1 النهايات و الاستمرارية

◁ المستقيمات المقاربة

$\mathcal{C}_f$ هو المنحني الممثل لدالة f و a و b هما عددان حقيقيان

إذا كان ...	فإنّ ...
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$	المستقيم ذو المعادلة $y=b$ ، مقارب أفقي لـ $\mathcal{C}_f$ عند $+\infty$
$\lim\limits_{x\to a} f(x)=\pm\infty$	المستقيم ذو المعادلة $x=a$ ، مقارب عمودي لـ $\mathcal{C}_f$
$\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)-(ax+b)]=0$	المستقيم ذو المعادلة $y=ax+b$ ، مقارب مائل لـ $\mathcal{C}_f$ عند $+\infty$

◁ كيف نعيّن نهاية دالة مركبة ؟

a ، b و c تدل على عدد حقيقي أو $+\infty$ أو $-\infty$

(أ) نكتب $f(x)$ على الشكل $f(x)=g(h(x))$

(ب) نُعيّن $\lim\limits_{x\to a} h(x)=b$ و $\lim\limits_{X\to b} g(X)=c$ ثم نستنتج $\lim\limits_{x\to a} f(x)=c$

مثال: أحسب النهاية $f(x)=\sqrt{\dfrac{2x-1}{x+2}}$ عند $+\infty$

◁ كيف نستعمل النهايات بالمقارنة ؟

(تُستعمل عامة في الدوال المثلثية)

a يدلّ على عدد حقيقي أو $+\infty$ أو $-\infty$ ، f ، g و h هي دوال معرفة على مجال I يشمل a

إذا كان من أجل كل $x\in I$ $\begin{cases} g(x)\le f(x)\le h(x) \\ \text{و} \\ \lim\limits_{x\to a} g(x)=\lim\limits_{x\to a} h(x)=\ell \end{cases}$ **فإنّ** $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\ell$

إذا كان من أجل كل $x\in I$ $\begin{cases} f(x)\ge g(x) \\ \text{و} \\ \lim\limits_{x\to a} g(x)=+\infty \end{cases}$ **فإنّ** $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$

إذا كان من أجل كل $x\in I$ $\begin{cases} f(x)\le g(x) \\ \text{و} \\ \lim\limits_{x\to a} g(x)=-\infty \end{cases}$ **فإنّ** $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$

- هل للدالة $f:x\mapsto x+\cos x$ نهاية عند $-\infty$ ؟ هل للدالة $f:x\mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ نهاية عند $+\infty$ ؟

◁ الاستمرارية عند عدد

f هي الدالة المعرفة على مجال I يشمل 0

نقول أنّ f مستمرة عند x_0 إذا كان $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

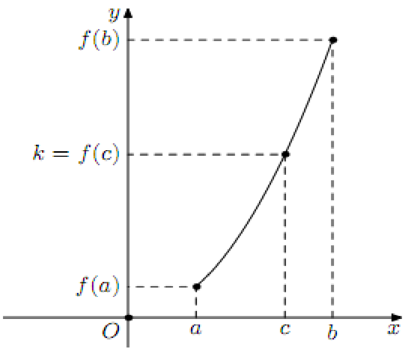
◁ مبرهنة القيم المتوسطة

f دالة معرفة و مستمرة على المجال $[a;b]$.

من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$

يوجد ، على الأقل، عدد حقيقي c محصور بين a و b

بحيث $f(c)=k$



2 الدوال المشتقة

⊲ **قابلية الاشتقاق عند عدد**

f دالة معرفة على مجال I يشمل العدد الحقيقي x_0

نقول أنّ f قابلة للاشتقاق عند x_0 و عددها المشتق عند x_0 هو العدد الحقيقي $f'(x_0)$ إذا كان:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \quad \text{أو} \quad \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

⊲ **التفسير الهندسي للعدد المشتق**

العدد المشتق $f'(x_0)$ هو معامل توجيه المماس لمنحني الدالة f عند النقطة ذات الفاصلة x_0.

معادلة لهذا المماس هي: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

⊲ **العمليات على المشتقات**

ليكن u و v دالتان قابلتان للاشتقاق على مجال I، k عدد حقيقي. الدوال $u+v$، ku، uv هي دوال قابلة للاشتقاق على I و إذا كانت v لا تنعدم على I فإنّ $\frac{1}{v}$ و $\frac{u}{v}$ قابلتان للاشتقاق على I

الدالة	$u+v$	ku	uv	$\frac{1}{u}$	$\frac{u}{v}$
المشتقة	$u'+v'$	ku'	$u'v+uv'$	$\frac{-u'}{u^2}$	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$

⊲ **الدالة المشتقة لدالة مركبة**

إذا كانت الدالة u قابلة للاشتقاق على I و تأخذ قيمها في مجال J و إذا كانت الدالة v قابلة للاشتقاق على J فإنّ الدالة المعرفة على I بـ $u \circ v(x) = v[u(x)]$ تقبل الاشتقاق على I و من أجل كل x من I: $f'(x) = u'(x)v'[u(x)]$

⊲ **حالات خاصة**

الدالة	u^n	$\sqrt{u}$	$\sin u$	$\cos u$	e^u	$\ln u$
المشتقة	$nu'u^{n-1}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$u'\cos u$	$-u'\sin u$	$u'\mathrm{e}^u$	$\frac{u'}{u}$

الطرائق

⊲ **كيف نعيّن محور تناظر أو مركز تناظر ؟**

1. إذا كان من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ حيث $\alpha + x \in \mathcal{D}_f$، لدينا: $\begin{cases} \alpha - x \in \mathcal{D}_f \\ f(\alpha+x) = f(\alpha - x) \end{cases}$

فإنّ المستقيم ذو المعادلة $x = \alpha$ هو محور تناظر للمنحني الممثل للدالة f (في معلم متعامد)

2. إذا كان من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ حيث $\alpha + x \in \mathcal{D}_f$، لدينا: $\begin{cases} \alpha - x \in \mathcal{D}_f \\ f(\alpha+x) + f(\alpha - x) = 2\beta \end{cases}$

فإنّ النقطة $\Omega(\alpha;\beta)$ هي مركز تناظر للمنحني الممثل للدالة f

⊲ **كيف ندرس الوضعية النسبية لمنحنيين**

1. إذا كانت I هي نقطة تقاطع المنحنيين، فإنّ إحداثياتها تُحقق المعادلتين: $\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases}$

و يرجع إذن إلى حل المعادلة $f(x) = g(x)$

2. لدراسة الوضعية النسبية للمنحنيين $\mathcal{C}_f$ و $\mathcal{C}_g$ ندرس إشارة الفرق $f(x) - g(x)$
   - إذا كان $f(x) - g(x) > 0$ فإنّ $\mathcal{C}_f$ يقع فوق $\mathcal{C}_g$
   - إذا كان $f(x) - g(x) < 0$ فإنّ $\mathcal{C}_f$ يقع تحت $\mathcal{C}_g$

⊲ **كيف نُثبت أنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا**

نستعمل مبرهنة القيم المتوسطة. إذا كان:

- f مستمرة على المجال $[a;]$
- f رتيبة تماما على المجال $[a;]$
- $f(a) \times f(b) < 0$

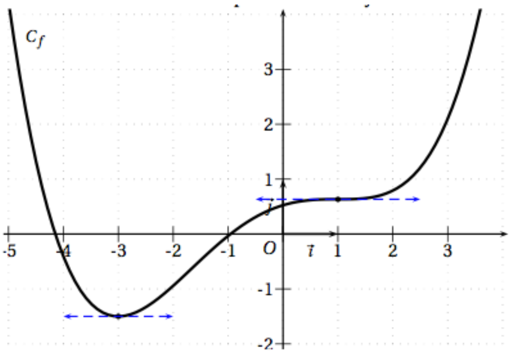
فإنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[a;b]$

التمرين الأول

15 دقيقة

تعيين العدد المشتق بيانيا

قراءات بيانية

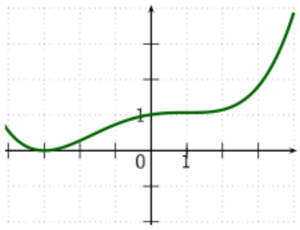


المنحنى C_f في الشكل المقابل هو التمثيل البياني لدالة f معرفة على $\mathbb{R}$. لتكن f' الدالة المشتقة للدالة f

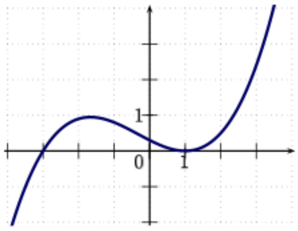
لهذا المنحنى C_f الخواص التالية:

- المماسات للمنحنى C_f عند النقط ذات الفواصل -3 و 1 هي موازية لمحور الفواصل
- المماس للمنحنى C_f عند النقطة ذات الإحداثيات $(3; 2{,}1)$ يشمل النقطة ذات الإحداثيات $(4; 4{,}5)$

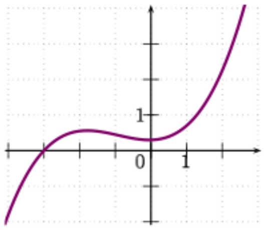
1. جد: $f'(-3)$، $f'(1)$ و $f'(3)$
2. اكتب معادلة للماس (d) للمنحنى C_f في النقطة ذات الفاصلة 3
3. حل بيانيا في $\mathbb{R}$ المتراجحة $f'(x) > 0$
4. من بين التمثيلات البيانية الثلاثة التالية، يوجد منحنٍ وحيدا يُمثل الدالة المشتقة f' للدالة f.
عيّن الشكل المرفق للدالة f' مع التبرير



الشكل 1



الشكل 2



الشكل 3

التمرين الثاني

45 دقيقة

تعيين عبارة دالة

دراسة اتجاه تغيّر دالة

المماس لمنحنى دالة

الوضعية النسبية

مناقشة معادلة بيانيا

نعتبر، في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$، المنحنى ذو المعادلة

$$y = \frac{ax^2 + bx\square}{2(x-c)^2}$$

حيث a، b و c هي أعداد حقيقية (وحدة الرسم: 1 cm)

1. عيّن الأعداد الحقيقية a، b و c التي من أجلها يكون لهذا المنحنى مستقيمين مقاربين معادلتاهما $x = 1$ و $y = \frac{3}{2}$ و يكون للمماس عند النقطة O المعادلة $y = -2x$
2. لتكن الدالة f المعرفة على $]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$ بما يلي:

$$f(x) = \frac{3x^2 - 4x}{2(x-1)^2}\square$$

3. وليكن $\mathcal{C}$ المنحنى الممثل للدالة f في المعلم $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$
   (أ) أدرس نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها
   (ب) أدرس اتجاه تغيّر الدال f و شكل جدول تغيّراتها
   (جـ) عيّن معادلة للمماس عند النقطة O، و معادلة للمماس عند النقطة ذات الفاصلة $\frac{3}{2}$
   (د) أدرس وضعية المنحنى $\mathcal{C}$ بالنسبة إلى مستقيمه المقارب الأفقي
   (هـ) أنشئ $\mathcal{C}$، المستقيمات المقاربة و المماسات التي تم تعيينها في السؤال (جـ)
4. (أ) عيّن، بيانيا، حسب قيم m، عدد و إشارة حلول المعادلة
   $$(3-2m)\quad{}^2 - 4(1-m)x - 2m = 0$$
   (ب) عيّن، بيانيا، حسب قيم m، عدد حلول المعادلة $f(x) = 4x + m$

التمرين الثالث

30 دقيقة

قابلية الاشتقاق على مجال

قابلية الاشتقاق عند عدد

دراسة اتّجاه تغيّر دالة

لتكن f الدالة المعرفة على $[0;4]$ بما

$$f(x) = x\sqrt{4x - x^2}$$

و $\mathcal{C}_f$ تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$

1. برّر قابلية اشتقاق الدالة f على $]0;4[$ و أثبت أنّه من أجل كل عدد حقيقي $0 < x < 4$،
$$f'(x) = \frac{2x(3-x)}{\sqrt{4x - x^2}}$$
2. (أ) هل الدالة f قابلة للاشتقاق عند 0 ؟
(ب) هل الدالة f قابلة للاشتقاق عند 4 ؟
3. أدرس اتجاه تغيّر الدالة f و شكل جدول تغيّراتها
4. أنشئ المنحني $\mathcal{C}_f$

التمرين الرابع

40 دقيقة

دراسة دالة مساعدة

مبرهنة القيم المتوسطة

استنتاج إشارة دالة

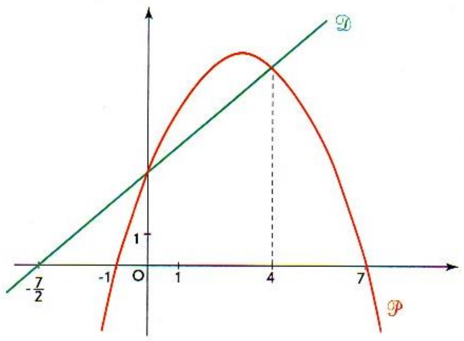
دراسة اتّجاه تغيّر دالة

المستقيم المقارب المائل

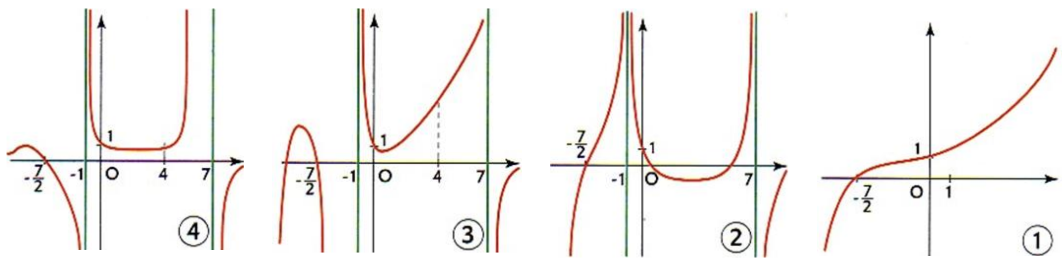
الوضعية النسبية

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس.
نعتبر المستقيم $\mathcal{D}$ و القطع المكافئ $\mathcal{P}$ الممثلين في الشكل التالي.

- المستقيم $\mathcal{D}$ يُمثل دالة تآلفية $x \mapsto mx + p$
- القطع المكافئ $\mathcal{P}$ يُمثل دالة كثير حدود من الدرجة الثانية $x \mapsto ax^2 + bx + c$
- f هي الدالة: $x \mapsto \frac{mx+p}{ax^2+bx+c}$



1. باستعمال الشكل المقابل، عيّن:
(أ) مجموعة تعريف الدالة f
(ب) مجموعة حلول المعادلة $f(x) = 0$
(جـ) مجموعة حلول المعادلة $f(x) = 1$
(د) إشارة $f(x)$
(هـ) المستقيمات المقاربة لمنحني الدالة f
2. $\mathcal{C}$ هو التمثيل البياني للدالة f. فسر بيانيا كل نتيجة محصل عليها في السؤال 1.
3. من بين المنحنيات التالية ، ما هو المنحني الذي يُمثل الدالة f ؟ برّر إجابتك.



4. أنشئ بدقة منحى الدالة g المعرفة بالعبارة $g(x) = |f(x)|$ و منحني الدالة h المعرفة بالعبارة $h(x) = f(|x|)$

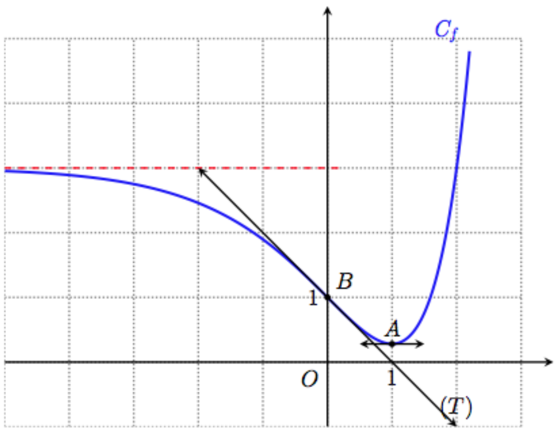
التمرين الخامس

35 دقيقة

قراءة بيانية

اتجاه تغيّر مركب دالتين

المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ في الشكل التالي :



- C_f هو التمثيل البياني لدالة f معرفة على $\mathbb{R}$
- (T) هو المماس للمنحنى C_f عند النقطة $B(0;1)$
- C_f يشمل النقطة $A(1;3-\mathrm{e})$

1. بقراءة بيانية أوجد :

$f'(0)$ ، $f'(1)$ ، $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-1}{x}$ و $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{x}$

2. g هي الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ $g(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$

(g هي مركب الدالتين $x\mapsto\frac{1}{x}$ و f بهذا الترتيب).

بدون حساب $g'(x)$ أذكر اتجاه تغيّر الدالة g على المجال $]0;+\infty[$ ثمّ شكل جدول تغيّراتها

التمرين السادس

40 دقيقة

دراسة دالة صماء

محور التناظر

قابلية الاشتقاق عند عدد

المستقيم المقارب المائل

لتكن f الدالة المعرفة بـ

$$f(x)=\sqrt{x^2-6x+5}$$

و ليكن C تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1. أدرس، حسب قيم x، إشارة كثير الحدود x^2-6x+5 و استنتج أنّ الدالة f معرفة على المجموعة $D=]-\infty;1]\cup[5;+\infty[$
2. أثبت أنّ المستقيم ذي المعادلة $x=3$ هو محور تناظر للمنحنى C
3. أحسب نهاية $\frac{f(5+h)-f(5)}{h}$ لما يؤول h إلى 0 بقيم أكبر
هل الدالة f قابلة للاشتقاق عند 5 ؟ فسر النتيجة هندسيا
4. أدرس اتجاه تغيّر الدالة f على المجال $]5;+\infty[$ و استنتج اتجاه تغيّراتها على المجال $]-\infty;1]$
5. عيّن نهاية الدالة f عند $+\infty$
6. أثبت أنّ المستقيم d_1 ذي المعادلة $y=x-3$ هو مقارب للمنحنى C عند $+\infty$ و استنتج وُجود مستقيم مقارب d_2 عند $-\infty$ يطلب تعيين معادلة له
7. شكل جدول تغيّرات الدالة f
8. أنشئ المستقيمين المقاربين d_1، d_2 و المنحنى C

حل التمرين السادس

40 دقيقة

.1 إشارة $x^2 - 6x + 5$

x	$-\infty$		1		5		$+\infty$
x^2-6x+5		+	0	−	0	+	

.2 يكفي التحقق أنّ $f(3+x) = f(3-x)$.

نجد $f(3-x) = f(3+x) = \sqrt{x^2-4}$

.3 من أجل h قريب من الصفر و موجب تماما

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(5+h)-f(5)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{h^2+4h+6}}{h} = +\infty$$

الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند 5 و تمثيلها البياني يقبل في النقطة $(5;0)$ مماسا عموديا

.4 من أجل كل x من D، $f'(\ ) = \frac{2x-6}{2\sqrt{x^2-6x+5}}$

على المجال $[5;+\infty[$، $2x-6>0$ أي $f'(x)>0$ و منه الدالة f متزايدة تماما على المجال $[5;+\infty[$

المستقيم ذو المعادلة $x=3$ محور تناظر لمنحنى الدالة f. إذن الدالة f متناقصة على المجال $]-\infty;3]$

.5 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{X\to+\infty} \sqrt{X} = +\infty$ مع $X = x^2-6x+5$

.6 $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)-(x-3)] = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-4}{\sqrt{x^2-6x+5}+(x-3)} = 0$

و بما أنّ المستقيم ذو المعادلة $x=3$ محور تناظر لمنحنى الدالة f فإنّ المستقيم ذو المعادلة $y=-x+3$

7. جدول التغيّرات

x	$-\infty$		1		5		$+\infty$
$f'(x)$		−				+	
f	$+\infty$	↘	0		0	↗	$+\infty$

.8 التمثيل البياني