نهائي علوم و رياضيات

المراجعة 04

الاحتمالات - الدالة اللوغارتمية - المتتاليات

2017-2018

التمرين 1

★★★☆☆ 40

لدينا وعاءين U_1 و U_2 يحتويان على كرات لا نفرق بينها عند اللمس

- الوعاء U_1 يحتوي على n كرة بيضاء و 3 كرات سوداء (n عدد طبيعي أكبر من أو يساوي 1)
- الوعاء U_2 يحتوي عل كرتين بيضاوين و كرة واحدة سوداء

نقوم بالتجربة E التالية : " نسحب عشوائيا كرة من U_1 و نضعها في U_2 ، ثمّ نسحب كرة من U_2 و نضعها في U_1 "

1. نعتبر الحادثة A : " بعد هذه التجربة يبقى الوعاءان على ما كانا عليه "
   (ا) بيّن أنّ الاحتمال $P(A)$ للحادثة A يكتب : $P(A) = \frac{3}{4}\left(\frac{n+2}{n+3}\right)$
   (ب) عيّن نهاية $P(A)$ لمّا يؤول n إلى $+\infty$
2. نعتبر الحادثة B : " بعد التجربة E الوعاء U_2 يحتوي على كرة واحدة بيضاء فقط "
   تحقق أنّ : $P(B) = \frac{3}{2(n+3)}$
3. لاعب يدفع 20 دينارا و يقوم بالتجربة E.
   بالنسبة إلى هذه التجربة، نعدُ عدد الكرات البيضاء في الوعاء U_2 :
   - إذا كان بعد التجربة، الوعاء U_2 يحتوي على كرة واحدة بيضاء، اللّاعب يكسب $2n$ دينار
   - إذا كان الوعاء U_2 يحتوي على كرتين بيضاوين، فإنّ اللّاعب يكسب n دينار
   - إذا كان الوعاء U_2 يحتوي على 3 كرات بيضاء، فإنّ اللّاعب لا يكسب شيئا

   اشرح لماذا لا يكون للاعب أيّ ربح إذا كان n لا يفوق 10 ؟
4. فيما يلي نفرض أنّ $n > 10$ ، و نعتبر X المتغيّر العشوائي الذي يأخذ قيمة الربح الجبري للّاعب.
   مثلا : إذا وجد كرة واحدة بيضاء فقط يكون الربح الجبري : $X = 2n - 20$
   (ا) عيّن قانون إحتمال المتغيّر العشوائي X
   (ب) أحسب الأمل الرياضياتي $E(X)$
   (ج) بيّن أنّ اللعبة تكون رابحة عندما يكون في الوعاء U_1 25 كرة بيضاء على الأقل

التمرين 2

★★★☆☆ 40

f هي الدالة المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بما يلي :

$$f(x)=x\ln x-\frac{1}{2}(\ln x)^2$$

$(\mathcal{C}_f)$ هو تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ (وحدة الرسم $2\,\text{cm}$)

.1 (أ) نضع $g(x)=x\ln x-\ln x$. حل المتراجحة $g(x)\geqslant 0$

(ب) أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

(ج) بيّن أنّه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$ ، $f'(x)=\dfrac{x+g(x)}{x}$

(د) استنتج اتجاه تغيّر الدالة f على المجال $]0;+\infty[$ ثمّ شكل جدول تغيراتها

.2 بيّن أنّ المستقيم (T) ذو المعادلة $y=x-1$ هو مماسا للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ في نقطة A يطلب تعيين إحداثياتها

.3 لتكن h الدالة الدالة المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $h(x)=f(x)-x+1$

(أ) أدرس اتجاه تغيّر الدالة h على المجال $]0;+\infty[$ ثمّ شكل جدول تغيّراتها

(ب) استنتج حسب قيم x ، إشارة $h(x)$

(ج) استنتج تبعا لقيم x ، وضعية $(\mathcal{C}_f)$ بالنسبة إلى المستقيم ذو المعادلة $y=x-1$

.4 (أ) أنشئ المماس (T) و المنحنى $(\mathcal{C}_f)$

(ب) m عدد حقيقي و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y=x+m$. عيّن بيانيا قيم m التي من أجلها المستقيم (Δ) يقطع المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ في نقطة ترتيبها عدد حقيقي سالب تماما

.5 أدرس اتجاه تغيّر الدالة k المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $k(x)=(f(x))^2$

التمرين 3

★★★☆☆ 40

نعتبّر المتتالية (u_n) المعرّفة بـ : $u_1=\dfrac{3}{2}$ و من أجل كل عدد طبيعي $n\geqslant 1$،

$$u_{n+1}=\frac{1}{2}\left(u_n+\frac{2}{u_n}\right)$$

.1 أثبت بالتراجع انّه من أجل كل عدد طبيعي $n\geqslant 1$، $u_n>0$

.2 أثبت أنّه من أجل كل عدد طبيعي $n\geqslant 1$،

$$u_{n+1}-\sqrt{2}=\frac{1}{2}\frac{(u_n-\sqrt{2})^2}{u_n}$$

استنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي $n\geqslant 1$، $u_n>\sqrt{2}$

.3 أثبت أنّه من أجل كل عدد طبيعي $n\geqslant 1$، $u_{n+1}-\sqrt{2}=\dfrac{1}{2}(u_n-\sqrt{2})+\dfrac{1}{u_n}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

استنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي $n\geqslant 1$، $u_{n+1}-\sqrt{2}<\dfrac{1}{2}(u_n-\sqrt{2})$ ثم أنّ $u_{n+1}-\sqrt{2}<\dfrac{1}{2^n}$

.4 أثبت أنّ المتتالية (u_n) متقاربة و عيّن نهايتها