج اتجاه تغيّر الدالة f على المجال $[2;+\infty[$

2. (u_n) متتالية معرّفة بـ : $u_0=\dfrac{5}{2}$ و من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=f(u_n)$

(ا) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $2<u_n<3$

(ب) استنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n^2<\dfrac{9}{10}\left(u_n^2+1\right)$

(ج) بيّن أنّ المتتالية (u_n) متناقصة تماما، هل المتتالية (u_n) متقاربة ؟

(د) تحقق أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}-2=\dfrac{u_n^2}{u_n^2+1}(u_n-2)$

(ه) أثبت أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $0<u_n-2\leqslant\left(\dfrac{9}{10}\right)^n$ ثمّ استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

التمرين 3

★★☆☆☆ 35

يحتوي صندوق على 10 كرات لا نفرق بينها في اللمس، 5 حمراء، 3 صفراء و 2 خضراء.

تُعطى النتائج على شكل كسور غير قابلة للاختزال

1. نسحب عشوائيا و في آن واحد ثلاث كرات من هذا الصندوق و نعتبر الحوادث التالية :

A : " الكرات المسحوبة الثلاثة هي حمراء "

B : " الكرات المسحوبة الثلاثة هي من نفس اللون "

C : " الكرات المسحوبة الثلاثة هي مختلفة الألوان مثنى مثنى " (أي كل كرة من لون مختلف)

(ا) أحسب الاحتمالات $P(A)$ ، $P(B)$ و $P(C)$

(ب) نُسمي X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل سحبة عدد الألوان المحصل عليها

عيّن قانون X. أحسب الأمل الرياضياتي $E(X)$

2. في هذا السؤال، نستبدل 5 كرات الحمراء ب n كرة حمراء حيث n هو عدد طبيعي أكبر من أو يساوي 2 . الصندوق يشمل إذن $n+5$ كرة : n كرة حمراء، 3 صفراء و 2 خضراء

نسحب عشوائيا و في آن واحد كرتين من هذا الصندوق. و ليكن الحادثتين :

D : " سحب كرتين حمراوين "

E : " سحب كرتين من نفس اللون "

(ا) أثبت أن احتمال الحادثة D هو :

$$P(D)=\frac{n(n-1)}{(n+5)(n+4)}$$

(ب) أكتب $P(E)$ احتمال الحادثة E بدلالة n.

عيّن قيم n التي من أجلها يكون $P(E)\geqslant\dfrac{1}{2}$